32101 076536679

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES
DEPUIS
L'AVÈNEMENT DE FRÉDERIC GUILLAUME III AU TRÔNE.

MDCCXCVIII.

AVEC L'HISTOIRE POUR LE MÊME TEMPS.

Prix 3 Risd. d'Allemagne, ou 12 Livres de France.

A BERLIN.
Imprimé chez GEORGE DECKER, Imprimeur du Roi.

MDCCCI.

Digitized by Google

Digitized by Google

TABLE.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE.

MDCCXCVIII.

ASSEMBLÉES PUBLIQUES. Page 3

PRIX *proposés par l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres pour l'année 1799, 1800 & 1802* 9

OUVRAGES IMPRIMÉS OU MANUSCRITS, MACHINES ET INVENTIONS, *présentés à l'Académie en 1798.* 14

NOUVELLES AGRÉGATIONS D'ACADÉMICIENS. 20

DISCOURS DE RÉCEPTION, *prononcé par* M. J. P. GRUSON. 20

RÉPONSE *du secrétaire perpétuel.* 22

RÉPONSE *du même au discours de réception de M. Biester.* 23

RÉPONSE *du même au discours de réception de M. Borgstede.* 25

ÉLOGE DE M. MICHELSEN, *par le même.* 28

MÉMOIRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.

SUR *quelques vitrifications antiques.* Par M. KLAPROTH. 3

ANALYSE CHIMIQUE *de la mine de tellure de Transylvanie.* Par le même. 17

ANALYSE *de quelques expériences faites sur la dilatation des fluides élastiques.* Par M. JEAN TREMBLEY. 38

OBSERVATIONS *sur le cours des rivières & des torrens.* Par le même. Second Mémoire. 62

DÉTERMINATION *d'un nouveau genre de plante aquatique, nommé* CAULINIA, *& observations générales sur les plantes aquatiques.* Par M. WILLDENOW. 78

DÉTERMINATION *de quelques nouvelles espèces de Figuier, & observations générales sur ce genre.* Par le même. 91

CLASSE DE MATHÉMATIQUE.

De la route de la lumière qui traverse un prisme transparent, avec des applications aux prismes achromatiques & aux lunettes achromatiques. Par M. BURJA. 3

(RCPXR) 0917 .205 1798

51149

Digitized by Google

OBSERVATIONS *sur les ſeries qui expriment la valeur des ſinus & coſinus d'arcs multiples.* Par M. JEAN TREMBLEY. - - Page 36
OBSERVATIONS *ſur une diſcuſſion relative à la Théorie de la réſiſtance des milieux.* Par le même. - - - - - 60
OBSERVATIONS *ſur l'analyſe de Diophante.* Par le même. - 76
LE CALCUL D'EXPOSITION, *inventé* par JEAN PHILIPPE GRUSON. 151

CLASSE DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

RÉFLEXIONS *ſur les Sens en général, & particulièrement ſur les Organes du Sens intime.* Par M. DE CASTILLON. - - - 3
SUR *la proportion entre la Moralité & le Bonheur, relativement à un nouvel argument pour l'Exiſtence de Dieu.* Par M. J. C. SCHWAB. - - 22

CLASSE DE BELLES-LETTRES.

SUR *les traces anciennes du Caractère des Nations modernes.* Par M. L'ABBÉ DENINA. Second Mémoire. - - - - 3
SUR *le caractère des Peuples qui ont habité, & de ceux qui habitent les îles de l'Archipel & de la Méditerranée.* Par le même. - - - - 28
SUR *les Bévues littéraires, où l'on traite de leur influence ſur la Biographie.* Par M. ERMAN. Huitième Mémoire. - - - - 44
Généalogie hiſtorique, diplomatique & raiſonnée de la Maiſon des anciens Comtes de Hohen-Zollern; &, en particulier, de la branche de cette Maiſon, qui a formé celle des Bourgraves de Nuremberg, devenue Électorale de Brandebourg & Royale de Pruſſe. Par M. LE CHEVALIER DE VERDY DU VERNOIS. - - 57
RECHERCHES *ſur le mot Environ.* Par M. BASTIDE. - - 89
L'ART DE SE VÊTIR, *& les vêtemens conſidérés ſous leurs divers rapports.* Par M. DE GOYON. Premier Mémoire. - - 100
OBSERVATIONS *grammaticales & critiques ſur Montaigne, ou à ſon occaſion.* Par M. BASTIDE. - - - - - 124
RECHERCHES *ſur l'L mouillée.* Par le même. - - - 153
SUR *les Monumens ſépulcraux des anciens peuples du Nord.* Par M. HIRT. 185

Digitized by Google

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE

DES

SCIENCES

ET

BELLES-LETTRES.

Digitized by Google

Digitized by Google

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE.

ANNÉE MDCCXCVIII.

ASSEMBLÉES PUBLIQUES.

L'Académie royale des Sciences & Belles-Lettres a tenu le 25 janvier ſon aſſemblée publique, en mémoire de ſon grand & auguſte fondateur. On a diſtingué parmi les étrangers S. A. S. Monſeigneur le prince-évêque de Warmie, prince de Hohenzollern.

Le ſecrétaire perpétuel a ouvert la ſéance par le discours ſuivant:

Meſſieurs,

„Ce jour anniverſaire que nous fêtons, eſt un double jour de naiſſance, celui de notre Académie, & celui du monarque immortel qui l'a fondée.

Je n'entreprendrai pas ici de célébrer le grand Roi, le grand homme, à qui nous devons notre exiſtence académique: ce ſeroit une tâche trop au deſſus de mes forces, mais dont heureuſement je puis me diſpenſer. Le nom de Fréderic eſt gravé, en traits ineffaçables, dans les faſtes du Temps; il n'eſt pas de région ſi lointaine où ce nom n'ait

Digitized by Google

retenti. La Terre a rendu hommage à ſes qualités ſublimes & à ſes actions étonnantes: ſes ennemis mêmes n'ont pu le lui refuſer, & l'Europe, liguée contre lui dans une guerre longue & cruelle, n'en a pas moins admiré ſon âme intrépide, la rapidité de ſes exploits, les reſſources intariſſables de ſon puiſſant génie *). Enfin, ſi les Rois ne ſont jugés impartialement qu'après leur mort, qui réduit au ſilence & l'adulation & l'envie, il ne reſte qu'une voix ſur Fréderic, depuis qu'il a ſubi ce terme fatal; & ſa gloire brillera d'un éclat pur dans tous les ſiècles & aux yeux de toutes les nations.

La nôtre conſiſtera toujours à tenir de lui notre origine, notre conſtitution, nos lois, & de pouvoir, dans ce jour ſolennel, en payer le juſte tribut de reconnoiſſance à ſa mémoire. C'eſt lui, vous le ſavez, qui a créé cette Académie, l'a affermie ſur des fondemens ſolides, lui a imprimé ſa forme permanente, & y a raſſemblé de toute part des hommes propres à l'honorer par leurs talens & leurs lumières, en leur procurant ce loiſir qui permet de ne vivre que pour les Sciences, avec cette liberté précieuſe qui donne des ailes à l'eſprit humain, & lui fait prendre ſes plus nobles eſſors.

*) Je ne ſaurois m'empêcher d'en citer ici une preuve que le haſard m'offre dans un des plus célébres poëmes italiens. Après avoir demandé où ſont, dans notre ſiècle, les Camille, les Déces, les Brutus, les Fabius, les Scipions, le poëte les retrouve dans le roi de Sardaigne alors régnant, & dans FREDERIC, roi de Pruſſe. L'éloge de ce dernier eſt d'autant plus remarquable qu'il fut écrit & publié, pendant la guerre de ſept ans, par M. Paſſeroni, prêtre à Milan, où il vit encore, & dans ce temps-là ſujet de l'impératrice Marie-Thérèſe. Voici la ſtance qui contient cet éloge:

Non mi lascia mentir l'illustre Prusso,
Il cui merito supera ogni lode:
Al Tedesco resiste, al Franco, al Russo,
Magnanimo Guerrier, costante, e prode:
L'ozio abborre, e detesta, abborre il lusso,
Solo nel faticar esulta, e gode;
E giunge di saper a eccelsa meta,
Legislator, Filosofo, e Poeta. IL CICERONE, Parte II, Canto XIII, St. 25.

Un autre Italien de la première nobleſſe de Veniſe, (Ascan. Molin) a publié ſucceſſivement en 1787-88-91, un poëme épique de quarante chants, compris en trois gros volumes, & intitulé FEDERICO IL GRANDE, *oſſia* LA SLESIA RISCATTATA.

Digitized by Google

Que dis-je? En mourant même il ne l'a point abandonnée, & ne l'a point laiſſée orpheline. Cette affection qu'il lui portoit, ne ſemble-t-il pas l'avoir transmiſe comme en héritage à ſes auguſtes ſucceſſeurs, tous deux élevés près de lui & ſous ſes auſpices, comme il leur a transmis ſon âme héroïque, grande & généreuſe. Auſſi l'un & l'autre, à peine montés ſur le trône, ont-ils confirmé ſon ouvrage, ratifié nos priviléges, & ſe ſont également déclarés nos protecteurs.

FRÉDERIC GUILLAUME II nous a comblés de faveurs, a pris le plus vif intérêt à notre conſervation & à nos ſuccès en tout genre, non ſeulement tandis qu'il réſidoit parmi nous, mais pendant ſon abſence même cauſée par des guerres. Du milieu des camps & des alarmes, il n'a jamais ceſſé de jeter un regard propice ſur ce domicile paiſible de Minerve & des Muſes.

Hélas! une fin prématurée nous l'a enlevé. Et qui de nous, Meſſieurs, quel *bon citoyen*, quel cœur honnête & ſenſible n'eût été profondément touché, en voyant ce prince ſi aimable & ſi chéri luttant contre une douloureuſe agonie, la ſoutenir avec réſignation juſque dans ſes derniers momens, & approcher de la mort avec le même courage avec lequel il la bravoit dans les combats? Et qui de nous n'eût mêlé ſes larmes & ſes regrets avec ceux de la Maiſon royale, avec ceux de tout un peuple, qui a perdu en lui un père plein de tendreſſe, un Titus, qui, dans la trop courte durée de ſon règne, a laiſſé par-tout des traces de ſon humanité bienfaiſante!

La conſolation qui nous reſte, conſolation bien douce, c'eſt de le voir revivre dans un fils qui ſuivra ſes pas, les pas de Fréderic, & ceux de ſes plus glorieux ancêtres. Mais ici je m'arrête. Pour faire l'éloge de FRÉDERIC GUILLAUME III, il ſuffira de dire qu'il n'aime pas les éloges. La main ferme dont il tiendra le ſceptre & conduira les rênes de l'Etat, ſon gouvernement politique, militaire, civil, ſon eſprit de juſtice & d'ordre, ſon activité, ſa vigilance, tout le cours de ſa vie & de ſon règne le montreront tel qu'il eſt à la génération préſente & aux générations futures.

Au lieu de louanges, je me borne donc à des vœux, ou plutôt à de fortunés préſages. Si le Ciel daîgne les remplir, la vie de FRÉDERIC GUILLAUME III ſe prolongera jusqu'aux derniers termes preſcrits à la vie humaine; le beau jour que nous promet l'aurore de ſon règne n'atteindra que fort tard ſon couchant: il jouira, pendant de longues années, du bonheur de faire celui de ſes ſujets fidèles. Le zèle de ſeconder ſes louables intentions, l'honneur, la probité, l'intégrité animeront ſes miniſtres, ſes conſeils, ſes armées, tous les ordres de l'État, & lui allégeront le poids de la couronne. L'Abondance, la Paix, la Félicité publique ſeront le fruit & la récompenſe de ſes travaux. Par ſes ſoins, & ceux de l'incomparable Princeſſe que le Ciel ſemble avoir formée exprès pour la lui aſſocier, il verra s'accroître, proſpérer & fleurir les rejetons de ſon auguſte famille; & ce ſpectacle enchanteur ramènera le calme dans le cœur affligé de ſa reſpectable & vertueuſe Mère, & y verſera un baume reſtaurant.

Enfin, le trône de notre Roi ſera environné de princes & de princeſſes qui en feront l'ornement & l'appui, mais ſurtout de fils, de frères, de parens, de jeunes héros dignes de la race dont ils deſcendent, diſtingués, ou qui ſe diſtingueront dans les arts de la guerre comme dans ceux de la paix, & prouveront, lorsqu'il le faudra, que le ſang de Brandebourg coule dans leurs veines, & que les aigles vaillans n'engendrent point la colombe timide.

Voilà, Meſſieurs, mes eſpérances & mes ſouhaits, que ſans doute vos cœurs répéteront. Puiſſe cette Académie être toujours l'heureux témoin de leur accompliſſement. Puiſſent les Sciences & les Lettres, qui germent & fructifient dans ſon ſein, prendre une vigueur nouvelle ſous ce nouveau règne, marcher de pair avec la monarchie Pruſſienne, & participer à ſa gloire!"

Monſieur *Achard* a lu la Relation de quelques expériences faites dans la vue de déterminer l'influence de la compreſſion de l'air ſur la germination des graines, & ſon action ſur la vie animale, avec la des-

cription d'une nouvelle méthode d'injecter les canaux des plantes ſuſceptibles de recevoir un fluide dans leur capacité interne.

M. l'abbé *Denina* a lu ſur les traces anciennes du caractère des Allemands, ſuivies d'un court parallèle entre Marc-Aurèle & Fréderic II.

M. *Klaproth* a lu ſur les mines d'or de Tranſylvanie & ſur le métal nouveau contenu dans ces mines (*Ueber das Siebenbürgiſche Golderz und das in ſelbigem enthaltene neue Metall*).

M. *Baſtide* a lu des recherches ſur le mot *Environ*.

M. *de Goyon* a lu la IIIme époque de ſon Tableau hiſtorique de l'influence des femmes ſur les grands événemens de leur ſiècle & de leur pays.

L'aſſemblée publique deſtinée à célébrer l'anniverſaire de la naiſſance de notre auguſte ſouverain, FRÉDERIC GUILLAUME III, a eu lieu le 9 août.

La ſéance a été ouverte par le discours ſuivant du ſecrétaire:

Meſſieurs,

„Comme nous célébrons aujourd'hui, pour la première fois, la naiſſance fortunée de FRÉDERIC GUILLAUME III, nous pouvons regarder ce jour en quelque façon comme notre jour d'hommage, nous y réunir, pleins d'alégreſſe, à toutes les provinces, à tous les peuples ſoumis au ſceptre de la Pruſſe, à tous les ordres de l'État, & payer, à leur exemple, ce juſte tribut au nouveau Souverain dont le règne glorieux va cimenter & accroître notre félicité commune.

Et, outre l'amour du bien public, des raiſons particulières doivent animer notre zèle dans la preſtation de cet hommage. Vous ſavez que non content de continuer aux Sciences, aux Lettres, à cette Académie qui les cultive, la protection éminente dont ſes auguſtes prédéceſſeurs les avoient favoriſées, il a, depuis ſon avènement au trône, répandu ſur elles des faveurs bien précieuſes, bien propres à leur donner une énergie nouvelle & une influence plus générale.

Nous ne saurions mieux lui témoigner notre reconnoissance, Messieurs, qu'en nous rendant, de plus en plus, dignes de ses bontés. Ainsi puissent nos efforts pour étendre la sphère des connoissances & les progrès de l'esprit humain dans tous les genres qu'il embrasse, répondre, par le plus heureux succès à la prospérité & à la gloire du règne sous lequel nous avons le bonheur de vivre! Et puisse la durée de ce règne, prolongée jusqu'aux derniers termes de la vie mortelle, nous faire encore, pendant de longues années, renouveler ici & ce même hommage & ces mêmes voeux!"

On trouvera dans le programme ci-après la déclaration de la Classe de Mathématique & de celle des Belles-Lettres pour les prix qu'elles proposent.

On y trouvera également la déclaration de la Classe de Physique relativement aux deux prix fondés par feu M. *Cothenius*.

Les lectures qui ont été faites dans cette assemblée sont les quatre suivantes.

1) M. *Achard* a fait le récit de quelques expériences faites dans la vue de déterminer l'influence de la différente couleur de la lumière sur la germination des graines, sur la couleur verte des plantes, & sur leur étiolement: ce qui conduit à fixer les rapports des affinités de la lumière différemment colorée, avec l'oxygène.

2) M. *Erman* a lu sur l'Ordre des successions dans la dynastie de la Prusse & de Brandebourg, de la maison de Hohenzollern.

3) M. *de Goyon* a présenté la IVme époque du Tableau historique de l'influence des femmes sur les grands événemens de leur pays & de leur siècle.

4) M. *de Boufflers* a fini la séance par la lecture d'un discours sur la Littérature.

PRIX

PRIX PROPOSÉS
par l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe pour l'Année 1799, 1800 & 1802.

L'Académie royale des Sciences & Belles-Lettres a tenu, le jeudi 9 août 1798, ſon aſſemblée publique, deſtinée à célébrer l'anniverſaire de la naiſſance du Roi.

Pour l'année 1797 la Claſſe de Phyſique avoit propoſé la queſtion ſuivante:

De quelle nature ſont les principes terreux qu'on trouve, à l'aide de l'analyſe chimique, dans les différentes ſortes de blé indigène? Ces principes entrent-ils dans les végétaux tels qu'on les y trouve? ou bien ſont-ils produits par la force vitale & l'action des organes du végétal?

„L'Académie ſouhaite que les Phyſiciens qui travailleront à réſoudre cet intéreſſant problème, fondent leurs recherches ſur des expériences préciſes, qui faſſent connoître avec certitude la nature des principes fixes du ſol dans lequel les plantes ont puiſé leur accroiſſement, & qui rendent à en faire une comparaiſon exacte avec les principes fixes du végétal."

Voici la déclaration ultérieure de la Claſſe de Phyſique au ſujet de ce prix:

L'Académie a reçu en réponſe à cette queſtion deux mémoires. L'auteur d'un de ces mémoires qui eſt au deſſous de toute critique, s'eſt nommé; & l'autre mémoire, qui porte pour deviſe *Ratione et experientia*, eſt bien éloigné de remplir le but de la Claſſe, l'auteur manquant entièrement des connoiſſances chimiques néceſſaires, & ayant enviſagé l'objet de la queſtion ſous un point de vue très-faux.

La Claſſe de Phyſique regardant cependant le problème propoſé comme très-intéreſſant, renouvelle le prix *en le doublant*, & fixe le terme le plus éloigné auquel les Phyſiciens qui voudront y concourir, doivent envoyer leurs mémoires, au 1 juin 1799; elle ſe flatte que par la prolongation de ce terme & ſa plus grande étendue, ceux qui voudront travailler ſur cette intéreſſante matière, pourront donner aux expériences néceſſaires le temps qu'elles exigent.

La Claſſe de Mathématique avoit propoſé pour 1798 la queſtion ſuivante:

Comme, malgré les travaux des plus habiles aſtronomes, il reſte encore pluſieurs points à éclaircir relativement à la variation de l'obliquité de l'Écliptique, l'Académie invite les ſavans à s'occuper de nouveau de cet objet, & couronnera le mémoire qui contiendra les recherches les plus intéreſſantes & les éclairciſſemens les plus importans ſur cette matière.

L'Académie n'a reçu qu'une ſeule pièce ſur cette queſtion. L'auteur de cette pièce, dont la deviſe eſt *Tamen usque recurret*, paroît bien inſtruit de la matière & très en état de l'approfondir; il a ſuivi en pluſieurs points les calculs qu'a donnés M. Schubert dans le Tome X des Nouveaux Mémoires de l'Académie de Pétersbourg, & a raſſemblé dans un court eſpace un grand nombre de réſultats intéreſſans; mais le peu de temps qu'il a eu ne lui ayant pas permis de donner une extenſion ſuffiſante aux détails qui lui ſont propres; & le but principal de l'Académie étant d'éclaircir, ſi cela eſt poſſible, les difficultés qui ſubſiſtent encore ſur cet objet, elle a pris le parti de propoſer de nouveau la queſtion pour l'année 1802 avec *un prix double*. Et pour répandre un plus grand jour ſur ſes intentions, elle invite les ſavans, & en particulier l'auteur de la pièce citée, à faire attention aux obſervations ſuivantes.

Pour ce qui regarde les *obſervations* de l'obliquité de l'Écliptique, les Aſtronomes paroiſſent différer encore beaucoup à cet égard. L'Académie déſire qu'on diſcute avec ſoin ces obſervations, & qu'on s'occupe en particulier de cette queſtion: juſqu'à quel point on peut faire

entrer en compte les obſervations anciennes avec quelque avantage, & jusqu'à quelle époque on doit remonter?

Pour ce qui regarde la *théorie*, un des élémens les plus importans étant la détermination de la maſſe des planètes perturbatrices, & ſurtout celle de Vénus, l'Académie déſire qu'on fonde cette détermination ſur des principes indépendans des obſervations de l'obliquité de l'Écliptique, afin d'éviter un cercle logique dans lequel on eſt tombé plus d'une fois; qu'on examine en particulier comment la détermination de la maſſe de Vénus peut ſe déduire de la conſidération du mouvement des nœuds, malgré les difficultés que préſente la mobilité de l'Écliptique; comment une maſſe de Vénus plus petite que celle qu'a trouvée M. de la Grange, peut ſe concilier avec le mouvement de l'apogée du ſoleil, tandis que le contraire paroît réſulter des formules de ce grand géomètre, & jusqu'à quel point les obſervations de M. Herſchel ſur les ſatellites d'Uranus *ſont ſuffiſantes* pour déterminer la maſſe de cette planète.

L'application de la ſolution générale du problème deviendroit plus utile ſi on ne négligeoit aucune planète, par la comparaiſon que l'on feroit des équations réſultantes avec celles que M. de la Grange a tirées de ſa ſolution. Et ici ſe préſenteroit la queſtion qu'il a miſe en avant: ſi, quelles que ſoient les maſſes des planètes, pourvu qu'elles ſoient réelles, les équations auront toujours des racines réelles & inégales?

Quant à la détermination des valeurs moyennes, des *maxima* & *minima*, des périodes des variations &c., ſi l'on trouve quelque méthode directe pour les déterminer, il ſeroit néceſſaire que l'auteur entrât dans un détail rigoureux, vu l'extrême complication des expreſſions analytiques; ſi on ne les détermine que par des tâtonnemens, il ſeroit néceſſaire que l'auteur prouvât du moins *a poſteriori*, que les réſultats trouvés ſont à l'abri de tout doute.

L'Académie eſt bien éloignée d'exiger qu'on ſatisfaſſe d'une manière pleine & complète à toutes ces queſtions; elle couronnera ſans héſiter la pièce qui contiendra des réſultats nouveaux & ſatisfaiſans ſur quelques points d'une matière auſſi difficile; elle n'a donné autant d'étendue

à la queſtion que pour ouvrir un champ plus vaſte aux recherches des Géomètres & des Aſtronomes.

La Claſſe de Philoſophie ſpéculative propoſe la queſtion ſuivante pour le prix de 1799:

„L'importante queſtion de l'*origine de nos connoiſſances*, agitée de „tout temps, a été diſcutée de nos jours plus vivement que jamais. „Elle eſt certainement d'un grand intérêt, & il ſeroit à ſouhaiter que „les preuves pour & contre fuſſent portées à un degré de perfection & „d'évidence qui pût mettre les philoſophes en état de prendre un parti „décidé ſur cet objet, ſans tomber dans un ſyncrétisme, qui en ſubſti„tuant l'indifférence à l'intérêt, demeureroit infructueux pour les pro„grès de la philoſophie. L'Académie n'entre point dans les idées de „ceux qui regardent comme démontré avec l'évidence mathématique, „qu'une partie de nos connoiſſances prend ſon origine uniquement dans „la nature même de notre entendement; elle eſt perſuadée, au con„traire, qu'on a fait contre cette opinion des objections eſſentielles, juſ„qu'à préſent demeurées ſans réponſes ſatisfaiſantes, tout comme elle „eſt perſuadée qu'il y a des preuves très-fortes en faveur de l'opinion „qui déduit toutes nos connoiſſances de l'expérience, quoique, peut„être, ces preuves n'ayent pas encore été miſes dans leur vrai jour. „L'Académie déſirant de contribuer autant qu'il eſt en elle, à la ſolu„tion du problème, propoſe pour le ſujet du prix que la Claſſe de Phi„loſophie doit adjuger en 1799:"

Démontrer d'une manière inconteſtable l'origine de toutes nos connoiſſances, ſoit en préſentant des argumens non employés encore, ſoit en préſentant des argumens déjà employés, mais en les préſentant avec une clarté nouvelle & une force victorieuſe de toute objection.

La Claſſe des Belles-Lettres propoſe pour l'année 1800 la queſtion ſuivante:

Sur les Goths & le Gothicisme.

1. Parmi les nations qui ont hâté la chute de l'Empire romain, les GOTHS ſe ſont-ils diſtingués des autres par des qualités qui leur

étoient propres, relatives soit à leur constitution, leurs lois, leurs mœurs & leurs usages, soit en particulier à la littérature & aux arts.

2. Les termes de *Gothique* & de *Gothicisme* ne sont-ils que des dénominations nées dans des temps postérieurs, pour désigner par là l'état où se trouvoient les sciences, les lettres & les arts depuis la décadence de l'Empire, & durant le moyen âge?

3. Et si cela est, dans quelle époque a-t-on commencé à se servir de ces termes dans cette acception plus générale?

Le défunt conseiller-privé Cothénius, membre de notre Académie, lui a fait un legs de 1000 écus, dont il veut que les intérêts soient destinés à des questions de prix qu'il charge la Classe de Physique de proposer tous les deux ans, sur des sujets relatifs à l'agriculture, à l'économie ou au jardinage. La dite classe se trouve actuellement à portée de proposer en même temps deux questions sur les matières indiquées par le testateur, & d'attacher au meilleur mémoire qu'elle recevra sur chaque objet un prix de 100 écus. Voici l'énoncé des deux questions qu'on propose, l'une & l'autre, pour l'année 1800.

1. Comme il est décidé que le carbone contenu dans l'engrais animal & végétal fournit aux plantes leur principal nutriment; la Classe de Physique demande quelles autres matières produiront le même effet sur la végétation, & en cas de manque des engrais ordinaires, pourroient y être substituées avec un avantage réel pour l'agriculture?

L'on souhaite que ceux qui travailleront à résoudre cet important problème, ne s'appuient pas uniquement sur des théories, mais qu'ils fondent surtout leurs argumens sur des résultats bien observés, tirés de la pratique.

2. L'on demande par quelle méthode & de quelle semence, telle que celle du lin, du pavot, du tournesol, ou toute autre que l'on peut se procurer dans ces contrées en abondance, par une culture aisée & praticable en grand, l'on peut tirer avec avantage une huile de la qualité de celle d'olive, & qui se conserve aussi long-temps sans altération? La qualité des huiles qu'on tire des semences par expression, dépend

ſans contredit tant de la nature de la ſemence même, que de la méthode & des manipulations particulières, au moyen desquelles on l'obtient; c'eſt ce qui fait déſirer à la Claſſe de Phyſique, que ceux qui travailleront à réſoudre cette intéreſſante queſtion portent leurs vues ſur ces deux objets, ſavoir la ſemence qui eſt de nature à fournir la meilleure huile, & la méthode la plus propre à l'obtenir.

On invite les ſavans de tout pays, excepté les membres ordinaires de l'Académie, à travailler ſur ces queſtions. Le prix, qui conſiſte en une médaille d'or du poids de cinquante ducats, de deux pour la queſtion des Claſſes de Phyſique & de Mathématique, & de cent écus pour chacun des deux prix extraordinaires, ſera donné à ceux, qui au jugement de l'Académie, auront le mieux réuſſi. Les pièces, écrites d'un caractère liſible, ſeront adreſſées, franches de port, *au Secrétaire perpétuel de l'Académie.*

Le terme pour les recevoir demeure fixé pour 1799 au 1 juin, comme le programme précédent l'indique; mais pour 1800, 1802, & en général pour l'avenir, il eſt fixé au 1 mai, après quoi on n'en recevra abſolument aucune, quelque raiſon de retardement qui puiſſe être alléguée en ſa faveur.

OUVRAGES IMPRIMÉS
OU MANUSCRITS, MACHINES, ET INVENTIONS, PRÉSENTÉS A L'ACADÉMIE PENDANT LE COURS DE L'ANNÉE 1798.

Le 11 janvier. M. *Fiſcher*, profeſſeur de mathématiques au Collége royal de Berlin, a envoyé à l'Académie 24 exemplaires de ſa Diſſertation *de diſciplinarum phyſicarum notionibus et finibus legitimis, et nexu ſyſtematico.*

Le 18 janvier. M. *Bernoulli* a lu le rapport de la Claſſe de Mathématique ſur la *Pinacothèque* de M. *Gruſon*.

— On a produit une lettre de M. *Becker*, ſénateur à Magdebourg, contenant un petit mémoire ſur la queſtion pour le prix de Phyſique prorogé jusqu'en 1799, avec cinq échantillons du produit de ſes expériences ſur ce ſujet.

Le 25 janvier. *Aſſemblée publique.*

Le 1 février. Le ſecrétaire perpétuel a lu quelques morceaux intéreſſans d'une lettre de M. *Schwab* de Stuttgardt.

Le 8 février. M. *Bode* a remis au nom de M. *de la Lande* le volume de la *Connoiſſance des temps* pour l'an 7 de la république (22 ſeptembre 1798 - 22 ſeptembre 1799) & a fait un rapport de ſon contenu.

— Le *même* a communiqué des nouveautés extraites de ſa correſpondance académique, & a indiqué l'orbite de la comète apparue l'an dernier, qu'il a deſſinée, & en a tiré les réſultats de ſon apparition & de ſa vraie courſe.

Le 15 février. M. *Bode* s'eſt chargé de faire inſérer dans les papiers publics un article pour raſſurer le peuple contre les frayeurs d'une prétendue comète.

— M. *Dorés*, chirurgien à Paris, à adreſſé une lettre à l'Académie, ſur la guériſon du cancer au viſage & au ſein, opérée par un ſimple topique. Cette lettre a été communiquée au Collége royal de Médecine & de Santé.

Le 22 février. On a annoncé un ordre du Roi, par lequel M. *Gruſon*, profeſſeur de mathématiques dans le corps des cadets nobles, eſt nommé membre ordinaire de l'Académie.

— M. *Bernoulli* a préſenté, de la part de M. *de Zach*, directeur de l'obſervatoire du duc de Gotha, un ouvrage intitulé: *Allgemeine geographiſche Ephemeriden von einer Geſellſchaft von Gelehrten. Januar 1798.*

Le 1 mars. M. *Gruſon*, profeſſeur au corps des cadets nobles a prononcé ſon discours de réception, & le ſecrétaire lui a répondu.

— M. *Bode* a lu un rapport raiſonné ſur une comète que M. *Dangos* a obſervée à Tarbes, le 18 janvier de cette année, paſſant devant le ſoleil, & ſur quatre nouveaux ſatellites d'Uranus, découverts par M. *Herſchel*.

Le 15 mars. On a remis une lettre de M. *Delonnes* de Paris, qui rend compte d'une opération du ſarcocèle faite par lui.

— M. *Bode* & M. *Trembley* ont lu quelques paſſages d'une lettre de M. *Albert Euler*, ſecrétaire perpétuel de l'Académie de St. Pétersbourg.

Le 19 avril. Le Roi a nommé Académiciens MM. les Conſeillers privés des finances *Suarez* & *Borgſtede*. Il a donné en même temps à l'Académie la Bibliothèque royale avec le Cabinet de curioſités, & a nommé membre de l'Académie M. *Bieſter*, premier bibliothécaire.

— On a lu une lettre de M. *de Chambrier*.

— M. le conſeiller *Mezler* de Sigmaringen, a envoyé une brochure ſur l'épizootie, en demandant le jugement de l'Académie.

Le 26 avril. M. *Bieſter* a lu ſon discours de réception. Le ſecrétaire lui a répondu.

— Les Claſſes de Phyſique & de Mathématique ont porté leur jugement ſur la machine à plonger de M. *Klingert*, mécanicien à Breslau.

Le 3 mai. M. *Borgſtede* a fait ſon diſcours de réception. Le ſecrétaire y a répondu.

Le 10 mai. M. *Selle* a préſenté un exemplaire du volume I. de l'*Hydraulique de M. Wibeking*.

Le 7 juin. M. *Bode* a préſenté, de la part de M. le comte *de Brühl*, miniſtre de Saxe à Londres, les cinq derniers volumes des *Transactions philoſophiques*, envoyés par la Société royale de Londres. *Item* les Obſervations aſtronomiques du D. *Maskelyne*, pour 1795 & 1796.

— On a préſenté *Gedanken über einige Gegenſtände die deutſche Sprache betreffend, von Renatus Carl, Freyherrn von Senckenberg*. (Conſidérations ſur quelques objets relatifs à la langue allemande.)

Le

Le 7 juin. M. *Bode* a fait un ſecond rapport du Traité de M. *Herſchel* ſur les quatre nouveaux ſatellites d'Uranus.

Le 14 juin. Le ſecrétaire a lu l'extrait d'une lettre de M. *Prevoſt* de Genève.

Le 28 juin. On a lu une lettre datée de Veniſe, du 13 juin, de Jacques comte *de Concina*, qui annonce un journal littéraire dont il eſt l'auteur.

Le 2 août. M. l'abbé *Denina* a préſenté un poëme de l'Académie *degli Unanimi* ſur les noces de *Luigi Giulio Maffoni* & de *Maria Tereſia Bruna*; Item *Eugenio, oſſia Torino libérata, di Paolo Luigo Rabi.*

— Le ſecrétaire a préſenté un Mémoire philoſophique & géométrique ſur la probabilité des témoignages, par MM. *Prevoſt* & *L'Huilier.*

Le 9 août. *Aſſemblée publique.*

Le 16 août. M. *Thiele*, paſteur à Rathſtock près de Cuſtrin, a préſenté à l'Académie un ouvrage poſthume de *Baumgarten*, intitulé *Gedanken über die Reden Jeſu, &c.*

— M. *de la Grange* a envoyé de Paris, le *Traité complet des maladies vénériennes ou ſyphilitiques, par F. Swediaur, D. M. à Paris 1798.*

Le 23 août. M. *de la Garde*, libraire à Berlin, a envoyé à l'Académie l'*Annuaire françois.*

Le 30 août. Le ſecrétaire a lu des morceaux d'une lettre de M. *Céſarotti*, ſecrétaire de l'Académie de Padoue.

— M. *Bode* a rendu compte de ſon voyage à Gotha, & de la conférence qui s'y eſt tenue entre pluſieurs aſtronomes & géomètres allemands & M. *de la Lande.*

— L'ouvrage intitulé *Pappenheimer Deduction ſeiner bereits herausgegebenen Apologie für die frühe Beerdigung der Juden* a été dédié à la Claſſe de Philoſophie de l'Académie.

Le 6 ſeptembre. Une nouvelle quadrature du cercle, par M. *Schüler* de Stettin, aumônier du régiment d'infanterie de Rüchel, a été envoyée à l'Académie, & remiſe à la Claſſe de Mathématique.

Le 6 ſeptembre. M. *Danzel*, profeſſeur à Hambourg, a annoncé dans une lettre à l'Académie, ſon moyen de direction des ballons aéroſtatiques, qu'il va faire paroître.

Le 13 ſeptembre. Le ſecrétaire a lu des morceaux d'une lettre de M. de *Chambrier*, de Turin, du 20 août, & a préſenté de ſa part le proſpectus des *Eſſais politiques, économiques & philoſophiques du comte de Rumford*, traduits de l'anglois.

Le 27 ſeptembre. L'auteur a fait préſenter l'ouvrage ſuivant à l'Académie: *Deſcription de quelques appareils chymiques nouveaux ou perfectionnés, de la fondation Teylerienne, & des expériences faites avec ces appareils, par Martinus van Marum. Harlem 1798.*

Le 11 octobre. M. *Trembley* a lu une lettre d'un jeune homme du pays de Vaud, M. *Favre* de Rolle, ſur les polypes, où cette matière eſt enrichie de nouvelles découvertes, ſurtout relativement à la guerre entre les polypes & les vers.

— Le ſecrétaire a produit l'ouvrage ſuivant, adreſſé à l'Académie: *Mémoire ſur un radeau dont les propriétés ſuppléent à l'inſuffiſance de tous les moyens employés à la guerre pour le paſſage des grands fleuves, par M. le comte de Foucault, major au ſervice de S. M. I. & R. A Prague 15 août 1797.*

— M. *Bode* a préſenté, au nom de M. le Dr *Schröter* à Lilienthal, le ſecond volume de ſes *Additions aux plus nouvelles découvertes aſtronomiques. Item* les *Obſervationes aſtronomicae* 1794-1799 de MM. *Trieſpecker* & *Bury* de Vienne. *Item* ſes propres *Annales aſtronomiques* pour 1801 & ſon *Journal de l'Obſervatoire* pour 1797.

Le 25 octobre. M. *Aug. Jér. le Blond* a envoyé de Paris à l'Académie ſes deux brochures 1) *Sur la fixation d'une meſure & d'un poids.* 2) *Sur le ſyſtème monétaire décimal.*

— M. l'abbé *Denina* a préſenté une quadrature du cercle, envoyée de Turin à l'Académie par *Carlo Stefano Ferrero, confeudatario di Graglia &c.*

Le 1 novembre. On a lu une lettre datée de Rouen, du 29 ſept. de M. *Louis E. Ponchet*, qui préſente à l'Académie ſa *Métrologie terreſtre, ou Tables de nouveaux poids, meſures & monnoies de France.*

— *Item* une lettre de M. *Danzel*, profeſſeur à Hambourg, qui envoie ſon proſpectus, avec 18 gravures, de trois machines aéroſtatiques, qui ſont autant de moyens de direction pour les ballons, & d'une machine hydraulique qui produit le même effet dans l'eau.

— Le ſecrétaire a lu quelques morceaux d'une lettre de M. *Garve* de Breslau, où il eſt queſtion de deux de ſes Ouvrages, l'un ſur la *Philoſophie de Kant*, l'autre ſur le *Caractère de Fréderic II.*

— M. *Bernoulli* a préſenté, de la part de l'auteur, *De Ellipſeos evoluta & aequidiſtantibus, earumque conſtructione. Scripſit Mauritius de Praſſe, Lipſiae.*

— M. le chevalier *de Monpas* a envoyé à l'Académie un poëme de ſa façon, intitulé *le Tombeau de l'Amitié.*

Le 15 novembre. M. *de la Grange* a envoyé à l'Académie ſon ouvrage *De la réſolution des équations numériques, à Paris an VI.*

Le 22 novembre. Les Claſſes de Phyſique & de Mathématique ont porté un jugement très-favorable ſur la machine à plonger de l'invention du mécanicien *Klingert* de Breslau, & lui ont décerné une récompenſe pour l'encourager à perfectionner ſon ouvrage.

Le 13 décembre. M. *Meierotto* a préſenté différentes antiques que M. le conſeiller *de Kalkreuth* a envoyées à l'Académie.

— M. *Bernoulli* a fait le rapport de l'ouvrage de M. le comte *de Foucault.*

— Le même a préſenté un petit ouvrage de M. *Möllinger*, horloger du Roi, concernant des plaintes ſur l'irrégularité des horloges, & les remèdes à y porter.

NOUVELLES AGRÉGATIONS D'ACADÉMICIENS.

M. *Gruſon*, profeſſeur au Corps des Cadets nobles, a été nommé le 22 février, par ordre du Roi, membre ordinaire de l'Académie, de la Claſſe de Mathématique.

Le 19 avril. Le Roi a nommé Académiciens MM. les conſeillers-privés des finances *Suarez* & *Borgſtède*. S. M. a nommé en même temps, membre ordinaire de l'Académie, M. le Dr *Bieſter*, premier bibliothécaire royal. Ils ont été agrégés à la Claſſe de Philoſophie.

DISCOURS DE RÉCEPTION
prononcé
par M. JEAN PHILIPPE GRUSON *).

Meſſieurs,

L'ardeur avec laquelle j'ai toujours dirigé mes travaux du côté des études mathématiques, & le deſir que j'ai d'étendre à cet égard mes lumières, me préſentent comme un des plus beaux jours de ma vie, celui qui m'introduit dans ce ſanctuaire, où je trouve à la place des *Euler*, des *Lambert*, des *Caſtillon*, des *la Grange*, des *Marggraf*, des *Pott*, des *Gleditſch* & de tant d'autres, où je trouve, dis-je, des hommes illuſtres, dont les talens, les efforts dirigés vers l'utilité publique & le perfectionnement des hautes ſciences, honorent cette Académie, & répandront les influences les plus heureuſes ſur l'avenir. Incapable de les égaler, je ſaurai du moins ſuivre la route qu'ils me feront connoître.

*) Le 1 Mars 1798.

De trop puiſſans motifs doivent enflammer mon zèle pour qu'il me ſoit poſſible de ne point conſacrer tout ce que j'aurai de moyens, à répondre à l'honneur qui m'eſt accordé. A l'aurore du gouvernement fortuné d'un Roi qui a ſurpaſſé de beaucoup les grandes eſpérances que ſe formoient les peuples ſoumis à ſon pouvoir, objet de ſa paternelle bienfaiſance, encouragé par les ſuffrages éminens de ceux qui ont jeté ſur moi un regard favorable, je dois, au moins, par des travaux ſoutenus, tâcher de me rendre digne d'être aſſocié à cette illuſtre aſſemblée.

L'état floriſſant où ſe trouve de nos jours cette partie des connoiſſances humaines que je me plais à cultiver, le degré de perfection auquel eſt parvenue l'analyſe, les progrès que doit aux découvertes mathématiques la ſcience militaire, l'évidence avec laquelle la vérité s'annonce & les triomphes qu'elle remporte ſur le préjugé, les encouragemens qui de la part d'un monarque auſſi éclairé que juſte, ne peuvent manquer à une Académie dont toutes les branches ont déjà porté tant de fruits; tout annonce, Meſſieurs, la récompenſe la plus ſatisfaiſante pour l'homme qui ſe voue aux travaux dont vous vous occupez.

Je ſuccède à un homme qui par ſes lumières & l'utilité dont il fut pour ſes concitoyens, mérita d'être votre collégue; mais j'ai beſoin, bien plus que lui, de votre indulgence.

Les ſucceſſeurs du célèbre *Euler*, le reſpectable *Käſtner*, l'immortel *la Grange* m'ont honoré de leur ſuffrage. Animé par leur correſpondance & encouragé dans les commencemens de ma carrière, c'eſt vous, Meſſieurs, qui acheverez cet ouvrage; & puiſſé-je, admirateur de vos lumières, de la profondeur de vos méditations, de la ſageſſe de vos vues, obtenir qu'un jour mes foibles ouvrages ſoient placés à côté des vôtres! Puiſſe cette Académie moiſſonner long-temps encore les lumières qu'avec tant d'empreſſement *Fréderic le grand* mit entre ſes mains! Puiſſent les ſciences élevées à leur perfection, porter au loin la vérité, enrichir l'imagination de l'homme, embellir tout ſon être, fertiliſer le ſol qui le nourrit, aſſujettir à ſon pouvoir les élémens créés

pour ſon exiſtence! & le Roi que nos coeurs béniſſent avec un ſi juſte enthouſiasme, animer & vivifier par ſon ſuffrage, toutes les forces qui dans cet aſyle reſpectable ſe réuniſſent pour le bien commun des générations humaines!

RÉPONSE
du Secrétaire perpétuel.

Monſieur,

L'Académie dans laquelle vous entrez aujourd'hui, vous reçoit d'autant plus volontiers dans ſon ſein, qu'elle connoît d'avance vos talens, vos mérites & vos travaux. Elle ſait que cette ſcience à qui vous avez conſacré vos études, vous l'enſeignez avec fruit dans un illuſtre corps militaire, & y avez formé d'excellens diſciples. Elle a donné aux ouvrages que vous avez voulu ſoumettre à ſon examen, une approbation à laquelle vous avez paru être ſenſible: & ces ouvrages ne ſe bornent pas à la haute géométrie; le dernier ſurtout, exécuté avec un ſoin laborieux *), a l'utilité commune pour objet, & vous donne droit à la reconnoiſſance publique.

La nouvelle carrière qui s'ouvre devant vous, & le vaſte champ qu'elle vous offre à parcourir, ſont bien propres, Monſieur, à ranimer toutes vos forces, à exciter toute la vigueur de votre eſprit, dans un âge où ces forces & cette vigueur ſont encore ſuſceptibles d'accroiſſemens, & dans ce lieu qui leur fournira tant de belles occaſions pour ſe déployer.

Vous ſavez, Monſieur, que notre ancienne Société Royale, auſſi bien que notre Académie préſente, fondées toutes deux par les deux Fréderics, ont poſſédé les premiers géomètres de ce ſiècle, & que ceux que nous poſſédons encore, marchent dignement ſur les traces de ces grands

*) La *Pinacothèque*, qui a paru chez le libraire *de la Garde* à Berlin.

hommes. Vous ferez d'heureux efforts pour marcher avec eux d'un pas égal, à quoi vous trouverez dans leur exemple, leur commerce, leurs conſeils & leur amitié de puiſſans encouragemens.

Mais ce qui doit vous encourager plus que toute autre choſe, c'eſt que vous êtes le premier Académicien nommé ſous ce nouveau règne, dont les commencemens nous montrent la perſpective d'un avenir ſi glorieux & ſi fortuné. Vous répondrez au choix dont vous honore un monarque ſage & éclairé; vous réaliſerez la bonne opinion qu'il a conçue de vous, & vous nous aiderez à mériter le ſoutien & la haute protection qu'il a daigné ſi gracieuſement nous promettre.

RÉPONSE

au discours de réception de M. Bieſter, le 26 avril 1798.

Monſieur,

Nous devions recevoir aujourd'hui les trois nouveaux confrères dont nous avons fait l'acquiſition ou la triple conquête. Mais des raiſons graves empêchent deux d'entr'eux de comparoître; & ce qui m'afflige, l'abſence de l'un *) eſt cauſée par ſa ſanté affoiblie, à laquelle je prie le ciel de reſtituer bientôt cette force & cette vigueur dont il ſait faire un ſi bel & ſi noble uſage.

Ils étoient deſtinés tous les trois pour notre Claſſe ſpéculative; mais vous êtes, Monſieur, le premier que nous avons le plaiſir d'y introduire. Si vous n'entrez point dans celle des Belles-lettres que vous auriez préférée, c'eſt en partie à cauſe de cette égalité de diſtribution que le Roi nous recommande de rétablir peu-à-pen dans nos quatre claſſes; mais en grande partie, permettez-moi de le dire, vous devez vous en prendre à vous-même.

*) M. Suarez, mort peu après.

Pourquoi êtes-vous auſſi bon philoſophe que littérateur? & pourquoi vos ouvrages littéraires mêmes qui ont fait le plus de fortune, portent-ils tous un caractère ſi philoſophique? Ce caractère, déjà empreint dans vos diverſes compoſitions ſur la littérature tant ancienne que moderne, ſe manifeſte encore particulièrement dans ces écrits périodiques dont vous continuez à enrichir & à éclairer votre patrie, écrits ſi univerſellement goûtés pour le fond des choſes auſſi bien que pour la forme élégante & les agrémens du ſtyle dont vous ſavez les revêtir.

Mais après tout, Monſieur, les deux carrières que vous courez avec le même ſuccès, vous demeureront ici également ouvertes. Nous ne ſommes pas ſi étroitement confinés chacun dans ſa ſphère, que les excurſions dans les ſphères voiſines nous ſoient interdites. Et comment pourroient-elles l'être à un homme tel que vous, qui paſſe ſa vie au milieu d'une ſuperbe & vaſte bibliothèque, entouré de tous les tréſors de la ſcience & de l'érudition?

Ici je touche à une circonſtance bien honorable pour notre Académie, & qui donne un nouveau prix à votre entrée dans ſon ſein. Cette même Bibliothèque vous nous l'apportez en donation de la part d'un monarque généreux, pour être réunie désormais à la nôtre, avec le Cabinet de curioſités qui y eſt annexé. Et c'eſt ce qui va former entre nous une ſeconde liaiſon, très-bien aſſortie & des plus intéreſſantes. Oui, Monſieur, nous nous promènerons avec vous dans ce temple des Muſes, où vous nous ſervirez de guide & d'interprète. Vous nous aiderez à puiſer dans cet ample magazin, dont vous connoiſſez ſi bien les différens dépôts & les raretés précieuſes. Quelle belle perſpective pour les ſciences & les lettres! &, pour y étendre & faciliter nos travaux & nos recherches, quel champ fertile en découvertes & en nouvelles vues de tout genre, qui accélèreront les progrès de l'esprit humain, & rehauſſeront la gloire de cette ſociété ſavante à laquelle nous nous félicitons de vous voir agrégé!

Ré-

RÉPONSE
au Discours de réception de M. Borgſtede *).

Monſieur!

Si vous ſemblez vous défier de vos talens & de vos lumières, vous voudrez bien que nous ne partagions pas cette défiance. Elle ne peut provenir que d'une modeſtie, compagne inſéparable du vrai mérite, qui relève encore le vôtre, & met dans un ſi beau jour la douceur & l'amabilité de votre caractère.

Votre vie active & laborieuſe, les ſervices importans que vous avez rendus & continuez de rendre à l'État dans une partie des plus eſſentielles à ſa bonne conſtitution, vos écrits ſur des matières que vous avez profondément méditées, & où reſpire la plus ſaine & la plus utile philoſophie, que de titres pour vous ouvrir l'entrée de notre Académie, & celle ſurtout de notre Claſſe philoſophique!

Qui pourra, mieux que vous, Monſieur, confondre les ennemis de la Philoſophie, qui ſe plaiſent à la décrier comme étant une ſcience creuſe & ſtérile, & habitant une région ſi ſéqueſtrée du commerce de la vie & du monde qu'il n'en peut émaner aucune utilité réelle? Il eſt malheureuſement trop vrai que bien des prétendus philoſophes paroiſſent juſtifier cette fauſſe opinion, en voulant s'élancer au-delà des bornes preſcrites à l'entendement humain, en ſe livrant à de vaines ſubtilités, & en s'égarant dans des labyrinthes obſcurs & tortueux.

Mais ſoyons juſtes. Les abus qu'on fait d'une ſcience ne doivent point déprécier la ſcience même. Car enfin, la Philoſophie contient le germe de toutes nos connoiſſances; elle ſeule remonte à leurs élémens & à leurs premiers principes, les circonſcrit chacune dans ſes limites, & en détermine les frontières. Par-là même elle engendre cette juſteſſe de jugement, ce calme de la raiſon, cet eſprit d'ordre, de méthode, de préciſion qui étend ſes bénignes influences de tous les

*) Le 3 mai 1798.

côtés & hors même de la ſphère proprement philoſophique: car elles coulent inſenſiblement par tous les étages de la ſociété, & contribuent peu-à-peu à éclairer le genre humain & à civiliſer les peuples; ainſi que le doux ſouffle du printemps fait végéter les plantes & les arbriſſeaux, ranime & vivifie toute la nature.

Qui pourroit d'ailleurs méconnoître l'influence, plus ou moins directe, de la Philoſophie ſur la Morale, qu'elle épure & affermit; ſur la Législation, ſur le Droit naturel, le Droit des gens, le Droit civil, ſur la Politique externe & interne, ſur la Finance, ſur la Police, en un mot, ſur toutes les branches du Gouvernement? Si dans tous ces différens genres la Pruſſe a le bonheur de poſſéder des hommes ſi ſupérieurs, je n'héſite point à l'attribuer aux études philoſophiques où ils ſe ſont appliqués dès leur jeuneſſe, & ſe ſont habitués dans un âge plus mûr à les appliquer à leur tour aux objets de leur vocation reſpective.

C'eſt de quoi, Monſieur, vous nous offrez la preuve la plus convaincante & dans la geſtion de vos emplois, & dans vos ouvrages ſi juſtement eſtimés ſur la Ferme des domaines & ſur la Topographie politique ou *Statiſtique*, ſi l'on me permet ce terme, de la Marche de Brandebourg, dont la ſuite eſt ſi fort deſirée. Et vous nous l'offrirez bientôt dans les productions académiques dont vous embellirez le recueil de nos Mémoires, puiſque vous y tracerez, comme vous venez de le promettre, le fil qui vous a conduit ſi heureuſement de la ſpéculation à la pratique, & le long duquel il ſera ſi aiſé de revenir en arrière, ou de la pratique à la ſpéculation.

Votre adjonction à notre département économique nous vous rendra redevables d'un autre avantage. Le ſage maniement & le bon état des finances n'eſt pas une choſe indifférente dans un corps tel que le nôtre. Auſſi l'amélioration aſſez conſidérable qui s'y eſt faite depuis une trentaine d'années, y a-t-elle produit d'heureux effets, ſoit en procurant aux hommes célébres appelés dans ſon ſein, cet honnête loiſir qui leur permet de vivre pour la ſcience, & de marcher droit vers le but où leur génie les entraîne; ſoit en fixant ou en augmen-

tant les ſommes annuelles, deſtinées à encourager & à faciliter les progrès de toute eſpèce, la ſolution de problèmes curieux & nouveaux, le fruit à tirer de nos correſpondances ſavantes, les obſervations & les expériences dans les trois règnes de la nature, l'acquiſition de livres rares & précieux, d'inſtrumens de phyſique & de mathématique, en un mot l'uſage de tous les moyens propres à agrandir le cercle de nos connoiſſances & à propager l'empire de la vérité.

Or quel homme pouvions-nous ſouhaiter dont les conſeils & les directions nous aidaſſent, autant que les vôtres, à multiplier ces reſſources, & à perfectionner cette partie économique? Ainſi nous avons, Monſieur, un double ſujet de nous réjouir de votre aſſociation avec nous. Et vous aurez un double droit à notre reconnoiſſance, comme intelligent & zélé promoteur & du bien ſpirituel & du bien temporel de l'Académie.

ÉLOGE
DE
MONSIEUR MICHELSEN *).

1. SA VIE.

Jean André Chrétien Michelſen naquit le *6* juin 1749, à Quedlinbourg, où ſon père Detlof Michelſen occupoit un petit emploi, qui ne lui fourniſſant qu'un revenu médiocre, ne lui permettoit pas de grandes dépenſes pour l'éducation de ſes enfans. Cela ne l'empêcha pourtant point d'envoyer de bonne heure ſon fils à l'école ou au gymnaſe de la dite ville, à la tête duquel ſe trouvoit heureuſement un ſavant homme, M. Rambach, aujourd'hui premier paſteur à Hambourg, dont M. Michelſen ſe ſouvenoit toute ſa vie avec reconnoiſſance.

Ses talens ne tardèrent pas à ſe développer très-avantageuſement: c'eſt ce qui le détermina à ſe vouer à la vie ſtudieuſe, & principalement aux fonctions de la vie ſcolaſtique, laquelle convenoit également à ſa ſituation. Déjà dans ſa quatorzième année, écolier encore lui-même, il en forma d'autres par des leçons privées, & avec un ſuccès qui de-

*) Tout cet éloge eſt tiré, ou presque traduit en l'abrégeant, d'un beau programme de notre confrère M. Gedike, Directeur des colléges combinés de Berlin & de Cologne, (noms qui déſignent deux quartiers particuliers de la grande ville de Berlin). Deux autres collégues & amis de M. Michelſen, les profeſſeurs Spalding & Fiſcher, y ont joint des obſervations & des réflexions très-intéreſſantes.

voit naturellement l'affermir dans ſa réſolution, & qui en même temps lui fourniſſoit de quoi ſe procurer les livres dont il avoit le plus de beſoin.

Agé de vingt ans, il ſe rendit à l'univerſité de Halle, où pendant trois années & demi il s'appliqua aux études avec un zèle extraordinaire. Il y aſſiſta d'abord aux leçons de théologie; mais les ſciences mathématiques eurent toujours pour lui l'attrait le plus puiſſant: il les enſeigna dans les premières claſſes des Orphelins de Halle, où il eut la ſatisfaction de former de bons géomètres, ſurtout M. Fiſcher, qui lui a ſuccédé à Berlin dans ſa chaire de profeſſeur; & le ſeul nom d'un tel diſciple lui fait un honneur infini.

Ces leçons lui aidèrent encore à ſubvenir aux plus preſſantes néceſſités de la vie, pour quel uſage il n'avoit rien ou du moins très-peu à eſpérer de ſes parens, & de ſa famille, vu les circonſtances étroites de leur *fortune temporelle*.

La réputation qu'il s'étoit acquiſe à Halle lui valut des recommandations qui le firent paſſer de là à Brandebourg, chez M. de Béville, alors lieutenant-colonel, aujourd'hui lieutenant-général dans l'armée du Roi, & gouverneur de la principauté de Neuchâtel, où il réſide depuis quelque temps. M. Michelſen entra dans ſa maiſon comme inſtituteur de ſes fils, dont il ſoigna l'éducation durant ſix années conſécutives, de manière à s'attirer l'eſtime la plus diſtinguée de toute cette illuſtre famille, & l'eſtime générale de tous ceux qui apprirent à le connoître.

C'eſt là encore qu'il ſe fraya la route à cet établiſſement ſolide & durable dont il a joui juſqu'à la fin de ſes jours. Car c'eſt là-même qu'en 1775 il fit la connoiſſance de notre célébre géographe Buſching, qui dirigeoit déjà dans ce temps les deux colléges réunis, celui de Berlin ou du Cloître, & celui de Cologne. Témoin des talens ſupérieurs de M. Michelſen pour l'enſeignement des Mathématiques & de la Phyſique, il en remporta avec lui, à ſon départ de Brandebourg, la plus haute idée. De ſorte qu'en 1778, lorſqu'il vint à vaquer, dans les dits col-

léges, une des places mathématiques, il crut ne pouvoir mieux faire que de proposer pour elle M. Michelsen, qui fut aussitôt agréé par les patrons de cet Institut, en qualité de quatrième professeur, sans s'y être attendu le moins de monde. Il commença à en exercer les fonctions le 4 décembre de la même année, après avoir obtenu, de la faculté philosophique de Halle, le diplôme de maître-ès-arts par une belle dissertation latine sur la *Méthode Socratique*.

Dans le cours de dix-neuf années il s'éleva successivement jusqu'au grade de premier professeur, & à celui qui suit immédiatement le Rectorat, & porte le nom de *Prorectorat*. Ses affaires domestiques furent fort améliorées, tant par cet avancement, que par la part très-juste qu'il retira de l'augmentation des revenus de ce collége, occasionée par l'héritage qui lui fut laissé par un de ses anciens nourrissons, M. Streit, riche négociant mort à Venise, lequel en reconnoissance des instructions qu'il y avoit reçues, l'avoit doté d'un legs très-considérable, mais dont, à cause d'obstacles survenus, les intérêts ne purent être perçus & répartis suivant leur destination, qu'en 1793. Ce fut aussi cette même année que M. Michelsen entra dans notre Académie. Enfin, en 1796, il fut nommé par un sage ministre qui sait apprécier le vrai mérite *), un des directeurs de la Caisse des veuves, à qui il rendit les services les plus essentiels durant le court espace qu'il lui restoit encore à vivre.

Il en rendit de semblables aux colléges dans lesquels il professoit. Il s'y chargea de plein gré, & par simple prédilection, des calculs économiques & de ceux qui regardoient également la caisse des veuves de cette maison, de ses nouveaux édifices, de la surveillance de la communauté, avec celle de la table des élèves qui y sont logés & nourris gratuitement. Il prit encore sur lui l'administration générale dans l'absence de M. Gedike, qui voyageoit alors en Suisse & en Italie, mais dans l'exercice de laquelle la mort vint bientôt l'interrompre; ce qui engagea M. Gedike à hâter son retour.

*) S. E. M. le comte de Schulenbourg.

On convient généralement qu'il rempliſſoit avec la plus grande exactitude, & les devoirs de ſa place, & ceux qu'il s'étoit volontairement impoſés. Il ſavoit ſe faire, tout à la fois, reſpecter & aimer de ſes disciples; les initier dans les principes de la géométrie en ſe rabaiſſant à leur portée, mais en les ramenant de là vers la méthode ſtricte & rigoureuſe que les Mathématiques exigent: il poſſédoit l'art de les mettre ſur la voie d'en découvrir, comme il le leur ſembloit, d'eux-mêmes les vérités, en leur fourniſſant inſenſiblement les données néceſſaires pour les y conduire; ce qui eſt le moyen le plus ſûr d'enflammer l'amour de la ſcience: auſſi a-t-il formé dans la ſienne d'excellens ſujets, dont il eſt encore ſincèrement regretté.

Son caractère honnête, intègre & doux lui attira l'eſtime & l'amitié de tous ceux qui le connurent, & ſurtout de ſes collégues. Les trois principaux d'entr'eux ont conſacré ſa mémoire dans l'écrit dont je prends les matériaux de cet éloge, *& il ne ſe peut de monument qui faſſe plus* d'honneur & à M. Michelſen & à eux-mêmes: on ne ſauroit le lire ſans ſe pénétrer des ſentimens qui le leur ont dicté.

Il ne fut pas moins bon époux que bon père. De ſon premier mariage, contracté en 1779, qui ne ſubſiſta que trois années, il n'eut point d'enfans; mais il lui reſta de la perte de ſon épouſe un chagrin qui contribua beaucoup à miner ſon tempérament déjà aſſez foible, & qui depuis ſa première jeuneſſe avoit à lutter contre une toux continuelle. Cependant cette perte fut amplement réparée en 1783, par de ſecondes noces avec une perſonne de beaucoup de mérite, qui lui donna quatre enfans dont l'éducation faiſoit ſes plus chères délices, qui ſoulagea ſa ſanté chancelante avec l'affection la plus tendre, & le rendoit auſſi heureux que cette ſanté délabrée lui permettoit de l'être.

Il ſouffroit déjà beaucoup; ſa toux, qui alloit en croiſſant, fut accompagnée d'émiſſions ſanguines & d'accès fiévreux. Par des ſaignées fréquentes, réitérées jusqu'à quatre fois dans l'espace d'un an, la fièvre ceſſa, il eſt vrai; mais, d'un autre côté, la toux, ſuivie de crachemens

purulens, ne le quitta plus. Trop d'application & des insomnies énervèrent ses forces corporelles, & lui causèrent une hypocondrie qui l'obligea, à deux reprises, d'abandonner, durant six mois, toutes ses occupations, pour reprendre ses forces en respirant la pureté de l'air champêtre. Il y réussit au-delà de toute attente; de sorte que dans les trois dernières années de sa vie il se porta mieux, & pouvoit, après avoir essuyé dans la matinée sa toux habituelle, se livrer tout le reste du jour à son penchant pour le travail & l'activité. Mais vers le même temps une chute malheureuse lui cassa un pied, & l'obligea à garder la chambre & le lit plusieurs mois de suite. Il supporta ce mal avec une patience exemplaire, & ne se dispensa pas même de continuer ses leçons à la jeunesse rassemblée autour de sa couche de malade.

Après sa guérison de ce mal, sa santé ne fut plus guère troublée, sa toux même avoit considérablement diminué. Mais le 14 juillet une inflammation violente des poumons le fit retomber; & malgré les bons offices des médecins, son état s'empira visiblement, la partie enflammée des poumons se putréfia, & le sac où le pus s'étoit amassé, ayant crevé au bout de quinze jours, il s'ensuivit des éruptions très-fortes & sans intervalle, qui jointes à une fièvre continue & à des suffocations de poitrine, achevèrent de l'épuiser. Malgré cela, il conserva sa présence d'esprit & l'espérance même de se rétablir jusqu'à sa dernière heure, qui arriva le 8 août 1797.

Le 11 il fut enterré. Tous ses collégues, tous les étudians du gymnase, & un cortége nombreux assistèrent à son convoi funèbre, après avoir entendu une harangue touchante de M. Spalding, qui de plus célébra la mémoire de son ami par une élégie latine.

---

2. SES

2. SES OUVRAGES.

M. Michelsen commença ses travaux scientifiques par des ouvrages propres à l'instruction de la jeunesse dans les mathématiques, qui sont en assez grand nombre, & par d'autres ouvrages d'une utilité plus commune; & déjà en 1780 on eut de lui ses *Principes des Mathématiques pures.*

Il inclinoit particulièrement pour la méthode Socratique, sur laquelle nous l'avons vu plus haut adresser sa première dissertation à l'Université de Halle. En 1781, il débuta par un *Essai en dialogues sur les objets les plus importans de la géométrie plane,* dont il parut deux continuations dans les années suivantes, & qui s'accrut jusqu'au nombre de trois volumes. En 1784-1786, il dialogua dans le même goût sur les principaux points de l'Arithmétique. Ce livre est connu aussi sous le titre d'*Introduction à l'Arithmétique pratique.*

Dans la même année 1786, il publia à part la *Solution, à la portée de tout le monde, de différens problèmes des plus importans de la haute Arithmétique pratique;* item, *Lettres sur les premiers principes de la Logistique & de l'Algèbre, première partie;* & l'année suivante, l'*Économe & le négociant parfait,* qui consiste en une collection de tables relatives à l'Économie, à la consommation du bois, à la monnoie, aux poids, aux mesures &c. Il ne faisoit pas lui-même grand cas de ce livre, dont le projet lui avoit été suggéré par son libraire. Les tables y jointes ne sont pas toutes de lui; celles qui regardent les monnoies, appartiennent à M. Fischer, qui ne les avoit pas même destinées pour le public, mais simplement pour les classes arithmétiques du collége. Mais dans son ouvrage de l'année précédente il avoit bien mieux traité ce même sujet, montrant la manière d'appliquer le calcul à des sujets d'Économie, de Jurisprudence & de Politique. L'article de l'Encyclopédie de Krunitz sur la règle composée de trois ou de proportion *) y a été aussi inséré par M. Michelsen.

*) *Regula de tri composita*, en allemand *Kettenrechnung.*

En 1791, il donna ſa *Théorie*, qu'il nomme complète, *des Équations*, qui cependant n'eſt que la traduction de quelques mémoires de MM. Euler & Lagrange, & ſe vend auſſi ſous le titre de troiſième partie de l'introduction Eulérienne. Mais en quoi il a ſurtout bien mérité de la haute Géométrie, c'eſt en traduiſant cette *Introduction de M. Euler à l'analyſe des Infinis*, & celle *au calcul différentiel* du même; ce qui compoſe en tout ſix volumes, enrichis des additions & des obſervations de M. Michelſen (1788—93). On a outre cela de lui, *Méthode d'apprendre la Géométrie par ſoi-même*, 1er Vol. 1790.

Quelques-uns de ſes écrits tendent à une fin plus grande ou plus ſublime. Telles ſont ſes *Penſées ſur l'état préſent des Mathématiques & ſur les moyens d'en avancer les progrès*, & ſon *Euclide* retravaillé dans le même but & pour le même uſage. Tout cela tenoit à une idée très-originale, que M. Fiſcher développe dans le Programme ci-deſſus mentionné, en partie d'après les écrits de M. Michelſen, en partie d'après des converſations eues là-deſſus avec lui, mais que la mort empêcha ce dernier de réaliſer, comme c'étoit ſon intention.

Cette méthode idéale devoit réſoudre la ſcience mathématique, & toutes ſes parties, dans leurs notions primitives & élémentaires les plus ſimples, dont on les recompoſeroit enſuite ſelon les lois de combinaiſon les plus rigides & les plus infaillibles. Mais ce plan, auquel on ne refuſera pas du moins le nom d'ingénieux, & que l'on conçoit être applicable aux Mathématiques, M. Michelſen paroît avoir été tenté de l'étendre plus loin, jusque dans la Philoſophie, à quoi en effet il touche déjà de fort près; ou plutôt, comme Leibnitz, à toutes les connoiſſances humaines, pour leſquelles ce grand homme avoit projeté une caractériſtique ou une langue univerſelle, qui exprimeroit, par des ſignes viſibles, les premiers élémens de nos perceptions, de nos idées, en un mot de tout ce que nous pouvons connoître; comme dans l'Algèbre & dans l'Analyſe on les exprime par des lettres de l'alphabet ou par des ſignes numériques. Ce projet, s'il pouvoit être rempli, ne laiſſeroit aſſurément rien à déſirer.

Ce qui dans les dernières périodes de sa vie l'intéressoit le plus, & vers où il dirigeoit toutes ses méditations, ce fut la Théorie des Caisses mortuaires, & en particulier de la Caisse des veuves qu'il dirigeoit. Il eut, à cette occasion, à combattre une prédiction qui heureusement ne s'est point accomplie, mais soutenue, avec quelque apparence, par de très-habiles gens, où cette caisse fut menacée d'une banqueroute prochaine, & dont on fixoit le terme à quelques années au-delà. Comme toute cette question dépend du calcul des probabilités, M. Michelsen chercha non-seulement à bien fonder la théorie de ce calcul, mais surtout à la fortifier par l'expérience, en l'appliquant à la caisse dont nous venons de parler. Pour cet effet, il se fraya une route nouvelle; il rassembla, avec un soin extrême, les divers états par où cette caisse avoit passé depuis plus d'une vingtaine d'années, en les confrontant avec les résultats théoriques du calcul des probables. C'est en conséquence de cette confrontation qu'il tâcha & de corriger la dite théorie, & de proposer des arrangemens propres à assurer la subsistance de ce bel établissement, & peut-être de légères modifications, mais propres à le mettre hors de tout danger de faillite. Il a lu à l'Académie quelques Mémoires sur cet intéressant sujet, & de plus a publié séparément, en 1793, la *Preuve que cette caisse ne viendra pas, comme on l'affirme, à manquer dans trois ans;* & en 1796, *Sur les dispositions les plus convenables pour subvenir aux veuves, Section première,* mais où il en est resté; & c'est bien dommage que la mort l'ait empêché d'y aller plus loin.

Le seul ouvrage de M. Michelsen qui n'appartienne pas à la Géométrie, c'est l'*Art poétique* d'Horace, traduit, commenté, & en indiquant la liaison de ses parties, représenté comme un tout parfait, imprimé à Halle en 1784. Mais cet ouvrage n'a pas fait fortune: on y remarque trop que l'auteur n'est pas dans son élément, & qu'il est sorti de sa sphère.

Il fut élu Académicien le 29, & prononça son discours de réception le 31 janvier 1793.

Le 18 avril de cette année, il y lut un mémoire *Sur l'uſage du calcul dans la Philoſophie & dans les autres ſciences;* le 31 octobre, *Sur la banqueroute pronoſtiquée par M. Kritter de Göttingue à notre caiſſe des veuves, au bout de 8 à 10 ans,* & le 9 janvier 1794 la *Suite* de ce mémoire.

Le 4 octobre il expoſa une *Nouvelle manière de noter des ſéries, pour faciliter & abréger leur algorithme.*

Le 26 mai 1796, il revint aux caiſſes mortuaires; ſujet qui lui tenoit ſi fort au coeur, & qui lui dicta encore un ſecond mémoire lu le 17 novembre, *Comparaiſon des expériences faites juſqu'ici relativement à la caiſſe des veuves avec les réſultats théoriques du calcul.*

Le 31 mars & le 11 mai 1797, il fit ſa dernière lecture, *Sur la théorie des objets mathématiques qui tiennent à la vie civile.* Ces deux pièces, dont la ſeconde eſt une continuation de la première, ſont inſérées dans le Volume allemand des Mémoires de l'Académie pour 1792—1797.

C'eſt ici l'énumération complète de ſes travaux académiques, & de tous ſes autres travaux.

MÉ-

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE

DES

SCIENCES

ET

BELLES-LETTRES.

CLASSE

DE PHILOSOPHIE EXPÉRIMENTALE.

Digitized by Google

SUR
quelques vitrifications antiques.

PAR M. KLAPROTH *).

Traduit de l'allemand.

SECTION PREMIÈRE.

L'invention du verre, ſi éminemment importante à tant de titres, eſt du petit nombre de celles, dont l'antiquité nous a conſervé quelques notices. Pline la rapporte ainſi dans le paſſage ſuivant, tiré du Livre XXXVI. Chap. 65. *Fama eſt, appulſa nave mercatorum nitri, cum ſparſi per littus epulas pararent nec eſſet cortinis attollendis lapidum occaſio, glebas nitri e nave ſubdidiſſe. Quibus accenſis permixta arena littoris, translucentes novi liquoris fluxiſſe rivos; et hanc fuiſſe occaſionem vitri.* Quand cette relation ne ſeroit eſſentiellement qu'une tradition dénuée de preuves hiſtoriques, il eſt ſûr au moins qu'elle n'offre aucun caractère intrinſèque ſuffiſant, pour la faire révoquer en doute; & ce qui au contraire ſemble lui donner de l'authenticité, c'eſt qu'il eſt difficile d'imaginer, que le verre ait été trouvé autrement, que par l'effet d'un haſard heureux.

Je n'ignore pas, que quelques antiquaires à l'exemple de Mr de Paw, préfèrent d'attribuer l'invention du verre aux Égyptiens, qui dans les temps les plus reculés bâtirent à ce qu'on prétend, la première verrerie

*) Lu le 4. octobre 1798.

à Diospolis capitale de Thébes; mais quoi qu'il en ſoit de cette opinion, les écrits des anciens atteſtent que l'art de la verrerie avoit été porté chez les Phéniciens à un point de perfection diſtingué; & il paroît que cette nation étoit dans l'antiquité en poſſeſſion presqu' excluſive de cette fabrication. Sidon, cette colonie phénicienne, qui par le commerce, les arts & les manufactures s'éleva à un ſi haut degré de ſplendeur, ajouta à ſes autres reliefs des verreries fameuſes. Durant pluſieurs ſiècles ces verreries tirèrent ſelon Pline, la matière principale de leur fabrication des bords de la mer proche la ville de Phénicie, dite anciennement Acco, depuis Ptolemaïs, & aujourd'hui St Jean d'Acre, à l'endroit où le petit fleuve Belus tombe dans la mer.

Quant à la nature de la ſubſtance employée par les anciens pour opérer la vitrification du ſable, les écrivains de ces temps la déſignent ſous le nom de *Nitrum.* Il y a long-temps, que l'on eſt convenu unanimement, que cette dénomination ne déſigne pas notre nitre ou ſalpètre, Kali nitricum, Nitrate de Kali; mais bien le Natron, ou la Soude. Leurs *Nitraria* n'étoient donc point des ſalpétrières mais des atteliers à raffiner la ſoude. Il paroît néanmoins réſulter de pluſieurs propriétés que Pline attribue au Nitrum des anciens, & des deſcriptions qu'il fait de cette ſubſtance elle-même, qu'à cette époque on déſignoit indiſtinctement par le nom collectif de Nitrum tous les ſels, qui ſans être du ſel de cuiſine, paroiſſoient ſous forme d'efflorescence ſur le ſol, ou ſur le fond des lacs dépéchés. Il n'y a pas de doute que dans cet état de nomenclature, ils n'ayent auſſi compris quelquefois ſous cette dénomination notre ſalpètre & notre ſulfate de natron, quand la nature le leur offroit tout formé. Mais cette confuſion ne pouvoit pas avoir une influence fâcheuſe ſur la fabrication de leurs verres, parce que les anciens expoſoient les frites qu'ils vouloient vitrifier à un feu ſi long & ſi ſoutenu, qu'il étoit plus que ſuffiſant pour décompoſer les ſels neutres en queſtion, & en volatiliſer les acides.

L'art de colorer le verre ne paroît pas d'une invention très-poſtérieure à l'invention du verre lui-même. Il y a pluſieurs paſſages

des anciens qui prouvent cette aſſertion, démontrée d'ailleurs par les grains de verre diverſement colorés, dont les momies Égyptiennes ſe ſont trouvées ornées. Or cette coloration du verre ſuppoſe des notions chimiques ſur la nature des chaux métalliques, ſeuls agens propres à porter des couleurs dans les ſubſtances vitrifiées; mais c'eſt un problème difficile à réſoudre, que de déterminer les agens & les procédés qu'ils emploient pour la préparation des chaux métalliques, attendu qu'ils ne connoiſſoient pas les acides minéraux, que nous appliquons aujourd'hui presqu'excluſivement à ces préparations métalliques. Quoi qu'il en ſoit de cette difficulté, il eſt ſûr toujours, que dans des temps poſtérieurs les Grecs & les Romains avoient atteint un haut degré de perfection dans l'art de produire des vitrifications colorées, puisque nous voyons qu'ils imitoient les pierres précieuſes les plus hautes en couleur, au point de tromper l'oeil du connoiſſeur. Entre pluſieurs autres preuves je ne citerai que le paſſage de Pline, où il parle des hapelourdes, qui imitoient l'escarboucle (carbunculus), celle de toutes les pierres fines dont les anciens faiſoient le plus de cas. *Adulterantur vitro ſimillime: ſed cote deprehenduntur, ſicut aliae gemmae factitiae* *).

C'eſt ſous le règne d'Auguſte, que les architectes commencèrent à joindre les émaux colorés aux fragmens de marbre & d'autres pierres de couleur, dont ils ſe ſervoient pour l'exécution de leurs moſaïques. On voyoit un pareil emploi du verre coloré dans la villa, que Tibère fit bâtir à Caprée; les échantillons de cette moſaïque que l'on a récemment retirés de deſſous ces ruines, le prouvent ſuffiſamment. Ayant trouvé moyen de me procurer quelques-uns de ces fragmens, je les ai ſoumis à un examen chimique, pour déterminer ſurtout, quelles étoient les ſubſtances métalliques, que les anciens employoient pour colorer diverſement leurs verres.

*) *Plin.* Libr. 37. C. 26.

I. Verre rouge antique.

La couleur de cette vitrification eſt un rouge de cuivre d'une teinte vive. La maſſe eſt abſolument opaque, & la caſſure fraîche eſt très-brillante. C'eſt probablement la même eſpèce de verre dont Pline dit: *et totum rubens vitrum, atque non translucens, Haematinon adpellatum* *).

a) 200 grains de ce verre rouge furent broyés en poudre très-fine, & chauffés au rouge avec 400 grains de kali cauſtique, durant une demi-heure, ce qui amena bientôt le tout en fonte très-liquide. Après le refroidiſſement la maſſe fut détrempée d'eau, traitée avec l'acide muriatique jusqu'à ſurſaturation, le mélange fut inſpiſſé jusqu'à conſiſtance de maſſe ſaline, puis rediſſous par beaucoup d'eau bouillante, à laquelle on avoit ajouté un peu d'acide muriatique. La terre ſiliceuſe ſe ſépara; raſſemblée, édulcorée & rougie, elle peſoit 142 grains.

b) La ſolution filtrée préſentoit une couleur verdâtre, on la concentra par l'évaporation, il ſe forma des criſtaux en aiguilles déliées. Quand l'évaporation ultérieurement continuée ceſſa de donner des criſtaux, le réſidu de la ſolution fut étendu d'esprit de vin, & porté ſur le filtre. Les criſtaux raſſemblés, lavés avec l'alcohol, & ſéchés par l'action de la chaleur, peſoient $32\frac{1}{2}$ grains. C'étoit du muriate de plomb. $32\frac{1}{2}$ grains de ce ſel ſont égaux à 28 grains d'oxide de plomb médiocrement rougi.

c) La ſolution dont on venoit de dégager le plomb, fut enſuite ſurſaturée d'ammoniaque. Elle prit alors une couleur bleue foncée, & dépoſa un ſédiment gris. Le ſédiment ayant été recueilli, la liqueur fut de nouveau neutraliſée par l'acide muriatique, & concentrée par l'évaporation; puis on y ajouta de l'oxalate de Kali, tant que celui-ci y produiſit un nuage. Le précipité réſultant de cette addition étoit de l'oxalate de chaux. Ce ſel étant fortement calciné produiſit 3 grains de chaux pure.

*) Lib. 36. C. 67.

d) Un barreau de fer poli opéra enſuite la précipitation du cuivre; le précipité métallique de cuivre peſoit 13 grains, ce qui correſpond à 15 grains d'oxide de cuivre.

e) Le précipité gris obtenu par l'ammoniaque (*c*) fut porté dans une ſolution de ſoude cauſtique, & mis en digeſtion. La liqueur ayant été filtrée & ſurſaturée d'acide muriatique, le carbonate de ſoude en précipita l'alumine, qui lavée & calcinée peſoit 5 grains.

f) Le réſidu que l'alcali cauſtique n'avoit point diſſous, avoit une couleur brune tirant ſur le noir. Lavé & calciné il peſoit 2 grains. C'étoit de l'oxide de fer.

Conſéquemment à cette analyſe les proportions des principes conſtituans des deux-cents grains de verre rouge antique étoient:

Silice (*a*) - - -	142	grains.
Oxide de plomb (*b*)	28	—
Oxide de cuivre (*d*) -	15	—
Oxide de fer (*f*) - -	2	—
Alumine (*e*) - - -	5	—
Chaux (*c*) - - -	3	—
	195	grains.

En rapprochant cette pâte vitrifiée de certaines ſcories cuivreuſes d'un brun-rouge très-vif, qui ſe produiſent ſouvent dans la fonte des mines de cuivre, on peut former la conjecture très-motivée, que les anciens ne formoient pas peut-être cet émail de toutes pièces, mais qu'ils tiroient parmi les ſcories cuivreuſes celles qui leur convenoient le mieux par l'intenſité de la couleur; après quoi ils n'avoient qu'à refondre ces ſcories, & les couler en plaques.

II. Verre antique de couleur verte.

La couleur en eſt d'un vert de gris-clair, la maſſe eſt pareillement opaque & d'une caſſure brillante & ſcorieuſe.

200 grains de cette ſubſtance furent ſoumis à l'analyſe chimique, par les mêmes procédés environ que la maſſe précédente, & le réſultat donna les proportions ſuivantes:

Silice - - - - -	130	grains.
Oxide de cuivre - -	20	—
Oxide de plomb - -	15	—
Oxide de fer - - -	7	—
Chaux - - - - -	13	—
Alumine - - - -	11	—
	196	grains.

Cet émail vert eſt donc compoſé des mêmes élémens que le précédent, dont il ne diffère que par les proportions du mélange. L'un & l'autre doivent leur couleur à l'oxide de cuivre, & c'eſt aux différens degrés d'oxidation ou de ſaturation d'oxigène, que l'on doit attribuer la différence des couleurs.

C'eſt en effet un des caractères du cuivre, de donner dans l'état d'oxidulation ou de demi-ſaturation d'oxigène, une couleur rouge de cuivre aux émaux, tandis que dans l'état d'oxidation complète la couleur communiquée aux vitrifications eſt verte. Pline fait mention de pluſieurs préparations de cuivre uſitées de ſon temps, & s'épuiſe à en réciter les prétendues vertus médicinales. Or de ces oxides de cuivre préparés par l'art, il en eſt quelques-uns qui euſſent pu être avantageuſement appliqués à la coloration des émaux, ſi l'on n'avoit pas trouvé plus à propos d'employer à cet uſage les oxides natifs de cuivre, qui devoient ſe rencontrer abondamment dans les mines de ce métal, & particulièrement dans celles de l'île de Chypre.

III. Verre antique bleu.

Mon but eſſentiel dans l'analyſe de cette vitrification étoit de conſtater la nature problématique de la ſubſtance dont les anciens ſe ſervoient pour colorer leurs verres en bleu. Les rapports très-marqués qui exiſtent entre les verres bleus des anciens & les nôtres, qui

ſont

ſont, comme tout le monde ſait, teints par le cobalt, a induit pluſieurs ſavans à penſer que les anciens connoiſſoient déjà ce foſſile, & ſavoient ſe prévaloir de ſa propriété colorante. Ferber s'étoit rangé à cette opinion; il dit dans ſes Lettres ſur l'Italie pag. 114. *On a trouvé dans la villa Adriani proche Tivoli, à Frascati & à pluſieurs autres endroits, des moſaïques antiques, dans lesquelles on diſtingue des cubes d'une maſſe vitrifiée bleue, qui prouve que les anciens connoiſſoient le cobalt & la fabrication de la ſafre.* Il répète cette aſſertion dans pluſieurs autres paſſages.

Cette opinion, avancée ainſi ſans aucune preuve chimique, ſe fonde uniquement ſur la ſuppoſition que l'oxide de cobalt eſt la ſeule ſubſtance qui puiſſe colorer les émaux en bleu. Mais il eſt prouvé que les anciens poſſédoient l'art de donner au verre, en employant le fer, la même couleur que nous lui communiquons par le cobalt.

Monſieur Gmelin de Göttingue a donné les détails, dont la vérité de ce que je viens d'avancer, a été prouvée par les recherches chimiques, dans ſon *Examen chimique d'un verre bleu faiſant partie intégrante d'une moſaïque trouvée dans des fouilles faites dans un jardin à Montbeillard.* Cette moſaïque étoit probablement un ouvrage des Romains. Mr Gmelin a ſans doute été dans la néceſſité de n'employer que quelques grains de la ſubſtance en queſtion dans ſes recherches; le réſultat néanmoins eſt entièrement ſatisfaiſant, & prouve que la ſubſtance colorante de cet émail n'étoit point du cobalt, mais bien du fer.

L'analyſe ſuivante de la vitrification bleue tirée des ruines de Caprée, donne le même réſultat.

La couleur de ce verre eſt bleu de ſaphir, tirant ſur le bleu de ſmalte; il n'eſt transparent qu'à ſes bords. La caſſure eſt, comme dans les précédens, plutôt conchoïdale & ſcorieuſe, qu'écailleuſe: quelques-unes de ces petites tablettes bleues ont la propriété remarquable de n'être pas uniformement colorées en bleu, mais de n'offrir cette

couleur qu'aux deux tiers de leur épaiſſeur. Les deux couches différemment colorées ſont tranchées ſi net, que l'on croit poſitivement voir deux lamelles de verre de couleur différente, appliquées l'une ſur l'autre par leur ſurface plane.

a) 200 grains de cet émail bleu furent broyés très-fin, & fondus avec 400 grains de ſoude cauſtique. La maſſe obtenue par cette fuſion fut détrempée d'eau, ſurſaturée d'acide muriatique, & évaporée jusqu'à une médiocre deſſiccation. Après la rédiſſolution de la maſſe dans l'eau, la terre ſiliceuſe s'en ſépara, elle peſoit ſéchée & rougie 163 grains.

b) La liqueur fut ſurſaturée d'ammoniaque cauſtique. Il ſe forma un pulpite brun, qui après une édulcoration préliminaire, fut mis en digeſtion avec du kali cauſtique, qui opéra la ſolution d'une petite partie du précipité. Cette portion diſſoute reparut après une nouvelle ſurſaturation d'acide muriatique, & une précipitation par le carbonate de ſoude, ſous forme de précipité, qui lavé & rougi ſe trouva être de l'alumine, peſant 3 grains.

c) La portion non diſſoute par le kali cauſtique étoit en totalité de l'oxide de fer, qui édulcoré & rougi peſoit 19 grains.

d) La liqueur ſurſaturée par l'ammoniaque cauſtique (b) dont la couleur étoit bleuâtre, fut concentrée par une évaporation lente, jusqu'à ce que la majeure partie du muriate de ſoude qu'elle contenoit ſe fût criſtalliſée. La liqueur déverſée de deſſus les criſtaux, dans laquelle l'acide dominoit maintenant, & qui n'avoit plus qu'une légère teinte verdâtre à peine ſenſible, fut en vain éprouvée dans l'idée d'y trouver du cobalt; je n'y aperçus autre choſe que quelques veſtiges de terre calcaire & de cuivre. Le cuivre fut manifeſté par l'addition du pruſſiate de kali; il en réſulta un précipité brun, peſant un peu plus de 2 grains, qui repréſentent 1 grain d'oxide de cuivre.

e) Enfin le carbonate de ſoude précipita encore un demi grain de terre calcaire.

Ainſi les ſubſtances terreuſes & métalliques contenues dans les 200 grains analyſés étoient:

Silice (a) - - - - -	163	grains.
Oxide de fer (c) - -	19	—
Alumine (b) - - -	3	—
Oxide de cuivre (d) -	1	—
Terre calcaire (e) - -	0,5	—
	186,5	

Ayant ſoumis cet émail bleu à des recherches analytiques ultérieures, uniquement dans la vue d'y conſtater l'exiſtence ou la non-exiſtence du cobalt, & n'y ayant pas rencontré la plus légère trace de ce métal, il n'y a plus nul doute, que ce verre bleu ne doive ſa couleur au fer uniquement. Si l'on doutoit que le fer pût dans certaines circonſtances fournir au verre un principe colorant en bleu, il ſuffiroit d'obſerver les belles ſcories ferrugineuſes bleues que l'on trouve parmi le laitier des fourneaux de fonte où l'on travaille des mines de fer ſiliceuſes. Il eſt ſûr néanmoins, que nous ne connoiſſons pas préciſément les circonſtances qui produiſent cette coloration en bleu; car l'aſſertion de *Henkel* & de quelques autres écrivains anciens, que le fer préparé par une cementation avec l'arſenic, donne au verre la même couleur bleue que le cobalt, a été trop peu confirmée par l'expérience. L'art de colorer les émaux en bleu, en y employant le fer, a donc eu depuis la découverte du cobalt, le ſort de beaucoup d'autres procédés des arts, qui ont été mis de côté, puis entièrement oubliés, depuis qu'on leur a ſubſtitué des méthodes plus commodes, ou des agens plus efficaces.

II. SECTION.

Ces tablettes de verre antique deſtinées à la moſaïque ſont par leur opacité & leur caſſure ſcorieuſe, identiques à ce que nous appelons aujourd'hui de l'émail; on ne peut douter néanmoins que les

anciens n'ayent poſſédé l'art de préparer des vitrifications plus parfaites, & ſous le rapport de la couleur & ſous celui de la transparence; il ſuffiroit de rappeler ce qui a été dit plus haut, touchant l'imitation des pierres précieuſes, pour faire disparoître tout doute à cet égard.

Ces vitrifications plus parfaites des anciens ſont connues par beaucoup de détails, que les auteurs tant anciens que modernes nous en ont donnés, & ſurtout par les échantillons nombreux que l'on en a retrouvés & qui exiſtent dans les cabinets des antiquaires; mais ces connoiſſances préciſes ſervent à rendre plus frappant le contraſte de l'ignorance presqu'entière, où la majorité des antiquaires ſe trouve relativement à une espèce de peinture en moſaïque ſur verre d'un genre très-original & très-piquant. Ce procédé conſiſtoit à compoſer le tableau de la réunion d'un grand nombre de fils de verre, aſſortis ſelon leurs diverſes nuances & juxtapoſés de la manière la plus délicate, puis à réunir ces fils en une ſeule maſſe par un coup de feu. Les anciens traités d'antiquités ne ſont aucune mention de cet art, ce qui vient probablement de ce que les fragmens de ce genre, qui ſont parvenus jusqu'à nous, n'ont guère été trouvés que dans la dernière moitié de ce ſiècle.

Parmi les antiquaires plus modernes le comte Caylus paroît être le premier, qui dans ſon *Recueil d'antiquités* ait donné ſur cette ſingulière espèce de moſaïque quelques détails accompagnés de gravures, ſans doute très-imparfaites. Winkelmann dans ſes *Remarques ſur l'hiſtoire de l'art chez les anciens* fait mention de deux antiques de ce genre, différentes de celles du comte Caylus, & qu'il nomme *tableaux compoſés de tubes de verre;* voici le paſſage: (pag. 5. & ſuiv.) „Il convient „de faire mention ici d'un travail que les anciens exécutoient en verre, „& dont il n'eſt point fait mention dans *l'Hiſtoire de l'art;* cela ſera „d'autant plus à propos, qu'il eſt ſûr, que les anciens avoient pouſſé beau„coup plus loin que nous, l'art de travailler le verre; ceux qui n'ont „point vu leurs ouvrages en ce genre, pourroient aiſément nous ac„cuſer d'exagération." Il décrit enſuite le pavé d'un édifice décou-

vert dans l'île Farnèſe, dont la matière étoit des carreaux d'un verre vert; puis il parle de quelques fragmens de vaſes de verre, dont il prétend qu'ils doivent avoir été travaillés au tour; après quoi il ajoute: „Mais rien n'eſt plus propre à nous étonner, que l'art raffiné dont les „veſtiges exiſtent dans deux petits fragmens de verre trouvés l'année „paſſée (en 1765) à Rome. Chacun de ces deux fragmens n'a pas „tout-à-fait un pouce de longueur, & un tiers de pouce de largeur. „L'un des fragmens repréſente ſur un fond obſcur, mais nuancé, la fi„gure d'un oiſeau de l'espèce du canard, dont les couleurs ſont très„brillantes, mais dont la délinéation eſt plutôt une compoſition libre „dans le ſtile fantaſtique des Chinois, qu'une imitation fidèle de la na„ture. Les contours ſont fermes & nets; les couleurs belles & pures, „l'effet en eſt très-marqué, parce que l'artiſte à choiſi à propos des pail„lettes de verre diaphane ou de verre opaque, ſuivant que ſon ſujet „l'exigeoit. *Le pinceau le plus* exercé à la miniature ne pourroit rendre „avec plus de délicateſſe & de vérité le cercle de l'iris, ni les taches mi„roitées des plumes de la poitrine & des ailes, derrière lesquelles le „morceau a été rompu. Mais l'étonnement eſt à ſon comble, quand en „retournant la plaque de verre, on voit ſur ſon revers préciſément le „même oiſeau, ſans que l'on puiſſe obſerver la moindre différence ſur „aucun point de l'image; d'où l'on doit conclure néceſſairement que „l'image ſe propage tout à travers l'épaiſſeur de la pièce de verre, de fa„çon que toutes les coupes, que l'on pourroit faire parallèlement aux fa„ces planes du verre, offriroient toujours le même oiſeau; cette opinion „eſt puiſſamment confirmée par la transparence des belles couleurs de „quelques parties de l'oeil & de la poitrine. La ſurface de la peinture „eſt grenue & inégale aux deux ſurfaces, comme dans tous les morceaux „dans le genre de la moſaïque; mais les filets de verre ſont ſi intime„ment unis entr'eux, que le fort groſſiſſement d'une loupe n'y fait „apercevoir aucune ſolution de continuité. Cette circonſtance, jointe „à la prolongation de l'image tout à travers l'épaiſſeur du verre, ren„doit au premier coup d'oeil l'exécution de ce morceau extrême-

„ment problématique, & probablement l'énigme ſeroit long-temps de-
„meurée inſoluble, ſi l'on n'eût obſervé à la caſſure de la pièce des ſéries
„parallèles continuées à travers toute l'épaiſſeur de la pièce & offrant
„préciſément la couleur, dont les deux ſurfaces étoient teintes; cette
„circonſtance fit conclure naturellement, que la pièce entière étoit ré-
„ſultée de la juxtapoſition d'un grand nombre de fils de verre, réunis
„enſuite par l'action du feu."

„Le ſecond fragment eſt à-peu-près de la même dimenſion & tra-
„vaillé dans le même genre; il repréſente ſur fond bleu, des ornemens
„en vert, en blanc & en jaune, conſiſtans en rinceaux, en filets de
„perles & en fleurons. Tous ces objets ſont nettement deſſinés ſans la
„moindre confuſion, mais les proportions en ſont ſi extrêmement pe-
„tites, qu'un oeil perçant a peine à diſcerner & à ſuivre les dernières ra-
„mifications, dans leſquelles les rinceaux vont s'ébrancher & ſe perdre;
„& nonobſtant cette extrême fineſſe, tous ces objets ſont repréſentés
„d'une manière continue dans toute l'épaiſſeur de la plaque de verre."

Sulzer dans ſa Théorie des beaux-arts fait mention de la même moſaïque vitreuſe à l'article *Moſaïque*. Ce ſavant avoit eu occaſion d'obſerver lui-même le morceau en queſtion, à ſon ſéjour à Dresde, où il le vit dans le cabinet de *Caſanova*. Sulzer confirme le témoignage de Winkelmann, & dit que ce morceau eſt „un monument de l'anti-
„quité qui prouve que l'art avoit alors atteint ſon *non plus ultra*."

Mr Townley compte parmi les morceaux les plus précieux de ſon fameux cabinet, une bague d'une pâte de verre antique d'un travail préciſément ſemblable. La figure d'un oiſeau y eſt repréſentée avec une ſi prodigieuſe fineſſe de deſſin & de coloris, qu'il faut le ſecours d'une loupe, pour bien apercevoir les détails.

Comme ce genre de peinture en verre mérite réellement d'être placé au nombre des arts, dont la trace s'eſt perdue, & dont l'exiſtence chez les anciens n'eſt que très-imparfaitement connue, & comme d'ail-

leurs les veſtiges que l'on en a conſervés, ſont en très-petit nombre, je penſe qu'on ne me blâmera pas, ſi je joins ici une notice abrégée de deux antiques du même genre, dont je me trouve poſſeſſeur. Ces deux morceaux ſont en forme de coeur. La face principale eſt une ſurface plane; l'autre eſt convexe, & offre 8 ou 10 angles en ſaillie. L'un des morceaux a un pouce de long, $\frac{4}{5}$ de large & $\frac{2}{5}$ d'épaiſſeur. Le ſecond eſt des $\frac{2}{3}$ plus petit. Le faire eſt le même à-peu-près dans les deux morceaux, ſoit relativement au deſſin, ſoit relativement au coloris. La maſſe de la plus grande antique eſt d'un bleu foncé, & abſolument opaque, la petite eſt bleu de ſaphir, ayant des places diaphanes. Le fond bleu eſt décoré de petits fleurons en étoiles & groupés en arabesque; les couleurs & le deſſin de ces feſtons eſt ſi extrêmement délicat, qu'à peine le pinceau du peintre en miniature pourroit produire quelque choſe de plus achevé. Les couleurs employées pour la repréſentation des fleurs ſont le rouge, le vert, le brun, le bleu céleſte, & le blanc, & ſont vives & nettes. Les figures repréſentées ſe propagent à travers toute l'épaiſſeur de la maſſe, & une caſſure qui exiſte ſur une des faces, montre diſtinctement, que ces peintures ſi déliées ſont le réſultat de la juxtapoſition parallèle de pluſieurs fils de verre coloré extrêmement déliés, & réunis par la fuſion.

Les figures qui accompagnent les deſcriptions du comte Caylus étant trop imparfaites, pour donner une idée préciſe de ces intéreſſantes productions de l'art, je joins ici un deſſin de la plus grande de mes deux antiques. La Fig. 1. la repréſente dans ſes dimenſions naturelles. La Fig. 2. la montre vue à la loupe.

Je ne puis mieux terminer ce mémoire, qu'en rapportant le paſſage ſuivant tiré d'une lettre de Mr. *Käſtner*, concernant un procédé inventé par le célébre *Tobie Mayer*. „Mayer poſſédoit un moyen de „multiplier beaucoup de copies parfaitement ſemblables d'un tableau „original. Il compoſoit ſon tableau en façon de moſaïque d'un „grand nombre de baguettes de cire diverſement colorées, ainſi qu'on

„peut compoſer un prisme, en aſſemblant en un faiſceau un grand „nombre de prismes d'une longueur égale. Chaque coupe priſe dans „le ſens de la largeur, donnoit enſuite un nouvel exemplaire *). " Peut-être que Mayer n'a fait en ceci, qu'accommoder ſon procédé par lequel il employoit la cire, à l'idée que lui avoient ſuggérée les moſaïques anciennes dont nous venons de nous occuper.

*) Allg. geograph. Ephemeriden von Zach, 1798.

ANA-

ANALYSE
chimique de la mine de Tellure de Tranſylvanie.

PAR M. KLAPROTH *).

Traduit de l'allemand.

Entre les foſſiles divers dont la nature a compoſé les tréſors ſouterrains de la Tranſylvanie, ceux connus ſous le nom d'*Or blanc* & d'*Or gris*, méritent éminemment de fixer l'attention des obſervateurs de la nature.

Tout ce qu'on ſavoit jusqu'à préſent avec certitude ſur cet objet, étoit que ces mines contiennent de l'or & de l'argent, en différentes proportions; mais le doute & l'incertitude régnoient relativement aux autres principes conſtituans de ces foſſiles.

Pour contribuer à remplir cette lacune de la minéralogie chimique, je préſente à l'Académie mes obſervations & mes expériences ſur ces précieux foſſiles, dans lesquels j'ai aperçu & conſtaté l'exiſtence d'un nouveau métal, auquel je donne le nom de *Tellure*, conſacré dans la Mythologie pour déſigner la terre en tant que les êtres organiſés lui doivent l'exiſtence.

Le nouveau métal exiſtant dans ces foſſiles, ſoit comme principe dominant, ſoit comme principe ſubordonné, je le réunis ſous la dénomination commune de *Mine de Tellure.*

*) Lu dans l'aſſemblée publique du 25 janvier 1798.

A. Tellure natif. (Gediegen Tellur.)

Je déſigne par cette dénomination le foſſile connu jusqu'à préſent des minéralogiſtes ſous les noms de *Aurum paradoxum* & de *Metallum problematicum*, & extrait de la mine de Mariahilf, dans les montagnes de *Facẓebay* proche *Zalathna* en Tranſylvanie. La couleur de cette mine tient le milieu entre le blanc d'étain & le gris de plomb, la ſurface en eſt ſouvent teinte d'une nuance jaune rougeâtre ou griſe. Elle offre l'éclat métallique très-brillant. On la trouve, mais rarement, en maſſe, ayant une texture lamelleuſe, & formée de grains criſtalliſés; il eſt plus commun de la voir diſſéminée en molécules très-fines & déliées, dans une gangue mêlée de quarz & de lithomarge.

Les chimiſtes & les minéralogiſtes étoient très-partagés d'opinion ſur la nature du métal contenu dans cette mine; les uns croyoient y voir du bismuth, & les autres de l'antimoine.

Pour déterminer quelque choſe de précis ſur ce point, M. Müller de Reichenſtein, alors conſeiller à la tréſorerie d'Hermannſtadt, & depuis conſeiller de la régence & directeur des mines de Zalathna, ſoumit en l'année 1782, ce foſſile à une analyſe dont les détails ſont conſignés dans les *Travaux phyſiques de la ſociété des amis unis de Vienne, publiés par le conſeiller de la cour de Born.*

Les réſultats de cette analyſe n'indiquant ni bismuth ni antimoine, M. Müller de Reichenſtein en prit occaſion d'y ſoupçonner l'exiſtence d'un nouveau métal. Mais ſans approfondir davantage cette matière, il la ſoumit aux recherches ultérieures du célébre Torbern Bergmann, provoquant à ſa déciſion ſur la réalité de l'exiſtence d'un nouveau métal. Bergmann ne réſolut pas non plus le problème d'une manière péremptoire; il ſe contenta d'affirmer conſéquemment à ſon analyſe, que la ſubſtance métallique en queſtion étoit différente de l'antimoine, ſans oſer ſtatuer quelque choſe ſur ſa nature propre.

Le public ſavant attendit vainement depuis cette époque des lumières plus poſitives & des recherches plus profondes ſur la nature de

ce foſſile; il arriva même, que la rareté toujours croiſſante de ce minéral diminua de jour en jour la probabilité du travail analytique conſidérable & répété, dont on déſiroit qu'il devînt l'objet.

Ces circonſtances concourent à donner un nouveau prix à l'empreſſement avec lequel pluſieurs de mes correſpondans pour la minéralogie, & particulièrement M. Müller de Reichenſtein lui-même, m'ont mis en état de conſacrer des quantités ſuffiſantes de ce foſſile à une analyſe, dans laquelle M. Müller avoit préparé les voies avec ſon talent ordinaire. Ainſi j'ai confirmé l'exiſtence ſoupçonnée d'un nouveau métal, & j'ai pu conſtater pluſieurs de ſes propriétés chimiques.

I. Analyſe du Tellure natif.

Voici le procédé dont je me ſuis ſervi pour l'analyſe de cette mine.

1) Je ſéparai auſſi bien qu'il fut poſſible, la mine de la gangue qui y adhéroit; je la pulvériſai, j'y verſai ſix parties d'acide muriatique, j'échauffai le tout au bain de ſable; puis j'y ajoutai de l'acide nitrique à diverſes repriſes, en tout trois parties. A chaque affuſion de l'acide nitrique il y eut effervescence. Le métal contenu dans la mine fut entièrement diſſous, & les parties de la gangue demeurèrent, offrant en majeure partie l'apparence de petits grains de quarz.

2) La ſolution filtrée doit être enſuite étendue d'eau, en obſervant ſoigneuſement de n'en pas verſer aſſez pour troubler la ſolution. On ajoute enſuite du kali ou du natron cauſtique en liqueur jusqu'à ce que le précipité blanc qui ſe forme ſe rédiſſolve, au point de ne laiſſer qu'un ſédiment limoneux d'un brun foncé.

3) Ce ſédiment eſt de l'or & du fer. Pour en ſéparer l'or on rediſſout le précipité dans l'acide nitro-muriatique, & on en précipite l'or à l'aide d'une ſolution faite à froid du mercure par l'acide nitrique. Cette précipitation ſe fait graduellement & par petites quantités, jusqu'à ce que le précipité ne paroiſſe plus brun mais blanc. On raſſemble ſoigneuſement ce précipité, on le pouſſe au feu, puis à l'aide du borax on en obtient un bouton d'or.

4) L'or ainſi retiré, on précipite la ſolution de fer par le kali cauſtique; on fait rougir l'oxide de fer, & on eſtime par le calcul la quantité de métal qu'il contient.

5) Pour obtenir enſuite le Tellure, on neutraliſe avec la plus exacte préciſion la ſolution alcaline, qui maintenant ne contient plus ni or ni fer; on emploie l'acide muriatique à cette neutraliſation. Il ſe forme ſur-le-champ un précipité blanc très-abondant, qui dans la liqueur échauffée tombe au fond comme une poudre peſante. On raſſemble ce précipité, on le lave avec parties égales d'eau & d'eſprit de vin, & on le ſèche par une chaleur douce.

6) Pour réduire cet oxide de Tellure, on l'imprègne légèrement d'une huile graſſe, on l'introduit dans une petite cornue, & après y avoir appliqué un récipient, qui ne doit pas être luté, on l'échauffe graduellement, jusqu'à ce que ſon contenu ſoit arrivé à l'incandescence. Après la carboniſation de l'huile, on voit la voûte de la cornue ſe couvrir de petites gouttes métalliques, comme dans la diſtillation du mercure; ces gouttes tombent ſucceſſivement, & font place à d'autres. Quand tout eſt refroidi, on trouve, outre les gouttes figées par le refroidiſſement & adhérentes à la voûte, le reſte de la maſſe métallique réduite, coulée dans le fond de la cornue, offrant une ſurface pure, brillante, & pour l'ordinaire criſtalliſée.

On doit obſerver de n'imprégner l'oxide de métal que de peu d'huile, afin qu'il ne ſe forme pas de réſidu carboneux, qui par ſon interpoſition empêcheroit les molécules métalliques de ſe réunir parfaitement par la fuſion.

On fait mieux encore de ſubſtituer du pouſſier de charbon à l'huile, pourvu que l'on obſerve auſſi de n'en pas prendre plus qu'il n'en faut pour la réduction. La proportion de $8\frac{1}{2}$ jusqu'à 9 parties de charbon contre 100 d'oxide de Tellure eſt la plus avantageuſe, en ce qu'elle donne une réduction complète, ſans qu'il demeure ni charbon ni oxide après l'opération. Dans l'inſtant de la réduction il ſe fait un dégage-

ment abondant de gaz carbonique, qui enlève quelques particules du métal & les dépoſe dans le récipient.

Quand la réduction du Tellure doit ſe faire ſans aucun déchet, il faut abſolument y employer une petite cornue de verre. Je fis un eſſai de réduction, où je mis l'oxide de Tellure dans un petit creuſet bien brasqué & dont le couvercle étoit bien luté; je plaçai ce creuſet dans un fourneau, j'obſervai que la flamme des charbons ſe teignoit en bleu céleſte, & en délutant le creuſet, je vis que tout ce qu'il contenoit s'étoit volatiliſé.

La mine grenue de Tellure, dont je parle, a pour principe conſtituant le plus abondant le métal de Tellure. Je broyai une portion de cette mine, (c'étoit une variété en maſſe compacte, exploitée en l'année 1780), j'en traitai 100 parties avec les acides pour en opérer l'extraction, & il ne me demeura que $11\frac{1}{2}$ grains de ſédiment quarzeux, ſeul élément terreux qui y exiſtât.

Conſéquemment à ces expériences préliminaires, 1130 grains de cette mine broyée furent traités avec l'acide nitro-muriatique. Le réſidu qui demeura après l'extraction peſoit, après avoir été rougi, 130 grains; il y avoit par conſéquent 1000 grains de diſſous, & ils conſiſtoient en

Tellure - - - - -	925,50
Fer - - - - - -	72
Or - - - - - -	2,50
	1000

L'expérience m'a néanmoins appris, que l'or exiſte en proportions variables dans cette mine, comme en général dans toutes celles de la Tranſylvanie qui ſont auriféres. Pluſieurs expériences poſtérieures me donnèrent l'or en beaucoup plus grande abondance, & dans une variété de la mine de Tellure natif ce métal ſe trouva dans la proportion de 9 pour cent.

Quant aux opérations entrepriſes par la voie ſèche, je me contenterai de rapporter les ſuivantes.

1) 100 grains de mine de Tellure natif furent mêlés avec 250 grains de ſalpêtre, & projetés dans un creuſet rougi; il n'y eut point de détonation, mais le Tellure coula auſſitôt en gouttes ſous la ſurface du nitre qui étoit en fonte tranquille, & s'y réunit en un bouton.

2) 100 grains de Tellure natif, 40 grains de ſoufre & 420 grains de ſalpêtre furent triturés enſemble & projetés en petites portions dans un creuſet chauffé à l'incandescence. Chaque jet s'enflamma auſſitôt avec une flamme blanche & une émiſſion de lumière éblouiſſante, le mélange entra bientôt en fonte très-coulante. Après l'avoir laiſſé quelques momens dans le feu, où il continua de bouillonner, je l'en retirai, & j'obtins par le refroidiſſement une maſſe d'un brun foncé. Ayant délayé cette maſſe dans l'eau, & l'ayant filtrée, elle laiſſa ſur le filtre une chaux martiale brune aurifére, jointe au réſidu quarzeux de la gangue. La liqueur filtrée étoit claire comme de l'eau. Saturée d'acide ſulfurique il s'en ſépara de l'oxide blanc de Tellure, qui ſe redifſolut dans un excédent d'acide. Le natron carbonique fut employé pour le précipiter de cette ſolution. Ce procédé peut donc être employé pour obtenir promptement l'oxide de Tellure; on doit néanmoins s'attendre à éprouver quelque perte par la volatiliſation de la ſubſtance métallique.

II. Caractères les plus ſaillans du Tellure en métal.

1) La couleur du Tellure dans ſon état de pureté eſt d'un blanc d'étain, tirant ſur le gris de plomb. Il a un éclat métallique très-brillant. La caſſure eſt feuilletée en feuillets plans, les faces de la caſſure ſont fortement miroitées. Quand le métal ſe refroidit lentement, ſa ſurface criſtalliſe. Il eſt très-caſſant & friable.

2) De tous les métaux fusibles connus c'est celui dont la pesanteur spécifique est la moindre, puisqu'elle n'est relativement à l'eau, que comme 6,115 à 1,000.

3) Il est de la classe des métaux dont la fusion est facile, c'est-à-dire de ceux qui fondent avant d'arriver à l'incandescence. Dans une température égale il fondit plutôt que l'antimoine, & plus tard que le plomb.

4) Présenté au chalumeau sur un charbon, il s'enflamme avec une vivacité, qui tient de la détonation, & avec émission d'une flamme bleu-claire liserée de vert & très-vive. Le métal se vaporise en entier sous forme d'une fumée gris-blanche, qui couvre le charbon d'une pellicule blanche près du foyer de la combustion, & bleuâtre dans les points qui en sont plus distans. Cette fumée se distingue encore par une odeur un peu désagréable, imitant celle de la rave. Si l'on cesse d'animer la flamme, avant que le métal soit entièrement volatilisé, la surface du bouton, qui demeure assez long-tems fluide, se prend en offrant une cristallisation dendritique rayonnée, & le plus souvent aussi une couleur irisée en gorge de pigeon.

5) Le Tellure n'a que peu d'affinité avec le mercure. Une partie de ce nouveau métal, fondue à une chaleur douce dans un petit creuset, fut mêlée avec cinq parties de mercure, sans former un amalgame proprement ainsi dit; on n'observoit que le mélange mécanique des globules de mercure & des grains du Tellure qui avoient repris leur solidité.

Une partie de Tellure pulvérisé, & six parties de mercure furent chauffées dans une petite cornue de verre; il y eut au premier coup-d'oeil formation d'amalgame avec surface cristallisée. Mais un examen ultérieur montra que le mercure n'avoit dissous que peu ou point de Tellure, & que ce dernier métal avoit simplement recouvert la surface du mercure sous forme de petites écailles.

6) Parties égales de Tellure & de soufre fondues ensemble à une chaleur modérée, donnèrent une minéralisation striée de couleur plombée. Ce produit étant chauffé jusqu'à l'incandescence dans une petite

cornue, une partie du ſoufre ſe ſublima & ſe fixa à la voûte de la cornue en maſſe compacte d'un brun noir. Une parcelle de ce ſublimé chauffée au chalumeau ſur un charbon, brûla tranquillement avec une flamme verte, & laiſſa ſur le charbon une pellicule métallique très-déliée. Le fond de la cornue préſentoit le Tellure ſulfaté ſous forme de maſſe gris-d'acier, poreuſe & à moitié fondue, n'ayant que peu d'éclat métallique.

7) Le Tellure donne avec l'acide nitrique une ſolution diaphane & non-colorée, qui ne ſe trouble point par l'addition de l'eau. La ſolution non-étendue d'eau offre après quelque tems des criſtaux blancs très-déliés, très-légers en forme d'aiguille, formant communément des groupes dendritiques.

8) L'acide muriatique donne par l'addition de quelques gouttes d'acide nitrique une ſolution également limpide. Mais dès qu'on ajoute de l'eau à cette ſolution concentrée, elle ſe décompoſe & laiſſe tomber l'oxide métallique ſous forme de poudre blanche; ce précipité ſe rediſſout néanmoins presqu'en totalité, quand on y ajoute à pluſieurs repriſes de plus grandes quantités d'eau. Mais ſi au lieu d'eau on ajoute de l'alcohol à la ſolution, & ſi l'on ſe ſert pareillement d'alcohol pour édulcorer le précipité, il ne reſte alors que peu ou point d'oxide de Tellure dans la ſolution. On doit obſerver néanmoins que des précipités obtenus dans ce cas par la ſeule addition de l'eau ou de l'alcohol, ne peuvent point paſſer pour de pur oxide de Tellure, mais ſont dans la réalité un véritable muriate de Tellure.

9) Si dans un vaſe bouché l'on verſe à froid ſur une petite portion de Tellure en métal une quantité cent fois plus grande d'acide ſulfurique concentré, l'acide ſe teint inſenſiblement d'une belle couleur rouge d'améthyſte foncé. Cette couleur diſparoît par l'addition d'une petite quantité d'eau, & la petite quantité de métal qui avoit été diſſoute, ſe ſépare èn forme de flocons noirs. La chaleur ſuffit auſſi pour détruire la couleur rouge de la ſolution, & alors la portion de métal diſſoute ſe précipite en oxide blanc.

10) Si

10) Si l'on délaye l'acide ſulfurique de deux ou trois parties d'eau, & qu'on y ajoute enſuite quelques gouttes d'acide nitrique, il y a ſolution complète du Tellure. Cette ſolution eſt ſans couleur, & l'addition d'une plus grande quantité d'eau n'y opère pas de précipitation.

11) Les alcalis précipitent le Tellure de ſes ſolutions acides, avec une couleur blanche. Ce précipité eſt enſuite ſoluble dans tous les acides, ſans qu'il ſoit beſoin de les aiguiſer par l'addition de l'acide nitrique. Si dans cette précipitation des ſolutions acides de Tellure, on emploie un excédent d'alcali au-delà de ce qu'exige la neutraliſation de l'acide, il arrive que le précipité ſe rediſſout en totalité par les alcalis, ſoit cauſtiques, ſoit carboniques.

Cent parties de Tellure diſſoutes d'abord dans l'acide nitro-muriatique, puis dans la ſolution aqueuſe de kali ou de ſoude cauſtique, & reprécipitées de cette ſolution alcaline par l'acide muriatique, (*en obſervant rigoureuſement de ne point dépaſſer la ſaturation*), édulcorées enſuite avec un mélange à parties égales d'eau & d'alcohol, & enfin ſéchées par l'intermède de la chaleur, donnèrent 120 parties d'oxide de Tellure.

12) Les ſolutions acides de Tellure ne ſont abſolument ni précipitées ni troublées, par le pruſſiate de potaſſe pur. Cette propriété du Tellure eſt très-remarquable, quoiqu'au fond elle appartienne également à l'or, à la platine & à l'antimoine. Pour que cette expérience & les ſuivantes réuſſiſſent, il eſt néceſſaire de préparer la ſolution de Tellure avec un peu d'excès d'acide, afin qu'elle ne ſe trouble point dans le cas où on la délayeroit de 4 à 5 parties d'eau.

13) *Les ſulfures alcalins* précipitent le Tellure avec une couleur brune ou noirâtre, ſelon qu'il eſt plus ou moins abondamment combiné avec l'oxigène. Quand ce précipité ſulfureux eſt ſéché & porté ſur un charbon ardent, ſon ſoufre s'enflamme, & avec lui une partie du métal, reconnoiſſable à la flamme bleu-claire décrite plus haut.

14) La *Teinture de noix de Galles* donne un précipité floconneux de couleur iſabelle.

15) Le zink & le fer précipitent le Tellure de ſes ſolutions acides; le précipité eſt en flocons noirâtres, qui par la trituration prennent l'état métallique. Porté ſur le charbon ardent, ce précipité ſe réunit ſur-le-champ en globules métalliques, qui ſe conſument enſuite avec une vapeur griſe & une flamme bleu-claire liſérée de vert, comme dans tous les cas analogues. L'étain & l'antimoine opèrent également la réduction du Tellure dans les ſolutions muriatiques.

La précipitation métallique du Tellure par l'antimoine eſt bien la preuve la plus démonſtrative, que le nouveau métal, dont nous nous occupons, n'eſt pas de l'antimoine modifié ou masqué, comme on le ſoupçonnoit autrefois. Le phosphore que l'on met dans la ſolution muriatique de Tellure, ſe couvre peu-à-peu d'écailles métalliques.

16) Préſenté au chalumeau ſur un charbon, l'oxide de Tellure ſe revivifie avec une eſpèce de détonnation, mais bientôt après il ſe vaporiſe & ſe conſume. Ce même oxide chauffé dans une petite cornue de verre, ſe fond & offre après le refroidiſſement une couleur jaune de paille & une texture ſtriée.

Un coup d'oeil jeté ſur ces propriétés chimiques ſuffit pour prouver que cette ſubſtance eſt un métal propre, eſſentiellement différent de tous les autres métaux connus jusqu'à préſent. Mr Müller de Reichenſtein ayant reconnu & publié l'exiſtence de pluſieurs de ces propriétés dans le foſſile brut, c'eſt à lui qu'appartient le mérite d'avoir le premier ſoupçonné l'exiſtence du nouveau métal, & de l'avoir déſigné aux chimiſtes comme l'objet de leurs recherches ultérieures.

B. Mine de Tellure graphique (Schrift-Erz.)

La mine de Tellure graphique (or graphique, *aurum graphicum*), de la mine de *Franciscus* à *Offenbanya*, ſe qualifie comme une eſpèce réellement différente par ſes caractères extérieurs, & par la proportion plus grande, dans laquelle l'or s'y trouve avec ſes autres élémens.

Ce foſſile eſt d'un blanc d'étain tirant ſur le jaune de laiton. Il a un brillant métallique très-caractériſé; il eſt en majeure partie formé de criſtaux prismatiques comprimés, couchés ſur leur face la plus large, & formant par leur groupement un deſſin qui a quelque rapport avec des caractères turcs, d'où auſſi lui eſt venu ſa dénomination. On rencontre d'ordinaire cette mine de Tellure dans les fentes & les crevaſſes d'un porphyre argileux de couleur bleu-griſe, mélangé de particules de lithomarge; elle eſt d'ordinaire appliquée en couches minces ſur un quarz gris.

Les criſtaux de cette mine n'étant que peu abondamment diſſéminés dans ſa maſſe, je ne pus, malgré mes ſoins & le ſacrifice de pluſieurs échantillons, en recueillir que 15 grains, avec lesquels je fis les expériences ſuivantes.

1) Cinq grains de ces criſtaux furent broyés, & préſentés au chalumeau ſur un charbon creuſé. A la première impreſſion de la flamme ils ſe volatiliſèrent avec les phénomènes qui accompagnent toujours la combuſtion du Tellure; le bouton qui demeura ſur le charbon ayant été refondu avec un peu de nitrate de potaſſe, peſoit 2 grains. Fondus avec 5 grains d'argent, & traités ſelon la méthode ordinaire du départ, ils donnèrent $1\frac{1}{2}$ grains d'or. L'argent précipité de la ſolution nitrique par le cuivre, avoit acquis une augmentation de poids de $\frac{1}{2}$ grain.

2) Les dix grains qui me reſtoient de ces criſtaux furent diſſous par l'acide nitro-muriatique; il y eut un réſidu de muriate d'argent, équivalent à un grain peſant d'argent métallique. La ſolution fut mêlée d'eau & d'alcohol, par où j'obtins la ſéparation de l'oxide de Tellure. Je retirai de ce précipité l'or qu'il contenoit, à l'aide du ſulfate de fer, & je trouvai que cet or peſoit trois grains, plutôt plus que moins.

3) La pierre dont les criſtaux purs avoient été détachés, contenoit encore des portioncules de la même mine diſſéminées dans ſa maſſe; je les en retirai par des moyens mécaniques, je les broyai, & les ſéparai

ultérieurement des parties terreuſes par le lavage. La poudre métallique ainſi obtenue peſoit 136 grains; je la ſoumis aux épreuves ſuivantes.

a) Miſe en digeſtion avec l'acide muriatique, il n'y eut aucune trace de ſolution, mais elle ſe manifeſta auſſitôt qu'on ajouta quelques parties d'acide nitrique. Après une digeſtion aſſez long-tems ſoutenue, la ſolution fut portée ſur le filtre, & le réſidu édulcoré avec de l'eau aiguiſée d'acide muriatique. Ce réſidu ſéché peſoit 104 grains.

b) Le réſidu qui étoit quarzeux, fut chauffé dans un creuſet, ſans donner aucun ſigne de la préſence du ſoufre. Je le mêlai avec cinq fois ſon poids de carbonate de natron ſec, & le fondis dans un creuſet. La maſſe refroidie & diſſoute dans l'eau, laiſſa un ſédiment de 3 grains d'argent.

c) La ſolution (*a*) mêlée à l'eau d'édulcoration fut concentrée par l'évaporation, puis fortement délayée d'alcohol. Il ſe fit auſſitôt un précipité d'oxide blanc de Tellure, qui porté ſur le filtre, quand la liqueur fut redevenue entièrement transparente, fut enſuite lavé par l'alcohol & ſéché. Ce précipité fut rediſſous dans l'acide muriatique, & la ſolution ayant été étendue d'autant d'eau qu'elle en pouvoit comporter ſans ſe troubler, on y porta un barreau de fer poli. Le Tellure métallique noir & floconneux qui ſe précipita par cet intermède, peſoit $19\frac{1}{2}$ grains.

d) Je retirai l'or qui ſe trouvoit encore dans la ſolution en y verſant du ſulfate de fer en liqueur; le précipité d'or qui ſe forma peſoit $9\frac{1}{4}$ grains.

L'accord presque parfait de ces trois épreuves différentes m'autoriſe à conclure que la mine de Tellure graphique contient:

Tellure - - - - - -	60
Or - - - - - - -	30
Argent - - - - - -	10
	100

C. *Mine de Tellure jaune.* (Gelb-Erz.)

La mine de Tellure jaune de *Nagyag*, qui a ſervi aux recherches ſuivantes, eſt d'un blanc d'argent tirant ſur le jaune de laiton; elle eſt en partie en maſſe, en partie diſſéminée en molécules groſſières. La ſubſtance de la mine eſt traverſée par des maſſes de quarz & de Braunſpath.

a) 400 grains de cette mine, ſéparée de ſa gangue auſſi ſoigneuſement que poſſible, furent portés dans l'acide nitrique; il y eut auſſitôt une forte réaction. Après que le tout eût été tenu en digeſtion au bain de ſable, durant un tems ſuffiſant, je décantai la liqueur, & le réſidu fut mis en digeſtion avec de nouvel acide nitrique, mais ſans qu'il y eût de réaction.

b) La ſolution ſéparée du réſidu par la filtration, & n'offrant aucune couleur, fut mêlée d'acide muriatique jusqu'à ce qu'elle ceſſât de ſe troubler par cette addition. Le précipité blanc raſſemblé ſur le filtré & ſéché, peſoit 51 grains. Par l'ébullition dans une grande quantité d'eau il s'y diſſolvit, & ne laiſſa que 8 grains de réſidu, qui étoient du muriate d'argent, & qui donnèrent par la réduction 6 grains d'argent.

c) Les 43 grains du précipité qui s'étoient rediſſous dans l'eau, criſtalliſerent par l'évaporation de la liqueur en aiguilles déliées, qui ſe trouvèrent être du muriate de plomb, & auxquels correſpondoient 29 grains de plomb métallique.

d) Le réſidu que l'acide nitrique avoit refuſé de diſſoudre (*a*) fut extrait par l'acide muriatique. Il prit une couleur jaune tirant ſur le vert. La partie qui refuſa de ſe diſſoudre dans cet acide, étoit évidemment un mélange de parties quarzeuſes & de molécules d'or métallique; ce qui confirme l'aperçu que l'or eſt contenu dans ce foſſile ſous forme métallique. L'addition d'une petite quantité d'acide nitrique ſuffit pour diſſoudre entièrement l'or. La ſolution laiſſa ſur le filtre par lequel elle paſſa, le réſidu quarzeux.

e) La ſolution (*d*) ayant été mêlée avec la ſolution nitrique, dont on avoit retiré le plomb & l'argent (*c*), & concentrée par l'évaporation,

donna encore ultérieurement du muriate de plomb, lequel recueilli, lavé avec de l'acide muriatique un peu délayé, & ſéché, peſoit 11 grains, & équivaloit à 8 grains de plomb métallique.

f) Le reſte de la ſolution concentrée fut melée de kali cauſtique jusqu'à ſurſaturation, il ſe fit un précipité brun-noir, très-abondant.

g) La liqueur alcaline décantée fut ſoigneuſement ſaturée d'acide muriatique; le précipité blanc obtenu par là fut rediſſous dans l'acide muriatique, & la ſolution étendue d'autant d'eau qu'elle en comportoit ſans ſe troubler. Dans cet état on y plongea un barreau de zink. Il ſe précipita du Tellure métallique en flocons noirs, dont le poids fut de 85 grains.

h) Le précipité brun-noir (*f*) fut traité par l'acide nitro-muriatique, dans lequel il ſe diſſolvit, donnant une ſolution jaune. Cette ſolution fut mêlée de kali cauſtique en liqueur, jusqu'à ce que l'acide ne fût plus que foiblement prédominant. Après quoi j'y verſai ſucceſſivement & en petites doſes du nitrate de mercure préparé à froid, ce que je continuai tant que le précipité qui ſe formoit, préſentoit une couleur brune. Ce précipité porté ſur le filtre fut édulcoré & ſéché; après quoi le filtre avec ſon contenu fut expoſé au feu dans un petit creuſet. Le papier s'étant conſumé, je projetai ſucceſſivement dans le creuſet autant de nitre qu'il en falloit pour recouvrir le bouton d'or quand il ſeroit en fuſion; après quoi je pouſſai le feu jusqu'à tenir l'or en bonne fonte. Le bouton bien qualifié que j'obtins par ce procédé, peſoit $50\frac{3}{4}$ grains.

i) La ſolution qui me demeuroit après la ſéparation de l'or, fut échauffée jusqu'à l'ébullition, & à cette température ſaturée en majeure partie par le kali cauſtique, & j'achevai enſuite la neutraliſation par le carbonate de natron. Le précipité noirâtre que j'obtins par là, ayant été édulcoré & fortement torréfié, fut mis en digeſtion bouillante avec l'acide nitrique. Il ne s'en diſſolvit de prime abord qu'une petite portion, mais ayant ajouté un peu de ſucre à l'acide, la ſolution fut opérée complètement.

k) Cette ſolution nitrique fut mêlée d'acide ſulfurique, puis concentrée par l'évaporation. Il ſe préſenta bientôt des criſtaux de ſulfate de chaux en aiguilles déliées, qui recueillis, lavés à l'eſprit de vin affoibli, & ſéchés peſoient 41 grains, qui repréſentent 26 grains de carbonate de chaux.

l) Le reſtant de la liqueur fut enſuite étendue d'eau, & mêlé bouillant avec du carbonate de natron. Il ſe fit un précipité abondant, qui édulcoré & ſéché peſoit 68 grains, & ſe trouva être de l'oxide de manganèſe carbonique, avec une petite addition de fer & d'alumine.

m) Le réſidu quarzeux (*d*) peſoit après la deſſiccation 120½ grains. L'ayant échauffé légèrement il ſe manifeſta une petite déflagration de ſoufre, mais le poids du précipité ne s'en trouva diminué que d'un grain. Je mêlai enſuite le réſidu quarzeux avec quatre fois ſon poids de carbonate de kali, & je le fondis dans un creuſet. Après le refroidiſſement je trouvai une maſſe bien fondue de couleur d'améthyſte pâle, qui diſſoute dans l'eau, laiſſa tomber un bouton d'argent de 10⅛ grains peſant. Or le réſidu ayant contenu antérieurement cet argent ſous forme de muriate d'argent, il faut retrancher 15½ grains du poids que je lui trouvai lors de la première peſée, ce qui joint à un grain à ſouſtraire pour le ſoufre qu'il contenoit, réduit ſon poids abſolu à 106 grains.

Les produits obtenus par l'analyſe des 400 grains de mine de Tellure jaune, mêlée d'une portion de matière de la gangue, ſont donc comme ſuit:

Tellure	(*g*)	85 grains.	
Or	(*h*)	50,75	—
Plomb	(*c*) 29, (*e*) 8	37	—
Argent	(*b*) 6, (*m*) 10⅛	16,125	—
Soufre	(*m*)	1	—
Oxide de manganèſe aéré	(*l*)	68	—
Carbonate de chaux	(*k*)	26	—
Quarz	(*m*)	106	—
		389,875	
	Perte	10,125	
	Total	400	

Comme néanmoins le quarz, la chaux & la manganèſe n'appartiennent qu'à la gangue, il faut les ſéparer des autres produits, ce qui donne alors les principes réellement conſtituans de la mine, comme ſuit:

Tellure - - - - - - -	44,75
Or - - - - - - - -	26,75
Plomb - - - - - - -	19,50
Argent - - - - - - -	8,50
Soufre - - - - - - -	0,50
	100

Il exiſte une variété de la mine de Tellure jaune en ſtries un peu larges, d'une texture & d'une caſſure lamelleuſe, diſſéminée dans un mélange de petits criſtaux de quarz, de mine de manganèſe rouge ou noire, à quoi ſe joint le plus ſouvent de la mine de Tellure feuilletée. Il y a toute apparence que les principes conſtituans en ſont les mêmes que ceux de la mine qui vient d'être analyſée; cependant je n'ai pu conſtater ce fait dans les détails qu'il exigeroit, parce que le mélange de cette mine avec la mine feuilletée étoit ſi intime que je n'ai pu parvenir à l'en ſéparer auſſi nettement qu'il l'eût fallu pour l'objet en queſtion.

D. Mine de Tellure feuilletée. (Blätter-Erz.)

Les trois eſpèces de mine de Tellure, dont il vient d'être fait mention, & qui étoient réunies précédemment ſous la dénomination commune de *Mine d'or blanche*, (Weiſs-Gold-Erz), ſont très-eſſentiellement diſtinctes de la *mine de Tellure feuilletée* de Nagyag, autant ſous le rapport de la minéralogie, que ſous celui de la chimie. Auſſi trouve-t-on cette mine placée dans les ſyſtèmes de minéralogie modernes, comme conſtituant une eſpèce particulière parmi les mines d'or, ſous la dénomination de *Mine d'or griſe en feuillets.*

Sa couleur eſt d'un gris de plomb foncé tirant ſur le noir de fer. Il eſt aſſez rare de la trouver en maſſe, le plus ſouvent elle eſt diſſéminée en petits feuillets adhérens les uns aux autres, ou en tablettes minces

minces, alongées, hexaèdres, isolées ou bien aussi groupées en cellules. L'éclat métallique n'en est pas très-considérable. La cassure est ordinairement en feuillets courbés; ce fossile tache, & ses feuillets sont légèrement flexibles.

La roche dans laquelle on le trouve, & où il est semé dans toutes les directions, est un mélange de quarz & de manganèse rougeâtre.

L'analyse de ce fossile a déjà été tentée par *Scopoli*, *Sage* & *Ruprecht*; mais la différence très-considérable qui existe entre leurs résultats, & surtout la circonstance qu'aucun d'eux n'y a aperçu le Tellure, qui pourtant y existe en si grande proportion, suffit pour nous inspirer des doutes sur la précision de leurs travaux analytiques.

Les chimistes dont je viens de parler, n'ont pas sans doute méconnu dans ce fossile l'existence d'un élément volatil, mais ils se sont trompés en prononçant que c'étoit ou de l'arsenic, ou de l'antimoine.

I.

a) Mille grains de mine de Tellure feuilletée, séparée autant que possible de sa gangue, furent bien triturés & mis en digestion avec 10 onces d'acide muriatique. Il y eut bien quelque réaction, mais insuffisante pour produire une solution totale. J'ajoutai donc par petites portions de l'acide nitrique. Les premières gouttes de cet acide produisirent à l'instant une vive réaction, qui fit disparoître la couleur noire du minérai. La liqueur fut portée encore chaude sur un filtre; le résidu qui y demeura fut de nouveau mis en digestion avec 5 onces d'acide muriatique, & puis portée sur le même filtre qu'auparavant. Il se forma bientôt dans la solution, qui étoit jaune, ainsi que sur le filtre, une cristallisation en aiguilles. Le filtre fut édulcoré avec de l'eau bouillante, jusqu'à ce que toute cette matière saline fût dissoute, après quoi il ne resta plus que la matière quarzeuse de la gangue, mêlée à un peu de soufre.

b) Le soufre contenu dans la mine s'étoit coagulé en une masse cohérente, de façon qu'il fut aisé de l'enlever de dessus le résidu terreux. Ce soufre pesoit $17\frac{1}{2}$ grains; brûlé sur un test médiocrement échauffé,

il laiſſa $3\frac{1}{2}$ grains d'un réſidu noirâtre, qui fut diſſous par l'acide muriatique, & joint à la première ſolution. La quantité totale du ſoufre étoit donc 14 grains.

c) La portion du réſidu terreux de la gangue, compoſée de grains quarzeux, peſoit après la deſſiccation $440\frac{1}{2}$ grains. Je le mêlai avec quatre fois ſon poids de carbonate de kali, & le fondis jusqu'à la vitrification. Après avoir caſſé le creuſet, je trouvai dans la maſſe quelques globules d'argent, tellement diſſéminés que je ne pus les raſſembler convenablement. Mais une expérience ultérieure, dont je rendrai compte plus bas, m'apprit que la quantité de cet argent devoit être fixée à $2\frac{1}{2}$. Mais comme ce métal étoit dans le précipité à l'état de muriate d'argent, je devois retrancher du poids de ce précipité $3\frac{1}{2}$ grains, ce qui laiſſe un total de 437 grains.

d) La ſolution (*a*) dans laquelle l'addition de l'eau avoit produit un abondante précipitation d'oxide de Tellure, fut concentrée par l'évaporation, ce qui en opéra la rediſſolution complète. Mais par contre l'évaporation fit dépoſer, même durant une température élevée, des criſtaux abondans de muriate de plomb; je les recueillis, & continuai d'évaporer tant qu'il y eut encore formation de ces criſtaux. Quand je les eus tous raſſemblés, puis lavés ſoigneuſement par l'inſtillation de l'acide muriatique, & bien ſéchés, ils peſèrent 330 grains, ce qui correſpond à 248 grains de régule de plomb.

e) La ſolution concentrée, qui venoit d'être épurée de plomb, fut étendue d'un peu d'eau, puis j'y ajoutai abondamment de l'esprit de vin, tant que cette addition produiſit un précipité blanc. La liqueur ayant été tenue encore quelque tems en une chaleur douce, le précipité fut raſſemblé ſur un filtre, édulcoré par l'esprit de vin, rediſſous dans l'acide muriatique, & enfin précipité ſous forme d'oxide de Tellure pur, par l'addition de la ſoude cauſtique, en obſervant rigoureuſement d'arriver à la ſaturation préciſe. Ce précipité édulcoré & ſéché peſoit 178 grains, qui correſpondent à 148 grains de Tellure en métal.

f) Pour obtenir l'or, la ſolution dont le Tellure venoit d'être retiré fut verſée dans une cornue, & concentrée par la diſtillation. La ſolution concentrée fut de nouveau étendue d'eau, puis j'y verſai goutte à goutte une ſolution de nitrate de mercure, préparé à froid, jusqu'à ce qu'il ne parut plus de précipité brun, & que le précipité blanc qui lui ſuccéda, ne changea plus ſa couleur. Le mélange fut enſuite expoſé à la chaleur, qui opéra la rediſſolution ſucceſſive du précipité blanc, qu'avoit formé l'excédent de la ſolution de nitrate de mercure, au-delà de ce qui étoit néceſſaire pour la précipitation de l'or. Le précipité d'or qui offroit l'apparence d'une poudre brune & peſante, fut raſſemblé & fondu dans un petit creuſet avec du nitre. Il donna un bouton d'or pur, du poids de $41\frac{1}{2}$ grains.

g) La liqueur fut enſuite chauffée à l'ébullition, & dans cette température ſaturée de carbonate de ſoude. Il tomba un précipité abondant de couleur griſe tirant ſur le bleu, qui devint d'un brun noir par la chaleur incandescente. Mis en digeſtion avec l'acide muriatique il s'y rediſſolut entièrement en répandant des vapeurs d'acide muriatique ſuroxigène. Cette ſolution fut enſuite précipitée par le carbonate d'ammoniaque, ajouté jusqu'à ſurfaturation très-marquée. Il ſe forma par là un précipité gris tirant ſur le blanc, qui raſſemblé, édulcoré & ſéché peſoit 92 grains, & ſe trouva être de l'oxide de manganèſe carbonique & mêlé d'un peu de fer.

h) La liqueur ammoniacale (*g*) avoit adopté une couleur bleue. Surſaturée d'acide ſulfurique, elle perdit ſa couleur; j'y plongeai un petit barreau de fer poli, & je tins le vaſe dans une douce chaleur. Le fer ſe couvrit peu-à-peu de cuivre, qui peſoit après la deſſiccation 6 grains.

Par ces procédés les 1000 grains de mine de Tellure feuilletée ſe trouvèrent donc décompoſés en

Plomb (*d*)	248	grains.
Tellure (*e*)	148	—
Or (*f*)	41,50	—
Argent (*c*)	2,50	—
Cuivre (*h*)	6	—
Soufre (*b*)	14	—
Oxide de manganèſe (*g*)	92	—
Quarz (*c*)	437	—
	989	
Perte	11	
Total	1000	

Comme néanmoins les deux derniers élémens indiqués appartiennent à la gangue, qui eſt une roche mêlée de quarz & de manganèſe, & n'appartiennent pas par conſéquent eſſentiellement à la mine de Tellure, les élémens de celle-ci doivent être énoncés comme ſuit

Plomb	54
Tellure	32,2
Or	9
Argent	0,5
Cuivre	1,3
Soufre	3
	100

II.

Pour pouvoir préciſer la quantité de l'argent, 500 grains de la même mine furent broyés, extraits par la digeſtion avec de l'acide nitrique médiocrement fort, & la ſolution ainſi obtenue fut mêlée de muriate de ſoude, ce qui donna ſur-le-champ à la ſolution une couleur foiblement laiteuſe. Échauffée jusqu'à un certain point elle s'éclaircit de nouveau, & laiſſa dépoſer un précipité, qui étoit du muriate d'argent, & qui réduit avec les précautions requiſes, donna un bouton de $1\frac{1}{4}$ grains.

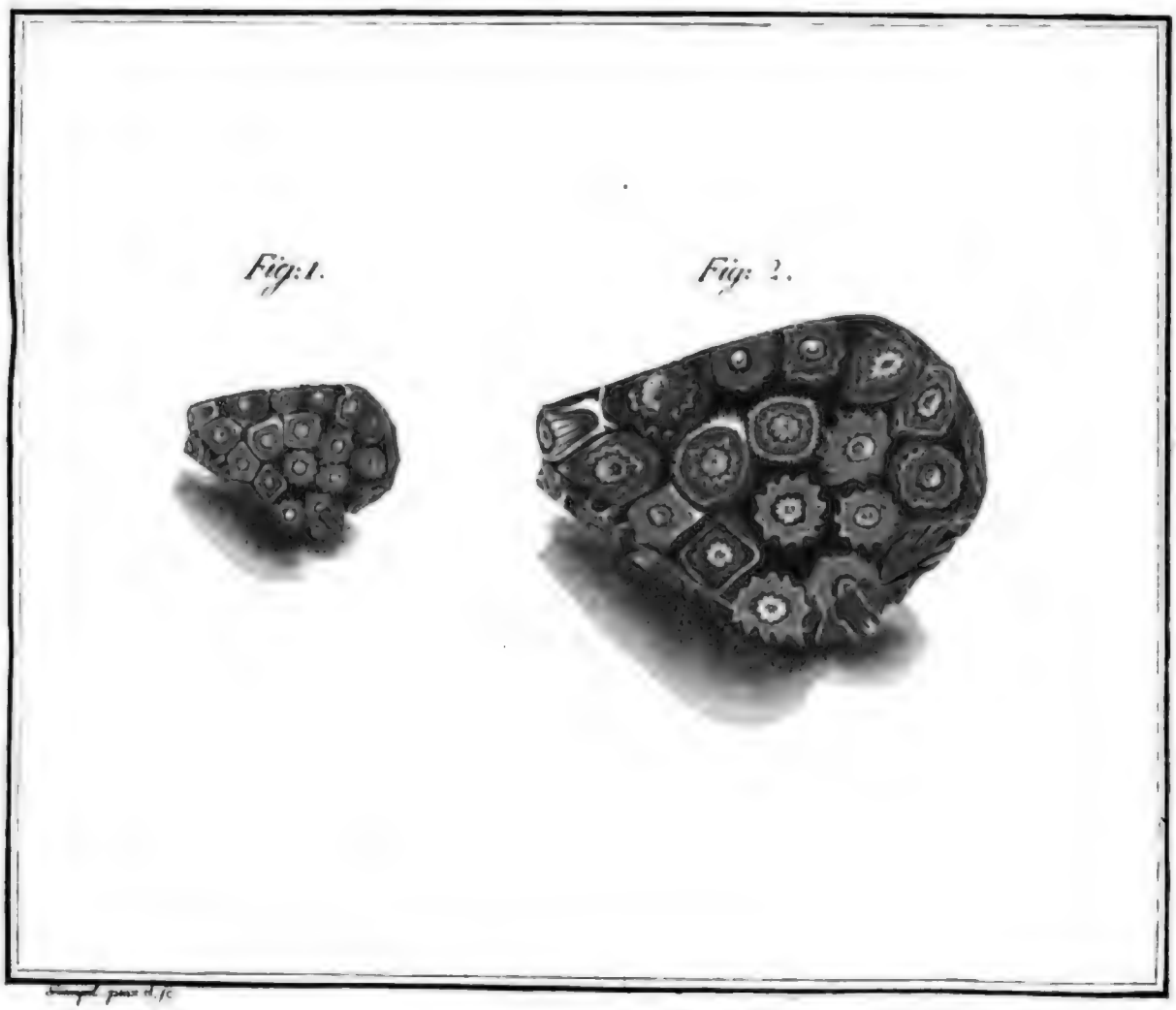


Fig: 1.
Fig: 2.

Digitized by Google

III.

Une autre portion de la même mine, mêlée de peu de gangue, fut encore ſoumiſe à l'analyſe par la voie humide, pour déterminer avec préciſion la quantité d'or & d'argent qui s'y trouveroit.

200 grains furent mis en digeſtion avec l'acide nitrique jusqu'à ce qu'il ne parut plus de réaction. La ſolution claire obtenue par là fut mêlée de muriate de ſoude, qui y produiſit un précipité blanc. La liqueur fut étendue de beaucoup d'eau & miſe en ébullition. Le muriate d'argent qui demeura donna un bouton de $\frac{1}{2}$ grain.

La portion indiſſoute du minérai fut enſuite traitée par l'acide nitro-muriatique, jusqu'à ce que tout fut diſſous, excepté la ſeule terre quarzeuſe. La ſolution fut étendue d'eau filtrée, & j'y ajoutai du ſulfate de fer. L'or qui ſe précipita par cet intermède fut lavé, & ayant été torréfié il peſoit $13\frac{1}{2}$ grains.

Les recherches dont je viens de rendre compte, & que j'ai répétées plus d'une fois en y apportant de nouvelles modifications, me permettent d'eſpérer que j'ai terminé les incertitudes des minéralogiſtes ſur la nature de la mine d'or de Tranſylvanie, & ſur l'exiſtence du nouveau métal qu'elle contient. Les minéralogiſtes & les chimiſtes doivent maintenant réunir leurs efforts pour nous apprendre ſi le Tellure ſe trouve encore en d'autres lieux, ou ſi l'on doit l'enviſager comme un don excluſivement accordé par la nature aux mines d'or de la Tranſylvaine.

ANALYSE
de quelques expériences faites ſur la dilatation des fluides élaſtiques.

PAR M. JEAN TREMBLEY *).

§ 1.

On trouve dans le ſecond cahier du Journal de l'école polytechnique, publié à Paris en 1795, un mémoire de M. Prony qui contient l'analyſe de quelques expériences faites par M. Prieur ſur les dilatations de pluſieurs fluides élaſtiques, opérées par l'augmentation de la chaleur. M. Prieur avoit rempli un ballon d'air & l'avoit fermé avec un bouchon bien maſtiqué, portant un ſyphon recourbé; ce vaiſſeau avoit été plongé dans une eau dont la température étoit entretenue à zéro du thermomètre de Réaumur par le moyen de la glace fondante. Ce bain avoit été placé d'avance ſur un fourneau, & on y avoit mis un thermomètre dont la boule deſcendoit à-peu-près au niveau du centre du ballon, & dont l'échelle s'élevoit au-deſſus de la ſurface de l'eau ſans toucher aux bords de la chaudière. Lorsque le ballon avoit pris la température du bain, on engageoit le ſyphon dans un récipient plein de mercure, renverſé dans une cuvette de neuf pouces de diamètre, au milieu de laquelle il étoit placé perpendicu-

*) Lu à l'Académie le 1 mars 1798.

lairement & ſolidement aſſujetti; enfin on allumait du feu ſous la chaudière. L'eau du bain ayant été échauffée ſucceſſivement à 20, 40, 60, 80 degrés, M. Prieur nota exactement au moyen d'une double échelle collée ſur le récipient, l'abaiſſement du mercure occaſioné par l'expanſion de l'air qui s'y étoit introduit, & meſura en même temps la hauteur de la colonne de mercure au-deſſus du niveau de la cuvette.

§ 2. Je n'ai fait ici que décrire en abrégé l'appareil de l'expérience, on peut en voir les détails dans le mémoire cité. Cela poſé, M. Prieur prit pour unité le volume de l'air à la température de la glace, & obſerva les dilatations de l'air ou des gaz qu'il mit en expérience, en parties du volume primitif. Appelant donc x le degré du thermomètre, & ζ°, ζ', ζ'', ζ''', ζ^{IV}, les dilatations correſpondantes aux degrés 0, 20, 40, 60, 80, on a les réſultats de M. Prieur renfermés dans la table ſuivante:

Fluides.	ζ°	ζ'	ζ''	ζ'''	ζ^{IV}
Air commun - -	0	0,0789	0,2572	0,6588	(0,9389)
Gaz oxygène - -	0	0,0452	0,2485	0,9021	(4,4801)
Gaz azote - - -	0	0,0340	0,2188	0,7683	5,9431
Gaz hydrogène -	0	0,0840	0,2285	(0,3745)	(0,3915)
Gaz nitreux - -	0	0,06523	0,17634	0,44379	(0,6029)
Gaz acide carbonique	0	0,11051	0,30663	0,73953	(1,01053)
Gaz ammonical -	0	0,27933	0,85076	2,59150	(5,80472)

Les nombres renfermés entre deux parenthèſes indiquent les obſervations douteuſes.

§ 3. M. Prony a entrepris de découvrir la loi que ſuivent les réſultats contenus dans cette table, & a employé pour cela la théorie connue des ſuites recurrentes. Je me propoſe de faire là-deſſus quelques obſervatioons que je ſoumets au jugement des phyſiciens, & en particulier à celui de M. Prony, ce ſavant mathématicien étant plus que perſonne en état de les apprécier & d'éclaircir les doutes que je

ne préſente ici qu'avec la réſerve qui me convient à tous égards. La première réflexion qui s'offre à l'esprit, eſt que le nombre des obſervations qu'il s'agit de calculer eſt bien petit, puisque l'on n'a que quatre obſervations pour chaque fluide, encore entre ces obſervations y en a-t-il de douteuſes. Or les méthodes qu'ont données les géomètres, en particulier M. de la Grange & M. de Condorcet, ſuppoſent que la loi trouvée par ces méthodes puiſſe ſe vérifier par des obſervations réelles ſituées hors de l'espace qu'occupent les obſervations calculées. Cet avantage ne peut avoir lieu ici, en ſorte que lors même que tout iroit bien d'ailleurs, la loi trouvée par M. Prony ne pourroit inſpirer une confiance abſolue, puisque d'un côté, toutes les obſervations ayant été employées dans les calculs, il n'en reſte aucune pour vérifier la loi trouvée, & que de l'autre les obſervations ſont en trop petit nombre pour que les degrés intermédiaires puiſſent être aſſignés avec une certaine probabilité. Mais nous allons voir que les réſultats & les calculs de M. Prony ſont ſuſceptibles d'objections d'un autre genre, qu'il eſt important de discuter.

§ 4. M. Prony commence par analyſer les obſervations faites ſur l'air commun, mais comme cette matière exige une discuſſion plus approfondie, & que M. Prony rejette la dernière obſervation comme abſolument fautive, je traiterai ce ſujet à la fin de ce mémoire, & je commencerai par les obſervations faites ſur l'air oxygène. M. Prony a cinq obſervations, parce qu'il compte la ſuppoſition $\zeta^{\circ} = 0$ pour une obſervation. Il prend leurs premières différences. Il avoit d'abord fait entrer ces quatre obſervations dans le calcul pour l'air commun, mais n'étant pas content des réſultats, il s'eſt borné enſuite & pour l'air commun & pour les autres airs, à combiner les différences deux à deux, en ſuppoſant que les différences priſes entre les obſervations forment une progreſſion géométrique. Appelant $\zeta^{(x)}$ le terme général, il prend pour ſatisfaire aux obſervations la formule $\zeta^{(x)} = \mu(\varrho^{(x)} - 1)$, ce qui donne pour la ſuite des obſervations mêmes:

ζ°

ζ° ζ' ζ'' ζ''' ζ^{IV}
0, $\mu(\varrho - 1)$, $\mu(\varrho^2 - 1)$, $\mu(\varrho^3 - 1)$, $\mu(\varrho^{IV} - 1)$ &c.
dont les différences forment la ſuite,
$\mu(\varrho - 1)$, $\mu\varrho(\varrho - 1)$, $\mu\varrho^2(\varrho - 1)$, $\mu\varrho^3(\varrho - 1)$ &c.
progreſſion géométrique, dont chaque terme eſt égal au précédent multiplié par ϱ. Comme M. Prieur n'a obſervé que de 20° en 20°, j'ai fait ici $\varrho^{20} = \varrho$. Voici maintenant les obſervations ſur l'air oxygène,

$x = 0$	$x = 20°$	$x = 40°$	$x = 60°$	$x = 80°$
$\zeta^{\circ} = 0$	$\zeta' = 0{,}0452$	$\zeta'' = 0{,}2485$	$\zeta''' = 0{,}9021$	$\zeta^{IV} = 4{,}4801$

On tire de là $\Delta\zeta^{\circ} = \zeta' - \zeta^{\circ} = 0{,}452$; $\Delta\zeta' = \zeta'' - \zeta' = 0{,}2033$; $\Delta\zeta'' = \zeta''' - \zeta'' = 0{,}6536$; $\Delta\zeta''' = \zeta^{IV} - \zeta''' = 3{,}5780$. J'ai donc ici $\mu(\varrho - 1) = 0{,}0452$, $\varrho = \frac{0{,}2033}{0{,}0452}$, $\mu = \frac{0{,}0452}{\varrho - 1}$. On tire de là $\varrho = 4{,}4977$; $\varrho^2 = 20{,}230$; $\varrho^3 = 90{,}991$; $\varrho^4 = 409{,}257$. D'après cette ſuppoſition la ſuite des différences forme la progreſſion
0,0452 (1; 4,4977; 20,230; 90,991). Au lieu que par l'obſervation elle forme la progreſſion

$$0{,}0452\left(1;\ \frac{0{,}2033}{0{,}0452};\ \frac{0{,}6536}{0{,}0452};\ \frac{3{,}5780}{0{,}0452}\right) \text{ ou}$$

0,0452 (1; 4,4977; 14,4602; 79,1593).

L'on voit par là que la ſuite des différences données par l'obſervation diffère beaucoup de la progreſſion géométrique. La formule adoptée par M. Prony ne paroît donc pas réſulter de la nature des choſes. Et les doutes qui s'élèvent de là contre l'exiſtence de cette loi ſi ſimple & ſi générale, que ſuivroient les fluides élaſtiques dans leurs dilatations, & qui faciliteroit tant de recherches phyſiques & mathématiques, en particulier la meſure des hauteurs par le baromètre, ces doutes, dis-je, ſemblent mériter que M. Prony les examine avec quelque attention.

§ 5. Mais, dira-t-on, M. Prony trouve dans ſon mémoire, que ſa formule ſatisfait fort bien aux obſervations. J'en conviens, mais j'ai deux remarques à faire là-deſſus. La première eſt que les calculs

numériques de M. Prony différent des miens. Il trouve $\varrho = 4{,}18008$, au lieu que je trouve $\varrho = 4{,}4977$; cependant la formule d'après laquelle j'ai calculé la valeur de ϱ eſt la même que celle de M. Prony, ſavoir $\varrho = \frac{\Delta\, \zeta^{I}}{\Delta\, \zeta^{0}}$. Enſuite M. Prony trouve $\mu = 0{,}01484$, au lieu que je trouve $\mu = 0{,}01292$. Cette différence vient de la différence des valeurs de ϱ. Calculant d'après ces données M. Prony auroit trouvé,

ζ^{0}	ζ'	ζ''	ζ'''	ζ^{IV}	
0;	0,0452;	0,2485;	1,1629;	5,2757	Calcul,
0;	0,0452;	0,2485;	0,9021;	4,2801	Obſervation,
			+ 0,2608;	+ 0,7956	Différences.

On voit que d'après ce calcul, ces différences deviennent conſidérables, & s'écartent beaucoup des concluſions de M. Prony. Mais au lieu de prendre $\zeta' = 0{,}0452$, $\zeta'' = 0{,}2485$, il prend $\zeta' = 0{,}0472$, $\zeta'' = 0{,}2445$, ce qui donne $\zeta'' - \zeta' = 0{;}1973$, au lieu que j'ai $\zeta'' - \zeta' = 0{,}2033$. C'eſt de là que vient la différence de nos valeurs de ϱ. J'ignore la raiſon pour laquelle cet habile mathématicien a altéré ces valeurs de ζ' & ζ''. Ce ne peut être uniquement pour ſatisfaire aux obſervations, puiſqu'il ne s'agit pas ici de ſatisfaire empiriquement à quelques obſervations, mais de découvrir ſi les réſultats ſuivent une certaine loi ou non; il faut donc prendre ces réſultats tels que les donne l'expérience, comme l'a fait M. Prony pour l'air commun.

§ 6. Ma ſeconde remarque eſt que les différences entre la ſuite réelle & la ſuite géométrique ſe découvrent beaucoup plus vite lorſqu'on ne conſidère que les rapports des termes, que lorſqu'on conſidère la valeur abſolue de ces termes, parce que le premier terme étant fort petit rend les différences beaucoup moins conſidérables; elles ne ſont plus dans les valeurs abſolues, qu'environ la vingtième de ce qu'elles ſont dans les rapports. Il y a donc beaucoup d'avantage à conſidérer les rapports des termes, par la raiſon que j'ai alléguée ci-deſſus, c'eſt qu'il s'agit de découvrir quelle loi ſuivent ces termes. Le premier terme pourroit être tellement petit qu'il rendroit inſenſibles des différences très-conſidérables.

§ 7. Je paſſe aux obſervations faites ſur l'azote. On a

$x = 0$	$x = 20°$	$x = 40°$	$x = 60°$	$x = 80°$
$\zeta^{\circ} = 0$	$\zeta' = 0{,}0340$	$\zeta'' = 0{,}2188$	$\zeta''' = 0{,}7683$	$\zeta^{IV} = 5{,}9431.$

On déduit de là $\Delta\zeta^{\circ} = 0{,}0340$, $\Delta\zeta' = 0{,}1848$, $\Delta\zeta'' = 0{,}5495$, $\Delta\zeta''' = 5{,}1748$. Donc $\varsigma = 5{,}4353$, $= \frac{0{,}1848}{0{,}0340}$, $\varsigma^2 = 29{,}5424$, $\varsigma^3 = 160{,}572$, $\varsigma^4 = 872{,}755$. D'après cette ſuppoſition la ſuite des différences donne la progreſſion

0,0340 (1; 5,4353; 29,5424; 160,572), au lieu que d'après l'obſervation elle forme la progreſſion

0,0340 (1; 5,4353; 16,1618; 152,2). La ſérie réelle diffère donc encore beaucoup de la ſérie géométrique, & ne peut être confondue avec elle. M. Prony trouve encore ici une valeur de ς différente de la mienne, il trouve $\varsigma = 5{,}19424$, au lieu que je trouve $\varsigma = 5{,}4353$. Calculant d'après nos données M. Prony auroit trouvé

ζ°	ζ'	ζ''	ζ'''	ζ^{IV}	
0,	0,0340,	0,2188,	1,22261,	6,68268	Calcul,
0,	0,0340,	0,2188,	$\frac{0{,}7683}{0{,}45431}$,	$\frac{5{,}9431}{0{,}73958}$	Obſervation, Différences.

Les différences ſont encore ici conſidérables, & je trouve comme dans le cas précédent que M. Prony au lieu de prendre $\zeta' = 0{,}0340$, $\zeta'' = 0{,}2188$, prend $\zeta' = 0{,}035$, $\zeta'' = 0{,}2168$, ce qui donne $\zeta'' - \zeta' = 0{,}1818$, au lieu que j'ai eu $\zeta'' - \zeta' = 0{,}1848$. Voilà pourquoi M. Prony a trouvé une valeur de ς plus petite que moi. On obſervera auſſi, comme dans le cas précédent, que le premier terme n'étant que $\frac{1}{29}$ de l'unité rend les différences des quantités abſolues fort petites en comparaiſon des rapports des termes d'après leſquels on doit décider ſi la ſuite géométrique a lieu ou non.

§ 8. Venons aux obſervations faites ſur le gaz hydrogène. On a

$x = 0$	$x = 20°$	$x = 40°$	$x = 60°$	$x = 80°$
$\zeta^{\circ} = 0$	$\zeta' = 0{,}0840$	$\zeta'' = 0{,}2285$	$\zeta''' = 0{,}3745$	$\zeta^{IV} = 0{,}3915.$

On déduit de là $\Delta\zeta^{\circ} = 0{,}0840$, $\Delta\zeta' = 0{,}1445$, $\Delta\zeta'' = 0{,}1460$,

$\Delta\zeta''' = 0{,}0170$. Donc $\varepsilon = \frac{0{,}1445}{0{,}0840} = 1{,}7202$, $\varepsilon^2 = 2{,}9592$, $\varepsilon^3 = 5{,}0906$. D'après cette ſuppoſition la ſuite des différences forme la progreſſion

0,0840 (1; 1,7202; 2,9592; 5,0906)

au lieu que d'après l'obſervation elle forme la progreſſion,

0,0840 (1; 1,7202, 1,7381). On voit que les troiſièmes termes ne s'accordent pas. Je n'ai pas calculé le 4me terme, parce qu'il s'écarte trop de l'analogie. M. Prony trouve encore ici une valeur de ε différente de la mienne, il trouve $\varepsilon = 1{,}18334$, au lieu que je trouve $\varepsilon = 1{,}7202$. Calculant d'après nos données M. Prony auroit trouvé

ζ^0	ζ'	ζ''	ζ'''	
0,	0,0840,	0,2285,	0,4782	Calcul,
0,	0,0840,	0,2285,	$\frac{0{,}3745}{0{,}1037}$	Obſervation, Différence.

La différence eſt moins forte que dans les cas précédens, mais elle eſt encore très-ſenſible. D'ailleurs le 4e terme n'ayant pu ſe prêter au calcul, il ſeroit difficile de tirer une concluſion ſolide de l'accord d'un ſeul terme, lors même qu'il ſeroit parfait. M. Prony au lieu de prendre $\zeta' = 0{,}0840$, $\zeta'' = 0{,}2285$, prend $\zeta' = 0{,}0935$, $\zeta'' = 0{,}2041$, ce qui donne $\zeta'' - \zeta' = 0{,}1106$, au lieu que j'ai $\zeta'' - \zeta' = 0{,}1445$. Les mêmes remarques reviennent encore ici, & le premier terme n'étant guères que $\frac{1}{12}$ de l'unité, diminue conſidérablement les valeurs abſolues des termes & par conſéquent leurs différences.

§ 9. Suivent les obſervations faites ſur le gaz nitreux. On a

$x = 0$	$x = 20°$	$x = 40°$	$x = 60°$	$x = 80°$
$\zeta^0 = 0$	$\zeta' = 0{,}06523$	$\zeta'' = 0{,}17634$	$\zeta''' = 0{,}44379$	$\zeta^{IV} = 0{,}60290$.

On déduit de là $\Delta\zeta^0 = 0{,}06523$, $\Delta\zeta' = 0{,}11111$, $\Delta\zeta'' = 0{,}26745$, $\Delta\zeta''' = 0{,}15911$. Donc $\varepsilon = \frac{0{,}11111}{0{,}06523} = 1{,}70336$, $\varepsilon^2 = 2{,}9012$, $\varepsilon^3 = 4{,}9423$, $\varepsilon^4 = 8{,}4183$. D'après cette ſuppoſition la ſuite des différences forme la progreſſion

0,06523, (1; 1,70336; 2,9012; 4,9423)

au lieu que d'après l'obſervation, elle forme la progreſſion

0,06523, (1; 1,70336; 4,1001; 2,4392).

Ces deux ſuites ne s'accordent pas. Cependant M. Prony trouve la même valeur de φ que moi. Calculant d'après ces données je trouve,

ζ°	ζ'	ζ''	ζ'''	ζ^{IV}	
0,	0,6523,	0,17634,	0,36561,	0,68798	Calcul,
0,	0,6523,	0,17634,	$-\frac{0,44379}{0,07818}$,	$+\frac{0,60290}{0,08508}$	Obſervation, Différences,

ce qui s'accorde fort bien avec ce que trouve M. Prony. On a ici une preuve de la vérité de ce que j'ai dit plus haut, qu'on peut ſatisfaire aſſez bien aux obſervations, ſans que pour cela la loi ſuppoſée ſe trouve légitime. En effet je trouve dans ce cas les valeurs de φ & de μ préciſément les mêmes que M. Prony, & par conſéquent la ſuite des réſultats calculés eſt la même, les différences d'avec les réſultats calculés ſont de $\frac{8}{100}$ environ en plus & en moins, & cependant la ſuite des différences calculées diffère eſſentiellement de celle des différences obſervées; celles-ci augmentant d'abord, puis diminuant, au lieu que les autres vont toujours en augmentant. Et indépendamment de ce que le premier terme n'eſt que $\frac{65}{100}$ de l'unité, ce qui diminue conſidérablement les valeurs abſolues des termes, on remarquera que la différence de $\frac{8}{100}$ retranchée de ζ''' & ajoutée à ζ^{IV} fera que $\zeta^{IV} - \zeta''' = \Delta\zeta'''$ augmentera de $\frac{16}{100}$, tandis que $\zeta''' - \zeta'' = \Delta\zeta''$ diminuera de $\frac{8}{100}$, en ſorte que l'excès de $\Delta\zeta'''$ ſur $\Delta\zeta''$ augmentera de $\frac{24}{100}$, ce qui ne peut être négligé. Il faut donc néceſſairement conſidérer la loi des différences mêmes, ſans quoi l'on peut tomber dans des erreurs très-ſenſibles.

§ 10. Je viens aux obſervations faites ſur le gaz acide carbonique. On a

$x = 0$	$x = 20^{\circ}$	$x = 40^{\circ}$	$x = 60^{\circ}$	$x = 80^{\circ}$
$\zeta^{\circ} = 0$	$\zeta' = 0,110511$	$\zeta'' = 0,30663$	$\zeta''' = 0,73953$	$\zeta^{IV} = 1,01053.$

On déduit de là $\Delta\zeta^{\circ} = 0{,}11051$, $\Delta\zeta' = 0{,}19612$, $\Delta\zeta'' = 0{,}43290$, $\Delta\zeta''' = 0{,}27100$. Donc $\varsigma = \frac{0{,}19612}{0{,}11051} = 1{,}77468$, $\varsigma^2 = 3{,}1495$, $\varsigma^3 = 5{,}5894$, $\varsigma^4 = 9{,}9193$. D'après cette ſuppoſition la ſuite des différences forme la progreſſion

0,11051, (1; 1,77468; 3,1495; 5,5894)

au lieu que d'après l'obſervation, elle forme la progreſſion

0,11051, (1; 1,77468; 3,9173; 2,4523).

L'on voit que les deux ſéries ne s'accordent pas. M. Prony trouve dans ce cas pour ς la même valeur que moi. Calculant d'après ces données, on a

ζ°	ζ'	ζ''	ζ'''	ζ^{IV}	
0;	0,11051;	0,30663;	0,65469;	1,2724	Calcul,
0;	0,11051;	0,30663;	$\frac{0{,}73953;}{-0{,}08484;}$	$\frac{1{,}01053}{+0{,}26187}$	Obſervation, Différences.

Dans ce cas comme dans le précédent on peut aſſez bien ſatisfaire aux obſervations, quoique la loi ne paroiſſe pas juſte; cependant la valeur de ζ^{IV} ne peut être regardée comme bien ſatisfaiſante, l'excès $\frac{26}{100}$ étant un peu fort. Le premier terme eſt ici $\frac{11}{100}$ de l'unité, ce qui diminue beaucoup les valeurs abſolues des termes, & de plus ſi l'on retranche de ζ''', $\frac{8}{100}$ & qu'on ajoute $\frac{26}{100}$ à ζ^{IV} on fera que $\zeta^{IV} - \zeta''' = \Delta\zeta'''$ augmentera de $\frac{34}{100}$ & que $\zeta''' - \zeta'' = \Delta\zeta''$ diminuera de $\frac{9}{100}$, en ſorte que l'excès de $\Delta\zeta'''$ ſur $\Delta\zeta''$ augmentera de $\frac{42}{100}$, ce qui eſt aſſez conſidérable. Ceci paroît confirmer les raiſonnemens du § préc.

§ 11. Voici maintenant les obſervations faites ſur le gaz ammonical. On a

$x = 0$	$x = 20^{\circ}$	$x = 40^{\circ}$	$x = 60^{\circ}$	$x = 80^{\circ}$
$\zeta^{\circ} = 0$	$\zeta' = 0{,}27933$	$\zeta'' = 0{,}85076$	$\zeta''' = 2{,}59150$	$\zeta^{IV} = 5{,}80472.$

On déduit de là $\Delta\zeta^{\circ} = 0{,}27933$; $\Delta\zeta' = 0{,}57143$; $\Delta\zeta'' = 1{,}74074$; $\Delta\zeta''' = 3{,}21322$. Donc $\varsigma = 2{,}0457$; $\varsigma^2 = 4{,}1850$; $\varsigma^3 = 8{,}5612$; $\varsigma^4 = 17{,}514$. D'après cette ſuppoſition la ſuite des différences donne

la progreſſion, 0,27933, (1; 2,0457; 4,1850; 8,5612)
au lieu que d'après l'obſervation, elle forme la progreſſion,

0,27933, (1; 2,0457; 6,23195; 11,5033).

On voit que les différences entre les deux ſuites ſont conſidérables. M. Prony trouve ici $\varrho = 2{,}35245$ au lieu que je trouve $\varrho = 2{,}0457$. Calculant d'après nos données, M. Prony auroit trouvé

ζ°	ζ'	ζ''	ζ'''	ζ^{IV}	
0;	0,27933;	0,85078;	2,0198;	4,4113	Calcul,
0;	0,27933;	0,85078;	2,59150;	5,80472	Obſervation,
			— 0,5717;	— 0,39342	Différences.

Ces différences paroiſſent trop fortes pour pouvoir être négligées. M. Prony au lieu de prendre $\zeta' = 0{,}27933$; $\zeta'' = 0{,}85078$ a pris $\zeta' = 0{,}2633$, $\zeta'' = 0{,}8827$, ce qui donne $\zeta'' - \zeta' = 0{,}6194$, au lieu de $\zeta'' - \zeta' = 0{,}57143$. Le premier terme étant d'environ $\frac{1}{4}$ diminue encore ſenſiblement les valeurs abſolues des termes. Ainſi l'on peut faire ici les mêmes obſervations que celles que j'ai données dans les §§ 7, 8 & 9.

§ 12. Je viens enfin aux obſervations faites ſur l'air commun. On a

$x = 0$	$x = 20°$	$x = 40°$	$x = 60°$	$x = 80°$
$\zeta^{\circ} = 0$	$\zeta' = 0{,}0789$	$\zeta'' = 0{,}2572$	$\zeta''' = 0{,}6588$	$\zeta^{IV} = 0{,}9389$

On déduit de là $\Delta\zeta^{\circ} = 0{,}0789$; $\Delta\zeta' = 0{,}1783$; $\Delta\zeta'' = 0{,}4016$; $\Delta\zeta''' = 0{,}2801$. Donc $\varrho = 2{,}2597$; $\varrho^2 = 5{,}1068$; $\varrho^3 = 11{,}5405$; $\varrho^4 = 26{,}1395$. D'après ces ſuppoſitions la ſuite des différences donne la progreſſion 0,0789, (1; 2,2597; 5,1068; 11,5405)
au lieu que d'après l'obſervation elle forme la progreſſion

0,0789, (1; 2,2597; 5,0900; 3,5500).

Ces deux ſéries s'accordent aſſez bien, à la dernière obſervation près, que M. Prony rejette comme fautive. Il emploie la même valeur de ϱ que moi. Calculant d'après ces données, on a la ſuite

ζ°	ζ'	ζ''	ζ'''	ζ^{IV}	
0;	0,0789;	0,2572;	0,66602;	1,5746	Calcul,
0;	0,0789;	0,2572;	0,6588;	0,9389	Obſervation,
			— 0,00014;	— 0,6357	Différences.

M. Prony rejette la 4me obſervation comme s'écartant trop des autres, & comme étant d'ailleurs ſuſpecte à cauſe de l'oxidation du mercure, produite dans les hautes températures. Il ne reſte donc que trois obſervations, dont les deux premières fourniſſent par leur combinaiſon la loi de la ſuite. Il ne reſte donc que la troiſième dont l'accord avec les deux premières paroît à M. Prony une preuve ſuffiſante de la réalité de cette loi. En conſéquence cet habile mathématicien a calculé d'après cette loi les dilatations de l'air & des autres fluides élaſtiques pour tous les degrés du thermomètre centigrade depuis l'eau bouillante jusqu'à 30° au-deſſous de la glace. Je ne ſais ſi M. Prony ne s'eſt point un peu hâté, & ſi l'accord d'une ſeule obſervation peut ſuffire pour établir l'exiſtence d'une loi auſſi importante en phyſique que l'eſt celle de la dilatation de l'air par la chaleur. Mais j'ai quelques difficultés à propoſer auxquelles je deſire que M. Prony veuille bien accorder quelque attention.

§ 13. J'obſerve d'abord que M. Prony voulant appliquer la loi qu'il a découverte, à la meſure des hauteurs par le baromètre, cherche d'après cette loi le rapport de la dilatation de l'air à ſon volume pour un degré de variation dans la température, & appelant R ce rapport, il trouve $R = \frac{\mu(\varrho-1)\varrho^x}{1-\mu+\mu\varrho^x}$, ϱ étant calculé ici pour des différences de degré en degré, & non, comme nous l'avons fait ci-deſſus, pour des différences priſes de vingt degrés en vingt degrés. Il tire de là la valeur de x, & en conclut que les évaluations de R données par différens phyſiciens ne diffèrent principalement entre elles que parce qu'elles ſe rapportent à différens degrés de température. En conſéquence il prend les valeurs de R rapportées par MM. de Sauſſure, de Luc, Trembley, Monge, Bertholet, Vandermonde & Roy, & aſſigne les degrés du thermomètre auxquels ces obſervations ſe rapportent. Pour ce qui regarde M. de Luc, le degré qu'aſſigne M. Prony ne diffère pas beaucoup de celui qu'a aſſigné ce célèbre phyſicien. Pour ce qui me regarde, j'obſerverai préliminairement que mon travail n'a aucun rapport avec

avec celui des phyſiciens que cite M. Prony, que je n'ai jamais prétendu déterminer la loi que ſuit la nature, que mon unique but a été de faire voir qu'il y avoit encore beaucoup d'incertitude à cet égard, & qu'il étoit important, avant d'établir une règle abſolument déterminée, de faire de nouvelles obſervations. J'ai inſiſté ſur ce point & dans le mémoire même & dans le petit avertiſſement qui le précède, & j'ai dit qu'on ne devoit regarder le réſultat de mes calculs que comme un exemple, & non comme la baſe d'une règle fixe. Mais ſi l'on veut faire entrer cet exemple en ligne de compte, le réſultat diffère beaucoup de celui de M. Prony, qui rapporte la valeur de R que j'ai trouvée, à 19°,68 du thermomètre de Réaumur, tandis que je la rapporte dans mon mémoire à 11°,5. Il y a auſſi une différence conſidérable pour ce qui regarde le général Roy. Quant à M. de Sauſſure, il n'a jamais donné de détermination de la valeur de R; celle que cite M. Prony eſt uniquement déduite de l'obſervation faite au ſommet du Mont-Blanc; or une ſeule obſervation ne ſuffit pas pour déterminer ce rapport, & de plus, M. de Sauſſure a obſervé lui-même que l'obſervation du Mont-Blanc avoit des caractères particuliers, qui ne permettoient pas qu'on la confondît avec les autres obſervations, à cauſe de la température froide de la couche d'air qui longe le Mont-Blanc. D'ailleurs M. de Sauſſure avoit d'abord comparé le thermomètre obſervé ſur le Mont-Blanc, avec le thermomètre obſervé à Genève, ce qui eſt une méthode très-peu ſûre, & en ſubſtituant à l'obſervation de Genève, l'obſervation faite à Chamouny, par M. de Sauſſure le fils, on auroit eu un degré du thermomètre fort au deſſous de 13°,09 qu'aſſigne M. Prony. Enfin les 85 obſervations que M. de Sauſſure a faites au Col du Géant, comparées avec les obſervations correſpondantes faites à Chamouny, donnent un réſultat fort différent des obſervations du Mont-Blanc

Table de M. Prony.
$R = \frac{1}{235}$, $x = 13°,09$
$R = \frac{1}{215}$, $x = 15°,53$
$R = \frac{1}{192}$, $x = 19°,68$

J'obſerverai en ſecond lieu que d'après la table de M. Prony le degré du thermomètre qu'il déſigne par x croît avec R, au lieu que par les réſultats que j'ai déduits d'un grand

$R = \frac{1}{194,83}$, $x = 19°75$ | nombre d'obſervations, faites par divers phy-
$R = \frac{1}{170}$, $x = 22°12$ | ſiciens, quoique les variations de R ſoient fort irrégulières, cependant il paroît que R croît à meſure que x diminue, ce qui eſt préciſément le contraire de la formule de M. Prony. On peut voir la table que j'ai donnée dans le mémoire cité. Et l'on ne peut pas trop concilier la loi de M. Prony avec les obſervations les plus concordantes entre elles. Par exemple, d'après la formule de M. Prony, on devroit avoir pour $x = 0$, $R = \frac{26}{10000}$, au lieu que dans le mémoire cité, je trouve en combinant ſept obſervations faites aux environs de zéro (la moyenne x étant $= 0,53$) $R = \frac{1}{180} = \frac{55}{10000}$, ce qui eſt plus du double. On trouveroit des différences encore plus conſidérables, ſi l'on calculoit les obſervations faites au deſſous de zéro. La théorie de M. Prony diffère donc beaucoup à certains égards des obſervations faites par divers phyſiciens ſur la meſure des hauteurs par le baromètre. Le réſultat général des obſervations de M. de Sauſſure, que ſous la latitude de 46° le thermomètre de Réaumur baiſſe d'un degré pour 100 toiſes d'élévation, ne s'accorde pas non plus avec la théorie de M. Prony, comme on peut aiſément s'en aſſurer.

§ 14. Conſidérons maintenant les obſervations de M. Prieur en elles-mêmes, & comparons-les avec ce qu'on ſavoit auparavant ſur ce ſujet. Je remarquerai d'abord que pour les vingt premiers degrés du thermomètre de Réaumur, M. Prieur trouve la dilatation de $\frac{8}{100}$ à-peu-près, ou de $\frac{8}{2000} = \frac{1}{250}$ pour chaque degré, en prenant une moyenne comme on le fait dans la meſure des hauteurs par le baromètre. Ce coëfficient eſt beaucoup plus petit que celui qui réſulte des obſervations faites jusqu'ici. M. de Luc l'a trouvé $= \frac{1}{215}$ pour $16\frac{2}{3}$ de chaleur, ce qui pour zéro donne $\frac{1}{200}$ à-peu-près. Et les obſervations poſtérieures donnent ce coëfficient encore plus grand. Les obſervations de M. de Sauſſure fils, faites au Col du Géant, (voyez le Journal de phyſique, février 1796) donnent $\frac{1}{180}$ environ pour les obſervations qui approchent de zéro. Ainſi l'obſervation de M. Prieur, faite à vingt degrés de Réaumur, donne un réſultat qui diffère ſenſiblement de ceux

que donne la meſure des hauteurs par le baromètre. Nous le comparerons plus bas avec les expériences directes faites par d'autres phyſiciens. M. Prony remarque avec beaucoup de raiſon que d'autres cauſes, telles que la denſité plus ou moins grande, les vapeurs &c., influent ſur la meſure des hauteurs par le baromètre. Mais en faiſant abſtraction de ces cauſes, & en ne conſidérant que la dilatation cauſée par la chaleur, il y a une autre cauſe d'incertitude très-conſidérable ſur laquelle ont inſiſté pluſieurs phyſiciens. C'eſt que pour trouver la température de la colonne d'air dont on veut meſurer la hauteur, on prend un milieu entre les degrés du thermomètre obſervés en bas & en haut. Or cette ſuppoſition eſt arbitraire, & ſe trouve ſouvent fauſſe dans les cas particuliers, divers accidens contribuant également à faire que la chaleur ne décroît pas uniformement à meſure qu'on s'élève. Dans ces cas-là la moyenne adoptée eſt illuſoire.

§ 15. Je n'en citerai qu'un exemple aſſez remarquable, qu'a fourni le haſard. Comme l'on a peu d'obſervations ſur la meſure des hauteurs, faites lorsque le thermomètre eſt fort au-deſſous de zéro, nous eſſayâmes en février 1784, M. de Sauſſure & moi, de profiter d'un gel bien établi, pour faire une obſervation de ce genre ſur la montagne de Salève, que les travaux de M. de Luc ont rendue célébre, & où M. le chevalier Schuckburgh a fait pluſieurs obſervations. M. Pictet ſe porta au bas de la montagne pour faire des obſervations parallèles à celles que nous ferions au ſommet, c'eſt-à-dire au rocher du Piton, qui eſt aſſez connu par l'ouvrage de M. de Luc. Lorsque nous paſſâmes au village de Collonges ſitué près du pied de la montagne, le thermomètre de Réaumur étoit à 4° au-deſſous de zéro. Aux deux tiers de la hauteur le thermomètre étoit déjà à 8° au-deſſous de zéro, ce qui nous donna de grandes eſpérances de réuſſir dans notre deſſein. Mais étant arrivés au ſommet nous vîmes avec ſurpriſe que le thermomètre ſe tenoit à 1° au-deſſus de zéro. Cependant le thermomètre obſervé par M. Pictet au bas de la montagne, reſta conſtamment à 4° au-deſſous de zéro. Il étoit près de midi, le temps avoit été fort clair, & la

croupe de la montagne, dont la pente eſt douce du côté du ſud, avoit été réchauffée par le ſoleil, ce qui probablement avoit influé ſur la température du ſommet. Voilà donc une obſervation d'une hauteur de plus de 500 toiſes, au bas de laquelle le thermomètre étoit à 4° au-deſſous de zéro, tandis qu'au ſommet il étoit à 1° au-deſſus. Prendre le milieu entre ces degrés pour avoir la température moyenne de la colonne, auroit été un procédé abſurde, puisque les circonſtances locales qui produiſoient le phénomène, ne pouvoient influer ſur le revers de la montagne, coupé à pic, revers que longeoit la colonne d'air dont il s'agiſſoit d'eſtimer la température. Les détails de l'obſervation barométrique ſont reſtés entre les mains de M. de Sauſſure, ce qui m'empêche de les donner ici. On vient de voir l'exemple d'un cas extrême, dans lequel l'erreur du milieu qu'on a coutume de prendre ſaute aux yeux, mais il ſeroit aiſé de rapporter une multitude de cas intermédiaires dans lesquels l'erreur, quoique moindre, eſt encore très-ſenſible.

§ 16. Comparons maintenant les réſultats de M. Prieur avec ceux qu'ont obtenus les phyſiciens qui ont travaillé ſur ce ſujet. Il y a long-temps qu'on a cherché à déterminer les dilatations produites par la chaleur ſur l'air & ſur le mercure. Le thermomètre d'air inventé primitivement par Drebbel, & perfectionné par Amontons, a ſouvent occupé les phyſiciens. Newton, Cruquius, Micheli, de Luc, Strohmayer, Lambert &c. en ont fait l'objet de leurs recherches. Dans le ſecond volume de ſon Architecture hydraulique M. Prony fait mention des obſervations d'Amontons, & il obſerve qu'Amontons eſtimoit l'augmentation du volume de l'air par la chaleur de l'eau bouillante, d'un tiers; mais, dit M. Prony, Amontons n'a point donné la température de l'air avant l'immerſion des globes dans l'eau bouillante, ainſi cette concluſion ne préſente aucun ſens, parce qu'on ignore la température du volume primitif. M. Prony me permettra de lui obſerver qu'Amontons avoit diviſé ſon thermomètre en pouces, qu'il plaçoit le degré de l'eau bouillante à 72 pouces, c'eſt de là qu'il avoit déduit la dilatation d'un tiers depuis la congélation de l'eau à l'eau bouil-

lante. Ainſi les concluſions d'Amontons avoient un ſens très-déterminé. Voyez le § 78 de la Pyrométrie de Lambert, qui a parfaitement éclairci le procédé d'Amontons.

§ 17. Je remarquerai d'abord que le thermomètre d'air a eu deux formes eſſentiellement différentes. Dans la première, le mercure n'a aucune communication avec l'air extérieur, en ſorte que les dilatations de l'air s'opèrent dans un eſpace fermé. L'appareil de M. Prieur eſt de ce genre. Dans la ſeconde, le tube dans lequel monte le mercure, eſt ouvert par en haut, en ſorte que les dilatations de l'air s'opèrent dans un eſpace ouvert. C'eſt-là le thermomètre d'air qui eſt le plus en uſage, & qui demande qu'on tienne compte de la preſſion de l'air extérieur; c'eſt auſſi celui qui donne des réſultats applicables à la meſure des hauteurs par le baromètre, comme l'indique la nature même de la choſe. Je fais cette remarque, parce que lorſque les fluides ſont renfermés, leur dilatation ſuit d'autres lois que lorſqu'ils peuvent s'étendre librement. M. Lambert a inſiſté là-deſſus dans le § 89 de ſa Pyrométrie. On ne peut donc appliquer immédiatement les obſervations faites dans le premier cas, aux obſervations faites dans le ſecond. M. Micheli du Creſt a prouvé cela par ſon thermomètre d'eſprit de vin. On ſait que le premier thermomètre d'eſprit de vin que fit M. de Réaumur étoit fautif, en ce qu'il avoit pris le 80e degré de ce thermomètre pour le degré de l'eau bouillante, tandis que ce n'étoit que le degré de l'eſprit de vin bouillant, degré fort inférieur, parce que l'eſprit de vin bout plutôt que l'eau; le degré de l'eau bouillante eſt à-peu-près le 102e degré de ce thermomètre. Mais on ne pouvoit obtenir ce degré en faiſant bouillir l'eſprit de vin dans un vaſe ouvert. M. Micheli, pour obtenir ce degré dans ſon thermomètre, ferma hermétiquement le tube en en haut, & par ce moyen l'eſprit de vin acquit la chaleur de l'eau bouillante. La machine de Papin fourniſſoit déjà des concluſions analogues pour l'eau.

§ 18. Voyons actuellement quelle dilatation les phyſiciens qui ont travaillé avant M. Prieur, ont trouvée pour le degré de l'eau bouillante. Le volume de l'air à la température de la glace étant ſuppoſé

= 1000, Amontons a trouvé ce volume à l'eau bouillante 1417, Cruquius 1411, Newton 1370, Poleni 1333, Lambert 1370. La détermination de M. Poleni s'accorde avec l'opinion généralement répandue, que l'eau bouillante dilate l'air d'un tiers, mais M. Lambert remarque fort bien § 89 de ſa Pyrométrie, qu'il falloit entendre cela d'un air à-peu-près tempéré, & non d'un air qui a le froid de l'eau qui gèle. Dans ce dernier cas la dilatation doit être un peu plus grande. Auſſi M. Lambert la fait-il de 0,370. Or l'obſervation de M. Prieur la donne de 0,9389, c'eſt-à-dire plus de $2\frac{1}{2}$ fois plus grande, & la loi qu'adopte M. Prony la donne de 1,5707, c'eſt-à-dire plus de 4 fois plus grande. Mais examinons plus en détail les diverſes obſervations de M. Prieur.

§ 19. MM. Micheli, de Luc, Strohmayer & Lambert ont comparé avec ſoin la marche du thermomètre d'eſprit de vin avec celle du thermomètre de mercure, & leurs déterminations s'accordent fort bien entre elles, comme on peut le voir par la table qui eſt au § 124 de la Pyrométrie de M. Lambert. M. Lambert, pendant le grand froid de janvier 1776, compara le thermomètre d'eſprit de vin avec le thermomètre d'air depuis le 15e degré au-deſſous de la congélation jusqu'à l'eau bouillante. On peut voir ſes obſervations & leurs réſultats dans les §§ 136 & 140 de ſa Pyrométrie. Il réſulte de ces deux comparaiſons faites de la marche de l'eſprit de vin avec celle du mercure & avec celle de l'air, que le mercure & l'air ſoutiennent le même rapport avec l'eſprit de vin à fort peu de choſe près. D'où M. Lambert conclut que dans l'étendue de ces expériences le thermomètre de mercure s'accorde avec le thermomètre d'air, ſinon entièrement, du moins ſans différence ſenſible. M. Lambert a comparé enſuite directement le thermomètre d'air avec celui de mercure, & a trouvé leur marche ſenſiblement la même. Ainſi en prenant pour chaque degré du thermomètre de Réaumur les différences de la dilatation de l'air, ces différences ſeront égales ſuivant M. Lambert, au lieu que ſuivant M. Prony elles formeront une progreſſion géométrique, comme on le voit par la table ſuivante:

$x = 0$	$x = 20°$	$x = 40°$	$x = 60°$	$x = 80°$
$\zeta° = 0$	$\zeta' = 0{,}094$	$\zeta'' = 0{,}188$	$\zeta''' = 0{,}282$	$\zeta^{IV} = 0{,}376$ Lambert.
$\zeta° = 0$	$\zeta' = 0{,}0789$	$\zeta'' = 0{,}2572$	$\zeta''' = 0{,}6588$	$\zeta^{IV} = 0{,}9389$ Prieur.
$\zeta° = 0$	$\zeta' = 0{,}0789$	$\zeta'' = 0{,}2572$	$\zeta''' = 0{,}66014$	$\zeta^{IV} = 1{,}5707$ Prony.

Les déterminations de M. Lambert s'accordent fort bien avec ce que les phyſiciens avoient trouvé avant lui. M. de Luc avoit trouvé auſſi par ſes expériences, que la marche du mercure étoit à-peu-près analogue à celle de l'air commun, comme on peut le voir dans ſon ouvrage. Il y a plus; les réſultats de M. Lambert conſidérés comme quantités abſolues, s'accordent aſſez bien avec les réſultats déduits de la meſure des hauteurs, au lieu que ceux de M. Prony s'en écartent beaucoup. En effet, d'après la table de M. Lambert, on a pour les vingt premiers degrés du thermomètre de Réaumur, une dilatation de l'air égale à $\frac{94}{1000}$ du volume de l'air à la température de la glace, ce qui donne pour chaque degré $\frac{94}{20000} = \frac{1}{213}$ à-peu-près. Or M. de Luc a trouvé $\frac{1}{215}$ pour la température de $16\frac{2}{3}°$ ce qui donne $\frac{1}{200}$ à-peu-près pour la température de la glace. L'on voit que cette détermination n'eſt pas fort éloignée de celle de M. Lambert, tandis que celle de M. Prieur, qui trouve $\frac{1}{250}$, s'en éloigne beaucoup. Il eſt vrai que ce réſultat s'éloigne ſenſiblement de celui que M. de Sauſſure fils a trouvé au Col du Géant, lequel eſt d'environ $\frac{1}{190}$, réſultat qui coïncide à-peu-près avec celui que j'avois déduit dans mon mémoire des obſervations des Anglois. J'avois trouvé $\frac{1}{192}$ pour la température de 11°, ce qui donne à-peu-près $\frac{1}{193}$ pour la température de la glace. Mais il faut faire attention à toutes les autres cauſes d'incertitude qui affectent la meſure des hauteurs, & à la difficulté de prendre une moyenne exacte. D'ailleurs je n'ai jamais prétendu décider entre M. de Luc & les Anglois, & j'ai renvoyé la déciſion, ſi elle eſt poſſible, au temps où l'on auroit recueilli un plus grand nombre d'obſervations.

§ 20. Si l'on calcule d'après la formule de M. Prony les dilatations de l'air qui correſpondent aux degrés 100 & 120 du thermomètre de mercure, on trouvera pour $100° \zeta^{V} = 3{,}6284$, & pour 120°,

$7^{VI} = 8{,}2784$, c'eſt-à-dire qu'à 100° le volume de l'air eſt $4\frac{1}{2}$ fois plus grand, & à 120°, $9\frac{1}{4}$ fois plus grand qu'à la température de la glace. Or Robins nous a donné dans ſes Principes d'artillerie une expérience par laquelle il a déterminé la dilatation de l'air à la chaleur du fer rouge. Robins fit rougir au feu d'un forgeron un tuyau de fer fermé à un bout, & qui avoit à l'autre une très-petite ouverture, & raréfia par là l'air dans le tuyau autant qu'il pouvoit l'être à ce degré de chaleur. Avant de le retirer du feu, il boucha l'ouverture avec un fil de fer, & le laiſſa ſe refroidir enſuite dans l'eau, ſans qu'il pût y entrer de l'eau ou des vapeurs. Il ôta enſuite le fil ſous l'eau, & l'eau remplit tout l'espace qu'avoit abandonné l'air en ſe condenſant. Il trouva dans trois expériences ſemblables, qu'il y étoit entré 610, 595, 600 grains d'eau. Le tuyau entier contenoit 796 grains d'eau. Il y étoit donc reſté un espace d'air égal au volume de 186, 201, 196 grains d'eau. Il n'en étoit donc reſté que $\frac{1}{4}$ à-peu-près. Ainſi, d'après ces expériences, le volume de l'air à la température du fer rouge eſt environ quadruple du volume de l'air à la température ordinaire, ou $4\frac{1}{5}$ fois le volume de l'air à la température de la glace. Mais ſuivant la formule de M. Prony, cette dilatation répond à moins de 100° du thermomètre de mercure, tandis que la température du mercure bouillant eſt à 263° du même thermomètre, & le degré de chaleur du fer rouge eſt bien ſupérieur. L'obſervation même de M. Prieur, quoiqu'elle donne pour l'eau bouillante un degré fort inférieur à celui de M. Prony, donne cependant encore beaucoup plus que ce qu'on avoit trouvé avant lui, puisque d'après cette obſervation le volume occupé par l'air à la chaleur de l'eau bouillante, eſt 1,9389, tandis que d'après les obſervations de Newton le volume occupé par l'air à la chaleur de l'étain qui ſe fond, eſt ſeulement de 1,785.

§ 21. M. le chevalier Schuckburgh & M. le général Roy, pour compléter leurs travaux ſur la meſure des hauteurs par le baromètre, ont fait des expériences ſur le manomètre, qui revient au thermomètre d'air de la première eſpèce, où l'on obſerve les dilatations de l'air dans un vaiſſeau

vaiſſeau fermé. M. le chevalier Schuckburgh n'a fait qu'un petit nombre d'obſervations relatives aux températures qui ont lieu dans la meſure des hauteurs. Il a trouvé, comme M. Lambert, que la marche de l'air eſt à très-peu de choſe près la même que celle du mercure, & ajoute qu'il n'a aucune raiſon de croire que les différences, au lieu d'être égales, ſuivent un certain rapport géométrique, comme un membre de la Société Royale, qu'il ne nomme pas, l'avoit ſuppoſé. Il trouve pour un degré de Fahrenheit une différence de $\frac{243}{100000} = 0{,}00243$, ce qui donneroit pour la dilatation de l'air depuis la température de la glace jusqu'à l'eau bouillante 0,4374, quantité un peu plus forte que celle qu'a trouvée M. Lambert. La différence vient ſans doute de ce qu'il a obſervé dans un vaiſſeau fermé. Le général Roy obtient le même réſultat à-peu-près; il trouve pour un degré de Fahrenheit une différence de $\frac{245}{100000} = 0{,}00245$, ce qui donne pour la dilatation de l'air, depuis la température de la glace jusqu'à l'eau bouillante, 0,441. Ces réſultats s'accordent à-peu-près avec ceux dont nous avons fait mention ci-deſſus, & diffèrent fort de ceux de M. Prieur. Au reſte, ces deux obſervateurs anglois ont trouvé qu'une différence aſſez notable dans la denſité de l'air, comme celle d'un ſixième, ne changeoit rien à la quantité de ſa dilatation ni à la loi qu'elle ſuit. Ce n'eſt donc pas dans la différence de hauteur du baromètre qu'il faut chercher la cauſe de la différence conſidérable qui ſe trouve entre M. Prieur & tous les autres phyſiciens.

§ 22. Après avoir bien peſé ces circonſtances, il m'a paru que la cauſe de cette différence ne pouvoit ſe trouver que dans la différence d'humidité de l'air employé dans les expériences. Pour m'éclaircir là-deſſus, j'ai eu recours aux expériences que M. le général Roy ajoute dans ſon mémoire ſur les dilatations d'un air dans lequel il avoit introduit des vapeurs aqueuſes, ou une goutte d'eau. Le général donne neuf expériences, ſix ſur la vapeur aqueuſe, & trois ſur la goutte d'eau. Un ſimple coup-d'oeil jeté ſur cette table ſuffit pour voir que ces expériences ſe rapprochent beaucoup de celles de M. Prieur, & même des

réſultats de M. Prony. Par exemple, l'expérience neuvième faite avec une goutte d'eau donne pour la dilatation à l'eau bouillante 1,47362, le réſultat de M. Prony étant 1,5746. Il paroît donc très-probable que l'air employé par M. Prieur étoit fort humide, puisque d'un côté ſes réſultats contrediſent les réſultats trouvés par tous les phyſiciens qui ont pris de l'air ſec, & que de l'autre ces réſultats ſe rapprochent beaucoup des réſultats qu'a trouvés le général Roy en imprégnant l'air de vapeurs aqueuſes. Mais les réſultats des différentes expériences du général Roy diffèrent prodigieuſement entre eux; l'expérience 6e faite avec une goutte d'eau donne pour la dilatation à l'eau bouillante 1064,25, ce qui ſe rapproche beaucoup du réſultat trouvé par M. Prieur, & s'écarte tout-à-fait de la loi trouvée par M. Prony. L'expérience 6e faite avec la vapeur aqueuſe donne pour la dilatation à l'eau bouillante 2,50696, ce qui ſurpaſſe de $\frac{2}{5}$ le réſultat de la loi de M. Prony, tandis que l'expérience 3e donne pour la dilatation à l'eau bouillante 1,2775, ce qui tient le milieu entre le réſultat de M. Prieur & la loi de M. Prony. Le général Roy obſerve que ces expériences préſentent deux claſſes d'irrégularités, la première eſt relative à l'expanſion totale pour le degré de l'eau bouillante, & nous venons d'en donner des exemples. La ſeconde eſt relative au *Maximum* de la force élaſtique, qui paroît avoir lieu dans certains cas avant que l'air ait acquis la chaleur de l'eau bouillante. Il attribue avec raiſon la première claſſe d'irrégularités aux différens degrés d'humidité de l'air qu'il n'avoit pas pu déterminer. Il croit que la ſeconde claſſe eſt uniquement dûe aux erreurs des obſervations, parce qu'il étoit difficile de déterminer exactement la température quand la chaleur approchoit de l'eau bouillante. Quant à l'expanſion relative aux degrés intermédiaires de chaleur entre la glace & l'eau bouillante, on y remarque auſſi des différences énormes, & la loi que ſuivent ces dilatations paroît tantôt s'approcher d'une progreſſion géométrique, tantôt s'en éloigner conſidérablement en plus & en moins. Quand les écarts ſont auſſi grands, la méthode uſitée de prendre les milieux eſt abſolument illuſoire. Et il ſeroit inutile d'établir aucun cal-

cul là-deſſus jusqu'à ce qu'on ait déterminé par les moyens qu'enſeigne l'hygrométrie, la quantité ſenſible d'eau contenue dans l'air. Au reſte, l'examen dans lequel je ſuis entré plus haut, prouve ſuffiſamment que les réſultats des obſervations faites ſur cet air humide ne peuvent être utiles à la meſure des hauteurs, tels qu'on les préſente. Mais ſi l'on parvient à déterminer exactement le degré d'humidité de chaque air qu'on éprouvera, on pourra alors en déduire des conſéquences utiles. C'eſt le but que ſe propoſoit le général Roy. On trouve dans le mémoire cité plus haut de M. de Sauſſure fils, de très-belles expériences ſur cette matière. Cet ingénieux phyſicien a trouvé que l'humidité diminue la denſité de l'air, & qu'une différence de 10 degrés de l'hygromètre de M. de Sauſſure père, entre le 65° & le 95°degré correſpond environ à une différence d'un grain ſur le poids du ballon dont il s'étoit ſervi, poids qu'il a eſtimé de 18723 grains, le baromètre étant à 27 pouces, le thermomètre à 11°,5 du thermomètre de Réaumur, & l'hygromètre à 75. M. de Sauſſure ajoute que le volume d'air que déplace alors le ballon, pèſe 461,79 grains. En ſuppoſant donc la denſité de l'air égale à l'unité à 28 pouces du baromètre, 11°,5 du thermomètre & 75 de l'hygromètre, & en ſuppoſant encore la denſité de l'air proportionelle à ſon poids, M. de Sauſſure ayant trouvé que dans ce cas le volume d'air déplacé par le ballon pèſe 477,45, grains en conclut qu'à 27 pouces, la denſité de l'air eſt exprimée par 0,96719. On peut voir les détails ultérieurs dans le mémoire même. M. de Sauſſure père, a trouvé de plus que les dilatations de l'air par la chaleur ſont plus grandes dans un air rare que dans un air denſe. Du reſte, la règle que les denſités ſont proportionelles aux poids ſe trouve confirmée par toutes les obſervations de ce mémoire.

§ 23. Je dirai un mot avant de finir, des calculs que M. Prony a faits ſur les expériences de M. Bettancourt, relatives à la force de la vapeur de l'eau & de l'alcohol. Ces expériences ſont analogues à celles que M. Ziegler avoit faites dans ſon Traité du digeſteur de Papin, & dont M. Lambert traite dans les §§ 241 & ſuiv. de ſa Pyrométrie. M.

Prony à qui M. Ziegler a communiqué ſes expériences, paroit n'avoir pas connu le travail de M. Lambert. Je ne pourrois faire une comparaiſon ſuivie des recherches de ces deux auteurs ſans alonger trop ce mémoire. Je me contenterai de remarquèr que M. Prony a cherché la loi que ſuivent les réſultats de M. Bettancourt depuis 0° jusqu'à 110° du thermomètre de Réaumur, en les rapportant à une ſérie récurrente du 3e degré, & la formule qu'il donne repréſente aſſez exactement les obſervations. Mais comme il a fait entrer dans ſon calcul les obſervations extrêmes, cette formule ne ſert à autre choſe qu'à interpoler pour les degrés intermédiaires, & ne peut être cenſée démontrée pour les degrés qui ne ſont pas compris dans cette ſuite. Ce n'eſt pas là le but que ſe propoſoit M. de la Grange lorsqu'il a donné une méthode pour trouver la loi des phénomènes d'après les obſervations. Pour atteindre ce but, il faut trouver d'après les premiers termes de la ſuite donnée une ſérie récurrente qui ſatisfaſſe enſuite à tous les termes de cette ſuite. Mais dans ce cas-ci ce ſeroit en vain qu'on chercheroit à obtenir par le moyen des premiers termes de la ſuite une ſérie récurrente qui ſatisfaſſe aux derniers; les différences ſont trop irrégulières; auſſi M. Prony a-t-il été obligé d'altérer les nombres pour donner aux différences la régularité qui leur manquoit. Mais dès lors le travail ne conduit qu'à des réſultats empiriques, & non aux lois que ſuit la nature. Je remarquerai encore que lorsque M. Prony emploie une ſuite récurrente du 3e degré pour l'alcohol, & que trouvant que le dénominateur de la fraction génératrice a deux racines imaginaires, il en conclut que cela introduiroit dans la ſuite des quantités transcendantes; je remarquerai, dis-je, que cet inconvénient n'a lieu que dans la méthode qu'on emploie, & non dans la nature des choſes. Car on peut trouver un terme quelconque d'une ſuite récurrente, ſans décompoſer en facteurs le dénominateur de la fraction génératrice, en calculant chaque terme par le moyen des précédens, & alors on ne ne court aucun risque de trouver des imaginaires. On peut trouver auſſi un terme quelconque ſans paſſer par les termes précédens, ſeulement le calcul des formules eſt plus ou

moins long ſuivant les cas; mais on n'a jamais d'imaginaires, parce qu'on ne fait entrer dans le calcul que les coëfficiens de la fraction génératrice.

§ 24. Pour ce qui regarde les expériences faites ſur la vapeur de l'alcohol, M. Prony ſuppoſe que les différences des réſultats que donnent les obſervations, forment une ſuite récurrente du ſecond degré. Il emploie en conſéquence la formule $\zeta = \mu_{,} \varsigma_{,}^{x} + \mu_{,,} \varsigma^{\prime\prime} x + \mu^{IV}$, & il trouve que cette formule ſatisfait aſſez bien aux obſervations. Les mêmes remarques que je viens de faire pour la vapeur de l'eau, reviennent ici. J'obſerverai de plus que le coëfficient $\mu_{,}$ étant $= -0{,}00213$, & par conſéquent très-petit, ou $\frac{1}{500}$ à-peu-près, rend toutes les différences qui dépendent de $\varsigma_{,}$ 500 fois plus petites; les différences qui réſultent de $\varsigma_{,}$ peuvent donc être beaucoup trop grandes pour convenir à la loi adoptée, ſans que pour cela le terme $\mu_{,} \varsigma_{,}^{x}$ offre d'anomalie ſenſible. C'eſt auſſi ce qui paroît avoir lieu dans ce cas-ci. Si l'on eſſaie de former une ſérie récurrente, dont chaque terme dépende des deux précédens, comme cela réſulte de la ſuppoſition de M. Prony, on trouvera qu'elle diffère beaucoup de la ſuite donnée des différences, ce qui confirme une des concluſions principales de ce mémoire, qu'autre choſe eſt ſatisfaire empiriquement à un certain nombre d'obſervations données, autre choſe de trouver la loi que ſuivent les réſultats & qui s'étend en de-ça & au-delà des obſervations priſes pour baſe. Cependant ce dernier procédé eſt le ſeul qui puiſſe nous découvrir les lois de la nature.

§ 25. Je terminerai ici ces remarques. Les doutes que je me ſuis permis d'élever contre les réſultats de M. Prony, n'ont d'autre but que celui d'engager cet habile mathématicien à s'occuper encore d'une matière auſſi intéreſſante, & de prouver l'utilité qu'on retireroit en multipliant les expériences ſur ce ſujet. Si je me ſuis trompé dans mes raiſonnemens, je recevrai avec beaucoup de reconnoiſſance les avis de ceux qui voudront bien me faire connoître mon erreur.

OBSERVATIONS
sur le cours des rivières et des torrens.

PAR M. JEAN TREMBLEY *).

SECOND MÉMOIRE.

§ 1.

J'ai préſenté à l'Académie, il y a trois ans, un mémoire ſur ce ſujet. J'ai expoſé dans ce mémoire auſſi clairement & auſſi brièvement qu'il m'étoit poſſible, quelques faits obſervés à Genève, ſur le cours du Rhône & de l'Arve, desquels il me paroiſſoit réſulter des conſéquences utiles. Je négligeai, pour abréger, pluſieurs détails ſur lesquels je me propoſois de revenir un jour, en comparant ces faits avec les théories expoſées par les phyſiciens. Je me propoſois encore de montrer combien les ſavantes théories mathématiques qu'on a inventées dans ce ſiècle, ſont éloignées de nous mettre en état de calculer avec fruit les mouvemens des fluides, lors même qu'on pourroit intégrer les équations différentielles qu'ont données les géomètres; combien il eſt important d'obſerver dans chaque cas les circonſtances particulières, & avec quelle attention on doit travailler dans un état à acquérir une hiſtoire naturelle exacte des rivières qui le traverſent. Je ne puis me flatter de remplir dans ce mémoire, les vues que je viens d'indiquer; je n'ai point encore

*) Lu à l'Académie le 1. novembre 1798.

pu me procurer tous les matériaux dont j'avois beſoin, n'ayant plus, comme à Genève, la facilité de trouver les ouvrages importans, & n'étant plus au fait de ce qui ſe paſſe à cet égard dans l'Europe littéraire. Je ſuis donc forcé de laiſſer dans le vague pluſieurs idées que j'aurois voulu pouvoir déterminer plus particulièrement, & je me contenterai d'indiquer ici quelques points de vue auxquels je reviendrai lorsque les circonſtances me le permettront.

§ 2. J'ai parlé dans mon premier mémoire des effets d'un épi placé obliquement ſur la rive d'un fleuve. Si le courant vient frapper l'épi en dehors de l'angle que fait cet épi avec la rive, la plupart des auteurs d'hydraulique prouvent que dans ce cas l'épi tend à pouſſer le courant vers la rive oppoſée ſuivant une direction plus ou moins oblique, & que ſon effet dépend de ſa poſition combinée avec la viteſſe primitive de l'eau. Voyez entre autres l'Hydrodynamique de M. l'abbé Boſſut *T. II. pag.* 268 de la ſeconde édition. J'ai copié ici les propres paroles de cet illuſtre géomètre, qui ajoute que de là doivent réſulter des changemens proportionnés dans le lit du fleuve. M. Boſſut traite en détail de ces changemens dans ſon excellente Diſſertation ſur les digues, couronnée à Bordeaux en 1764, & compoſée en commun avec M. Viallet, ſous-inſpecteur des ponts & chauſſées. Il fait voir comment ces épis peuvent ſervir à détruire des atterriſſemens ſitués près de la rive oppoſée, ce qui, dit-il, eſt le principal avantage des épis, dont l'effet continué après la deſtruction de l'atterriſſement, pourroit produire des inconvéniens en ſens contraire. Voyez le chap. 5. de la diſſertation citée, laquelle eſt regardée par les connoiſſeurs comme un des meilleurs ouvrages qui ayent paru ſur cette matière. On en a donné une traduction allemande il n'y a pas long-temps. On pourroit être tenté de conclure de là que la méthode de détruire les atterriſſemens d'une rivière eſt une & ſimple, qu'il faut placer ſur la rive oppoſée un ou pluſieurs épis, qui réfléchiſſent le courant vers ces atterriſſemens. Cet objet eſt ſans doute important, puisque les atterriſſemens une fois commencés ſont ſusceptibles d'augmenter de jour en jour, & peuvent changer en-

tièrement le cours de la rivière. Mais j'ai rapporté dans mon premier mémoire un fait bien conſtaté qui prouve que cette règle qui paroît générale, eſt ſujette à des exceptions graves. L'Arve eſt un torrent qui descend des hautes-Alpes, & vient tomber dans le Rhône à un quart de lieue de Genève. Ce torrent, lorsqu'il approche de ſon embouchure, a à ſa gauche des rivières escarpées, & à ſa droite des jardins qu'il s'agiſſoit de préſerver des ravages du torrent. On avoit donc placé le long de ces jardins des épis tels que ceux dont je viens de parler; il ſe forma à la pointe de chaque épi une espèce de tourbillon, le fond s'excava dans la partie occupée par l'eau morte, qui étoit au dedans de l'épi, ce qui produiſit un courant dirigé contre les jardins; les eaux vinrent attaquer ces jardins avec violence, & ſéparèrent du continent une petite île, qui auparavant en formoit la pointe. M. Friſi dans ſon ouvrage ſur les fleuves & les torrens pag. 94 dit, qu'en parcourant le Po il a trouvé beaucoup d'épis maltraités par le fleuve ou par les tourbillons, qui ſe forment aiſément au pied & à la pointe de l'épi, ce qui eſt tout-à-fait conforme à ce que je dis ici. Ainſi dans ce cas, pour détruire un atterriſſement, au lieu de placer les épis ſur la rive oppoſée d'après la théorie, il auroit fallu les placer ſur la même rive un peu plus haut. Le remède propoſé peut donc devenir dangereux; ſi dans certaines circonſtances il produit l'effet déſiré, dans d'autres circonſtances il produit l'effet contraire, & cette différence vient de ce que dans la théorie on ne conſidéroit qu'une partie des circonſtances. On n'avoit pas fait entrer en ligne de compte l'état du lit de la rivière. On ſait qu'une inégalité aſſez légère peut devenir le principe d'un tourbillon fort dangereux; or pour peu que la rivière charie, ce qui eſt le cas de tous les torrens, la pointe de l'épi arrête les matières chariées, ces matières s'accumulent, occaſionent un tourbillon, & ce tourbillon ſe trouvant placé entre le courant de la rivière & l'eau morte qui longe la rive que l'on veut défendre, l'eau ſe porte naturellement vers le côté qui lui offre la moindre réſiſtance, c'eſt-à-dire vers l'eau morte, & attaque la rive que l'on croyoit garantir. Toute cette doctrine des atterriſſemens

&

& de la manière de les détruire, dépend donc en grande partie de la connoiſſanee des circonſtances phyſiques, que la mécanique ne peut ni prévoir ni ſuppléer. Mais lorsque les circonſtances phyſiques ſont bien connues & bien déterminées, alors la mécanique s'occupe avec ſuccès des moyens d'en tirer le parti le plus avantageux.

§ 3. M. Boſſut parle, p. 283 de l'ouvrage cité, d'un petit traité de M. Genneté ſur le cours des fleuves, qui parut en 1760. L'auteur prétendoit qu'un grand fleuve peut abſorber en entier les eaux d'un fleuve auſſi conſidérable que lui, ſans que cette accrûe faſſe hauſſer en rien les eaux du premier fleuve, dont le lit reſte le même qu'auparavant relativement à la largeur. La raiſon en étoit, ſuivant cet auteur, que la quantité d'eau que contient le fleuve, ayant doublé, la viteſſe avoit auſſi doublé. M. Boſſut remarque avec beaucoup de raiſon que l'hypothèſe de cet auteur eſt fauſſe, & que les viteſſes ne croiſſent pas comme les quantités d'eau, mais ſuivant une raiſon beaucoup moindre, ce qui réſulte également de la théorie & de l'expérience. M. Boſſut conclut de là que ſi une rivière a une pente & une viteſſe ſenſibles, l'augmentation de la quantité d'eau fera hauſſer ſenſiblement le niveau de la rivière. Cela doit ſans doute arriver dans pluſieurs cas, mais la conſéquence eſt-elle générale, & n'admet-elle point d'exception? C'eſt ce qu'on ne peut affirmer ſi l'on fait attention à ce que j'ai expoſé en détail dans mon premier mémoire. Le Rhône à ſa ſortie du lac de Genève eſt un fleuve profond & rapide. On a voulu profiter de cet avantage pour conſtruire ſur ce fleuve des moulins & d'autres ouvrages analogues. Ces ouvrages ſe trouvant placés ſur les deux rives, on a voulu faire en ſorte que le fleuve eût le long de ces deux rives aſſez de profondeur pour faire jouer des moulins. On plaça donc le long des rives, des épis tels que le courant de la rivière vînt frapper le dedans de l'angle que l'épi formoit avec la rive, ce qui devoit rejeter l'eau le long de la rive, & produire des effets avantageux aux moulins. Cependant le réſultat fut préciſément contraire: l'eau diminua ſenſiblement le long des rives, & augmenta au milieu du fleuve. La plus grande partie de l'eau

du Rhône couloit dans un lit qui n'avoit pas la moitié de la largeur du lit total, & cependant le niveau n'avoit point hauſſé. Voilà donc un fleuve dont la pente & la viteſſe ſont très-ſenſibles, & dans lequel la quantité d'eau augmente conſidérablement ſans que le niveau hauſſe ſenſiblement, car il eſt évident que les deux cas ſont eſſentiellement les mêmes, celui où l'on ajoute à un fleuve une certaine quantité d'eau, & celui où l'on réduit ce fleuve à n'occuper qu'une partie de ſon lit, puiſque l'eau qui couloit dans cette partie, a réellement reçu une augmentation conſidérable. Voilà donc un effet préciſément contraire à celui qu'annonce la théorie. Et la cauſe de ce phénomène eſt la même que celle que nous avons indiquée dans le cas précédent, c'eſt qu'on n'a pas fait entrer en ligne de compte toutes les circonſtances qui peuvent ſe préſenter. Et l'effet de l'épi oblique avoit été de ralentir le cours de l'eau, d'occaſioner un exhauſſement du lit le long du bord, ſoit par le dépôt des matières que l'eau contenoit encore en diſſolution, ſoit parce que celles qu'elle charioit ſe trouvoient arrêtées. Cet effet très-lent dans ſes commencemens, avoit enſuite augmenté rapidement, parce que l'exhauſſement du lit concouroit avec la poſition de l'épi à l'augmenter, ce qui produiſoit une eſpèce de remou. L'eau longeoit les bords de l'épi en rétrogradant, & formoit à ſon extrémité une petite cataracte. Cette cataracte augmentant chaque jour, tendoit à porter l'eau du fleuve vers le milieu du lit, & le fond, comme je l'ai dit dans mon premier mémoire, avoit été creuſé inſenſiblement au point que la profondeur du Rhône, qui à quelques pas de diſtance étoit de 13 à 14 pieds, ſe trouvoit en cet endroit de 22 à 23 pieds. Cette excavation étoit telle que le niveau de la ſurface, loin de hauſſer, avoit baiſſé.

§ 4. L'on voit donc que le fait allégué par M. Genneté peut être vrai ſans que la théorie de cet auteur le ſoit, qu'il ſuffit pour cela que le fleuve ait aſſez de force pour excaver ſon lit, comme cela eſt arrivé dans le cas que nous venons de décrire; cette excavation une fois commencée augmente par la chute des eaux ſupérieures, & il n'eſt pas aiſé d'aſſigner le terme des changemens qui peuvent en réſulter, le danger

dont ce phénomène menaçoit la ville de Genève n'ayant pas permis de ſuivre l'obſervation jusqu'au bout. Il faut donc obſerver avec grand ſoin la nature & la diſpoſition du fond de la rivière, & la direction que prennent les eaux relativement à la verticale, direction que les inégalités du fond peuvent faire varier ſenſiblement. La queſtion du niveau que prend une rivière qui en reçoit une autre dans ſon lit, eſt donc plus compliquée qu'elle ne le paroît au premier coup-d'oeil, & ne peut être décidée d'après les ſeuls principes de la mécanique. Toutes les fois que le fond ſera ſuſceptible d'être corrodé, on pourra s'attendre à ce que le niveau augmente beaucoup moins qu'on ne l'eſtimeroit d'après la théorie, & dans ce cas la réunion des rivières en un ſeul lit eſt un des moyens les plus efficaces pour prévenir les inondations, & pour deſſécher les marais. C'eſt ce que l'on aperçoit clairement lors qu'on analyſe les ouvrages qu'ont occaſionés les différens de Bologne & de Ferrare relatifs au cours du Pô, & ſi l'on ſuit avec attention l'hiſtoire des marais Pontins. L'abbé Friſi a fait là-deſſus des remarques très-ſolides dans ſon livre des fleuves & des torrens. Mais je ne ſaurois entrer dans ce détail ſans paſſer de beaucoup les bornes de ce mémoire.

§ 5. Le confluent du Rhône & de l'Arve fournit auſſi des obſervations utiles. J'ai dit dans mon premier mémoire, que l'Arve qui autrefois venoit ſe jeter dans le Rhône en formant avec ce fleuve un angle très-aigu, avoit changé peu-à-peu d'inclinaiſon, à meſure que ce torrent excavoit la rive droite, & qu'enfin il en étoit venu au point de former avec le Rhône un angle qui approchoit d'un droit. Or la théorie ordinaire de la percuſſion a fourni aux auteurs d'hydraulique le théorème ſuivant: (voyez Boſſut p. 285). „Les ſinus des angles que for„me la direction du fleuve compoſé avec les directions des fleuves ſim„ples, ſont entre eux en raiſon inverſe des viteſſes des deux fleuves ſim„ples.“ Il ſuivroit de là que pour que l'un des fleuves prît la direction de l'autre, la viteſſe de ce dernier devroit être comme infinie relativement à celle du premier. Or c'eſt ce qui n'arrive point aux rivières qui ſont le ſujet de ce mémoire. J'ai vu pluſieurs fois l'Arve tomber dans

le Rhône presque à angles droits, ſe détourner le long du courant de ce fleuve comme le long d'un mur, & ſuivre une direction parallèle à celle du courant du Rhône, quoique la différence des viteſſes ne fût pas très-conſidérable; mais la différence de maſſe étoit énorme, & avoit beaucoup d'influence. Le théorème rapporté ci-deſſus ne peut donc être employé qu'avec bien des précautions. Lorsque les neiges fondant en abondance dans les hautes Alpes, augmentent ſubitement la maſſe des eaux de l'Arve, alors le cours du Rhône ſe trouve quelquefois tout-à-fait interrompu; ce fleuve inonde les jardins ſitués ſur ſa rive gauche, ſa rive droite étant bordée par des collines taillées à pic. J'ai vu ce cas arriver en octobre 1778. Cependant au moment où l'inondation commença, la différence des viteſſes de l'Arve & du Rhône n'étoit pas énorme, & la première n'étoit certainement pas double de la ſeconde. Le théorème n'a ici aucune application, puiſqu'une des rivières ceſſe entièrement de couler. Au reſte, ce phénomène arrive rarement, parce que le plus ſouvent lorsque l'Arve augmente, le Rhône augmente auſſi, & alors il n'arrive rien de ſemblable, mais lorsqu'en automne un vent du ſud très-chaud fond ſubitement les neiges des glaciers du Faucigny, comme cela arriva en octobre 1778, alors la crûe de l'Arve qui ſort de ces glaciers, eſt prodigieuſe & rapide; dans cette ſaiſon le Rhône a déjà baiſſé conſidérablement, & lors même que les glaciers du Valais lui fourniſſent une plus grande abondance d'eau, comme il traverſe le lac, ce ſurplus répandu ſur une grande ſurface ne peut produire à la ſortie du lac des effets auſſi prompts & auſſi conſidérables. Un phénomène plus étonnant encore & qui ſe refuſeroit bien davantage au calcul, eſt celui qu'on regarde à Genève comme certain, & dont M. de Sauſſure a fait mention dans le premier volume de ſes Voyages. On prétend que les eaux de l'Arve forcent quelquefois le Rhône à rétrograder, & que les moulins placés ſur le Rhône tournent en ſens contraire. On aſſure que ce phénomène a été obſervé deux fois dans ce ſiècle, le 10 février 1711 & le 14 ſeptembre 1733. M. Fatio de Duiller, obſervateur très-éclairé, a donné les détails de celui de 1711.

J'avoue cependant qu'il me reſte quelques doutes ſur le fait, j'aurois déſiré plus de détails que ceux que j'ai pu me procurer à Genève ſur cet objet, ce qui m'empêche d'inſiſter ſur les conſéquences du phénomène, quoique je ſois fort éloigné de m'inſcrire en faux contre ce fait.

§ 6. Ce qui empêche ſurtout d'aſſeoir des calculs un peu exacts ſur des phénomènes de ce genre, & ſur bien d'autres, c'eſt la néceſſité où l'on ſe trouve, dès qu'on veut ſe livrer au calcul, d'abandonner la nature & de ſe jeter dans des hypothèſes plus ou moins arbitraires. On eſt obligé de ſuppoſer que l'Arve vient avec une certaine viteſſe joindre le Rhône, qui a auſſi une viteſſe déterminée, & cela ſous un certain angle. Il faut donc aſſigner au Rhône une viteſſe moyenne, il faut prendre cette moyenne & relativement à la hauteur, & relativement à la largeur du fleuve, & par ce moyen on obtient une quantité abſtraite qui ne repréſente rien de réel. Car le Rhône, ayant à ſa droite, comme je l'ai dit, une colline verticale, & à ſa gauche des jardins horizontaux, s'eſt creuſé un lit très-profond le long de la colline verticale, & s'eſt étendu avec facilité le long des jardins, près desquels ſon cours eſt très-foible & ſa profondeur peu conſidérable. Chaque partie de la largeur du Rhône a donc une viteſſe particulière, & cette viteſſe diminue graduellement de la rive droite à la rive gauche. Le Rhône n'agit jamais avec ſa hauteur & ſa viteſſe moyennes, mais là où elles ſont très-conſidérables, il produit auſſi des effets majeurs. Lors donc que le Rhône eſt bas, & que le courant ſe trouve en entier ſur la rive droite, l'Arve venant choquer des eaux qui ont peu de maſſe & peu de viteſſe, y pénètre facilement, & les deux rivières ſe mêlent, quoique la viteſſe du courant reſte très-conſidérable. Mais lorsque le Rhône eſt haut, la viteſſe du fleuve étant plus uniforme dans la largeur, & la maſſe l'étant auſſi, les eaux de l'Arve ne pénètrent pas, & ſe détournent de la manière que j'ai décrite plus haut. Ce phénomène eſt très-aiſé à remarquer, parce que les eaux du Rhône ont une couleur bleue très-marquée, & que les eaux de l'Arve ſont griſâtres, en ſorte que leur différence ſaute aux yeux.

§ 7. Ce que je dis des circonſtances particulières du confluent de deux rivières, peut s'appliquer à d'autres cas. Lorsqu'on a eſtimé bien ou mal la viteſſe & la hauteur moyennes d'un fleuve, on eſt obligé de le ſuppoſer dans un état de permanence, ſans quoi on n'auroit rien fait, puis on eſtime à-peu-près par ce moyen la quantité d'eau que ce fleuve fournit dans un temps donné. Mais ces réſultats ſont le plus ſouvent plus curieux qu'utiles, & l'on n'en eſt guères plus avancé pour ce qu'il importe le plus de connoître, ſavoir la manière dont le fleuve ſe comporte à l'égard de ſon lit, les altérations qu'il y produit, & les ravages dont on eſt menacé pour l'avenir. Tout cet appareil de calcul devient ici inutile, parce que ce n'eſt pas par ſa viteſſe moyenne que le fleuve agit ſur ſon lit; chaque partie du fond eſt travaillée par l'eau qui s'y meut en vertu de la viteſſe & de la hauteur qu'elle a dans cet endroit, en ſorte que la force du fleuve eſtimée en totalité pourroit être médiocre, tandis que la force partielle de ce même fleuve en certains endroits eſt énorme, & peut produire des effets très-fâcheux. Il y a plus, la viteſſe & la hauteur du fleuve reſtant les mêmes, ſon action ſur le fond & ſur les rives variera beaucoup ſuivant la diſpoſition de ce fond & de ces rives, & les calculs de la théorie ſont inutiles dans ces cas-là. L'on voit donc que les connoiſſances eſſentielles au cours des rivières, tiennent encore plus à la géographie phyſique, ſi l'on veut me paſſer l'expreſſion, qu'à la mécanique proprement dite, & c'eſt à compléter les connoiſſances de ce genre que l'on doit ſurtout travailler, ſi l'on veut être en état de diriger avec ſuccès le cours des rivières & des torrens, & de prédire avec quelque certitude ce que l'on doit eſpérer ou craindre d'un fleuve donné. Pour cela, il faut par des ſondes faites à propos & répétées à certains intervalles de temps, ſe procurer une eſpèce de carte topographique du fond du lit du fleuve, en tenant compte des hauteurs de l'eau & des nivellemens. De pareilles cartes, formées par exemple d'année en année, & comparées entre elles avec ſoin, préſenteroient un tableau fidèle des efforts du fleuve, & des effets que produiſent ſur lui les diverſes crûes auxquelles il eſt ſujet. Car cet état de

permanence que les géomètres ont ſouvent conſidéré avec tant de complaiſance, exiſte bien rarement, & ne dure jamais long-temps; il n'y a point de rivière qui ne hauſſe par les pluies ou la fonte des neiges, & par conſéquent l'hiſtoire des changemens qui ſurviennent dans l'état d'une rivière, eſt beaucoup plus importante que la conſidération abſtraite de cet état de permanence. D'ailleurs, ſi cet état de permanence exiſte, les cartes dont je viens de parler le feront mieux connoître que toutes les ſpéculations analytiques (*a*).

§ 8. Lorsqu'on auroit acquis par ce moyen une connoiſſance exacte de l'état du fleuve, on ſeroit en état d'y appliquer avec ſuccès les moyens que fourniſſent la mécanique & la géométrie pour tirer parti des circonſtances, & l'on ſauroit comment & dans quels cas il importe de rétrécir ou d'élargir le lit du fleuve, & comment on doit s'y prendre pour protéger ſes rives & faire prendre au courant la direction déſirée. Car tout en s'occupant des cartes dont je parle, il ſeroit aiſé de faire des épreuves ſur les effets que produiroient tels ou tels obſtacles, telles ou telles digues placées dans des endroits déterminés. On pourroit par là rendre ſenſibles aux perſonnes les plus incrédules les vérités phyſiques qu'il leur importe de connoître, ſans être obligé de ſe jeter dans des raiſonnemens qu'on ne manque jamais de taxer d'incertitude & d'obſcurité. Et l'on ne verroit pas, comme cela n'arrive que trop ſouvent, les fautes les plus graves commiſes dans des cas où il étoit aiſé de les

(*a*) On poſſède déjà de très beaux modèles de ce que je propoſe ici. Voici ce que dit M. Forfait dans les Mémoires de l'Inſtitut national, T. I. pag. 128. „Nous avions obtenu du dépôt des plans de la marine une carte ſuperbe du cours de la Seine en onze feuilles, par Buache, ſur celles de l'abbé de la Grive. Ce travail exécuté depuis 1763 jusqu'en 1767, a été porté à un tel degré de perfection, que nous avons trouvé presque dans tous les points les baſſiers & atterriſſemens avec les repères ſur les rives, tels que l'auteur les a tracés. Nous avons auſſi reconnu presque dans tout le cours de la Seine, que les angles ſaillans que l'on nomme des boſſes, ſont encore les mêmes que Buache a marqués ſur ſa carte; & cette obſervation, en prouvant le mérite de l'artiſte, nous a fait en même temps réfléchir que le régime de la rivière étoit bien établi, puisque dans un espace de trente années, la ſituation de toutes les parties de ſon lit n'a point changé."

prévenir. On ne verroit pas commettre les mépriſes les plus étranges ſur la largeur que doit avoit un canal relativement à la quantité d'eau qu'il doit contenir. Combien de fois, faute d'un nivellement exact, faute d'une pente ſuffiſante, ne manque-t-on pas un but qu'il eût été facile d'atteindre ſi l'on eût commencé par le commencement. Combien de fois, en laiſſant un foible courant d'eau s'étendre dans un canal d'une largeur conſidérable, n'occaſione-t-on pas des dépôts ſucceſſifs qui rendent le canal inutile pendant les trois quarts de l'année, & qui produiſant une fange marécageuſe occaſionent des exhalaiſons toujours nuiſibles, tandis qu'en rétréciſſant le canal & en lui donnant une forme convenable, on auroit prévenu tous ces inconvéniens. Combien de fois un léger atterriſſement ne reſte-t-il pas ignoré, & l'on ne s'aperçoit des effets fâcheux qu'il produit, que lorsque le mal eſt devenu conſidérable & difficile à détruire.

§ 9. J'obſerverai en paſſant que l'Arve fournit une preuve en fait de la fauſſeté de l'opinion que l'abbé Friſi cherche à établir dans ſon ouvrage ſur la Nature des ſables & des graviers qui ſe trouvent dans le lit des rivières & des torrens. Il s'agit de ſavoir ſi les graviers & les ſables peuvent devoir leur origine aux pierres, ou s'ils ſont tous des matières répandues ſur le globe terreſtre dès ſon origine. L'abbé Friſi ſoutient fortement la dernière opinion contre Guglielmini, & nie abſolument que les ſables puiſſent jamais provenir des pierres. Si M. Friſi étoit remonté près des ſources de l'Arve, qu'il eût conſidéré les maſſes immenſes de granite de deſſous leſquelles ſort ce torrent, & le ſable graniteux qui remplit une partie de ſon lit, il auroit je crois changé d'opinion. Car il n'eſt pas beſoin d'être naturaliſte pour voir que ce ſable eſt compoſé des débris des granites dont l'on voit de gros blocs ſur les bords mêmes de l'Arve. M. Friſi inſiſte beaucoup ſur ce que le frottement des pierres que roulent les rivières, ne peut jamais produire du ſable. Mais indépendamment de ce qu'il nous eſt bien difficile de juger dans quelques inſtans de ce que la nature peut opérer dans un temps indéterminé, la réduction des granites en ſable & en gravier peut

être

être dûe à des cauſes fort différentes du frottement dont parle M. Friſi. Ces blocs énormes de granite qu'on voit à la ſource de l'Arve, ont été évidemment détachés des montagnes qui les entourent; mais par quelles cauſes, de quelle manière, & depuis combien de temps, c'eſt ce qu'il n'eſt pas aiſé de découvrir. Toute la chaîne des hautes Alpes offre le même phénomène, on trouve par-tout des blocs énormes ſitués dans les vallées, & détachés des montagnes primitives depuis un temps bien conſidérable, puiſqu'on trouve ſouvent des montagnes ſecondaires ou des collines entre ces blocs & les montagnes auxquelles ils appartenoient. Ces phénomènes ont été décrits par tous les auteurs de géographie phyſique. Or des cauſes aſſez puiſſantes pour détacher ces blocs ont bien pu menuiſer certaines parties, & produire ces ſables dont on ne peut conteſter l'exiſtence. On a d'ailleurs des preuves en fait de la réduction des granites en ſable & en gravier, on a des preuves en fait qu'il exiſte des cauſes qui peuvent diminuer la dureté des granites, & même les diſſoudre. On ſait que le lac Ladoga eſt bordé de granites, qu'on en trouve dans toute la Finlande. Les quais de Pétersbourg ſont conſtruits de ces granites. Pendant le ſéjour que j'ai fait à Pétersbourg, le célèbre Pallas me faiſoit obſerver que ces granites ſont bien éloignés d'avoir la dureté de ceux des Alpes, qui réſiſtent pendant des ſiècles aux injures des élémens. Les granites de Finlande ne réſiſtent point de même, & leur dégradation eſt très-ſenſible. M. Pallas ne doute pas qu'ils n'ayent ſubi quelque révolution qui aura altéré conſidérablement le gluten qui uniſſoit leurs parties. On voit de plus dans le cabinet de cet illuſtre naturaliſte, des morceaux de granite qui ſe réduiſoient d'eux-mêmes en ſable & en gravier, & où le gluten étoit abſolument détruit. Au reſte, les naturaliſtes qui ont parcouru le Nord, ont obſervé qu'on trouve dans toute la Finlande des granites de même eſpèce que ceux du lac Ladoga; que ſi l'on paſſe le golfe de Bothnie, on retrouve ces granites en Suède, mais la maſſe de ces derniers eſt moindre; que ſi l'on a traverſé le Sund & le grand Belt, on trouve des morceaux de ces mêmes granites dans les îles de Zélande &

de Fionie, mais beaucoup plus petits; qu'on en trouve même des fragmens au-delà du petit Belt dans le Jutland & le Schleswig; enfin que du côté de Brème on ne trouve plus que du ſable graniteux, comme s'il s'étoit fait une exploſion qui eût porté des bords du lac Ladoga juſqu'à ceux de l'Océan. Ces faits ont excité, comme ils le méritoient, l'imagination des naturaliſtes, mais leurs ſyſtèmes ne ſont pas de mon reſſort. Il me ſuffit d'avoir montré que la nature a des moyens à nous inconnus de transporter, de menuiſer & de décompoſer les maſſes les plus énormes & les plus dures. Ainſi les objections de M. Friſi ne ſont pas fondées, ou du moins elles ne portent que contre ceux qui admettant des cauſes trop particulières, ne réuniſſent pas ſous un ſeul point de vue les faits généraux que la nature met ſous les yeux des obſervateurs.

§ 10. Je ne pourrois, ſans rendre ce mémoire trop long, continuer la comparaiſon des faits avec les principes de théorie reçus juſqu'ici. Je pourrai y revenir dans la ſuite. Je crois en avoir aſſez dit pour appuyer ſur une baſe ſolide les concluſions de mon premier mémoire. On ne peut ſe diſſimuler que l'Hydraulique n'ait un extrême beſoin d'être enrichie de nouvelles obſervations, qu'on ne puiſſe dans chaque cas tirer de grands avantages de quelques faits bien obſervés, que l'art de faire dépoſer à un fleuve dans certains endroits plutôt que dans d'autres les matières qu'il charie ne puiſſe être très-utile. On voit en même temps combien l'Hydrodynamique eſt une ſcience incertaine & précaire, lorſqu'on la ſépare, je ne dis pas, des faits fondamentaux qui en doivent être la baſe, mais des faits acceſſoires qui modifient néceſſairement les réſultats généraux. Ces remarques ne ſont rien moins que neuves, pluſieurs mathématiciens ont déjà inſiſté là-deſſus. Par exemple, le P. Lecchi dans ſon Hydroſtatique s'eſt attaché à montrer l'incertitude des raiſonnemens ſur leſquels on a établi les lois du mouvement des fluides, au ſortir des vaſes, & dans le lit des fleuves. L'abbé Friſi a dit en propres termes p. 39 de l'ouvrage cité, qu'il regardoit l'Hydraulique comme une partie de la Phyſique, plutôt que comme

une partie des Mathématiques, ou ſi l'on veut comme une partie des Mathématiques dont les progrès faits & à faire ſont purement hypothétiques & bornés à certains cas, qui peut-être n'ont pas lieu dans la nature. On eſt cependant forcé de revenir ſur ces réflexions, parce que des auteurs célébres paroiſſent encore en juger autrement. On lit, par exemple, dans le T. III. du Journal des écoles normales p. 39, le paſſage ſuivant de M. Haüy. „A l'égard de l'Hydroſtatique elle-même, elle fait „naturellement partie du cours que donnent ici les citoyens la Grange „& la Place, & elle leur appartient d'autant mieux que d'après la mé„thode qu'ils ſe propoſent de ſuivre, cette ſcience, que pluſieurs géo„mètres célébres n'avoient ſoumiſe au calcul qu'après avoir emprunté à „la Phyſique une baſe tirée de l'expérience, remonte immédiatement au „principe général de la Mécanique, & rentre ainſi toute entière dans le „domaine de l'Analyſe, qui en eſt plus parfaite lorsqu'elle ſait ainſi ſe „ſuffire à elle-même." M. Haüy eſt ſans contredit un homme de génie, qui a fait une application auſſi fine qu'originale de la géométrie à la ſtructure des criſtaux, (c'eſt pourquoi j'ai fait attention à ce morceau qui m'auroit moins ſurpris dans la bouche d'un profeſſeur ſubalterne.) Mais les erreurs que renferment ces paroles n'en ſont pas moins réelles, car premièrement quand on accorderoit à M. Haüy que la doctrine des fluides peut ſe déduire immédiatement du principe général de mécanique, elle ne rentreroit pas pour cela dans le domaine de l'analyſe, puisque le principe général de mécanique réſulte uniquement de l'expérience. M. de la Grange a reconnu lui-même cette vérité dans ſa théorie des fonctions analytiques, puisqu'en examinant les différentes formules de mécanique, il s'en tient à celles qui réſultent de l'obſervation, & néglige toutes les autres en ajoutant que l'obſervation ne nous y conduit pas. En effet, l'obſervation de Galilée que les espaces parcourus par les graves, ſont entre eux comme les carrés des temps, combinée avec celle-ci que la peſanteur peut être conſidérée comme conſtante à de petites diſtances du globe terreſtre, & avec les lois du mouvement qu'a expoſées Newton, fournit les formules générales de Mécanique qui

ſont en uſage. Newton conſidéroit bien les lois qu'il a expoſées comme des faits, puiſqu'il les a intitulées *Phaenomena ſeu leges motus;* il a dit ailleurs expreſſément: *et hypotheſes non fingo.* M. Haüy attribue donc à l'Analyſe ce qui ne lui appartient point. Si Galilée avoit trouvé que les eſpaces parcourus par les graves ſont comme les cubes des temps, la Mécanique changeoit de face.

§ 11. Je ne crois pas d'ailleurs qu'on puiſſe regarder comme une vérité démontrée, que la doctrine des fluides eſt actuellement réduite au principe général de Mécanique. Les équations différentielles qu'ont trouvées MM. d'Alembert, Euler & de la Grange, ne ſont encore que des expreſſions ſymboliques, dont on n'a pu faire uſage juſqu'ici que dans quelques cas particuliers. J'examinerai ailleurs la nature des conſéquences qu'on a déduites relativement à la propagation du ſon & aux vibrations des cordes. Et quand on réuſſiroit à intégrer ces équations, donneroient-elles une doctrine complète des fluides? Une équation algébrique peut bien nous conduire aux réſultats des faits que l'expérience nous a découverts, mais elle ne peut jamais nous valoir la connoiſſance de ces faits primitifs. Or nous ne connoiſſons pas la nature intime des fluides. M. Euler & M. d'Alembert en ſont convenus en pluſieurs endroits de leurs ouvrages. M. Lambert a témoigné plus d'une fois combien il étoit peu ſatisfait des théories mathématiques des fluides; il penſoit que les premiers phénomènes de l'Hydraulique étoient inintelligibles ſi l'on ne ſuppoſoit pas les particules de l'eau élaſtiques; le principe de la conſervation des forces vives ſuppoſe cette élaſticité, comme l'a dit M. Daniel Bernoulli au commencement de ſon Hydrodynamique, & cette ſuppoſition même en rendant les phénomènes plus faciles à concevoir, n'en donne pas la meſure. Or c'eſt déjà un phénomène bien étrange que cette élaſticité des particules de l'eau, qui ſe trouve fondée à préſent ſur des expériences directes, & qui n'empêche pas l'eau de ſe comporter dans la plupart des cas comme un fluide non-élaſtique. Dans la théorie mathématique on ne fait aucune attention à cette élaſticité. De plus, une multitude de faits prouve que les particules de l'eau

ſont dans un mouvement continuel; les phénomènes ſeuls de l'évaporation ſuffiroient pour le prouver, & dans la théorie on les conſidère comme ſi elles étoient en repos. Je me propoſe d'examiner en détail dans un mémoire ſéparé les hypothèſes phyſiques qui ſont tacitement renfermées dans les équations générales des fluides, & la nature des conſéquences qu'on peut s'en promettre.

§ 12. M. Boſſut, en parlant de ces équations générales pag. 301 du Vol. I. de ſon Hydrodynamique, s'exprime ainſi: „Malheureuſement „toutes ces formules n'offrent, pour ainſi dire, que des vérités ſpécu„latives, & quand on en veut faire des applications phyſiques, il faut „tellement les ſimplifier, ou les dénaturer par différentes ſuppoſitions, „qu'il auroit peut-être autant valu établir d'abord le calcul ſur des prin„cipes moins rigoureux." Or ces principes qu'on appelle moins rigoureux, ne ſont autre choſe que l'expreſſion des faits. Il ne ſeroit pas difficile de montrer, & ce ſeroit peut-être un morceau de logique aſſez intéreſſant, que ce que les géomètres & les phyſiciens appellent principe, ſe réduit eſſentiellement à un fait, en ſorte qu'il n'exiſte réellement dans les ſciences que des faits & des définitions de nom. Mais l'alliage de ces deux choſes, quoiqu'eſſentiellement différentes, ſe trouve quelquefois ſi intime qu'on ne penſe pas à les ſéparer; ce qui a produit tant de confuſion & tant de diſputes, comme je le ferai voir ailleurs.

DÉTERMINATION

d'un nouveau genre de plante aquatique, nommé CAULINIA; *et observations générales sur les plantes aquatiques.*

PAR M. CHARLES LOUIS WILLDENOW.

Traduit de l'allemand.

Quoique les botaniſtes ſe ſoient depuis un ſiècle portés avec beaucoup d'ardeur à la recherche des objets nouveaux qui puſſent alimenter le deſir de connoître, & que durant cette période ils ayent dirigé leur attention ſur tous les points du globe, il n'en eſt pas moins vrai qu'il exiſte en Allemagne même un grand nombre de plantes ou entièrement inconnues, c'eſt le plus petit nombre, ou du moins ſi imparfaitement déterminées relativement aux caractères de la ſtructure des fleurs, qu'on a droit de s'étonner que ces plantes ayent échappé ſi longtemps aux recherches des botaniſtes. Cette obſervation s'applique ſurtout aux plantes aquatiques, qui pour la plupart s'établiſſent dans des points dont l'accès difficile oppoſe une barrière à l'oeil ſcrutateur du naturaliſte. Je ne dirai rien des plantes aquatiques qui appartiennent aux pays éloignés; nous n'avons là-deſſus qu'un petit nombre d'obſervations ſolides; les notices que nous poſſédons ſur tout le reſte ſe bornent aux aperçus fugitifs de quelques voyageurs, qui dépourvus de connoiſſances profondes, ont confondu des objets neufs & entièrement in-

connus, avec des plantes connues dans nos pays ou dans d'autres climats, & ont par ces affimilations erronées introduit dans la ſcience des fautes & des ambiguités que le laps du temps ſeul nous mettra en état de faire diſparoître.

Les plantes aquatiques, comme celles des terrains ſecs, ſe partagent en deux tribus diſtinctes: dans l'une on diſcerne les parties de la fleur, dans l'autre l'oeil non-armé ne peut diſcerner aucun organe ſexuel. Je nomme *Phénogames* les plantes qui appartiennent à la première famille, & Linné a conſacré pour celles de la ſeconde la dénomination de *Cryptogames*. Il eſt généralement reçu de nommer *Sexualiſtes* les plantes douées de fleurs aperceptibles; mais comme dans tous les végétaux connus jusqu'à préſent on a trouvé des organes ſexuels, on ſent que la dénomination de *Sexualiſtes* ne peut pas être donnée excluſivement à une ſeule famille, & c'eſt ce qui m'a décidé à oppoſer le terme de *Phénogames* à celui de *Cryptogames*.

Je paſſerai abſolument ſous ſilence les Cryptogames aquatiques, parce que leur nombre eſt ſi grand qu'il eſt impoſſible de concentrer les traits qui les caractériſent, dans les bornes reſſerrées d'un mémoire. Les Phénogames qui habitent l'eau ſont très-nombreux auſſi ſans doute, mais il n'y a cependant aucune comparaiſon à faire entre le nombre de leurs eſpèces, & celui des Cryptogames du même élément, puiſque les unes & les autres ſe trouvent à cet égard dans la proportion d'un contre cent. Qu'il me ſoit permis d'indiquer d'abord quelques obſervations générales relatives aux plantes aquatiques à fleurs diſcernables, après quoi je déterminerai les caractères d'un nouveau genre de ces plantes.

Les fleurs des Phénogames aquatiques ſont généralement parlant de peu d'apparence & de couleur verte: telles ſont par exemple, *Potamogeton, Ruppia, Zanichellia, Najas, Chara, Ceratophyllium, Callitriche, Hippuris, Lemna* & beaucoup d'autres. Souvent auſſi ces fleurs ſont blanches: *Nymphaea alba, Stratiotes, Hydrocharis Morſus ranae, Alisma natans* &c.; plus rarement jaunes: *Nymphaea lutea,*

Menyanthes nymphoides, *Utricularia;* bien plus rarement encore ces fleurs ſont rouges, on n'en connoit en Europe qu'un ſeul exemple, c'eſt *Polygonum amphibium.* Le bleu comme couleur de la fleur de ces plantes eſt également rare dans nos climats, on le trouve dans *Lobelia Dortmanna.* Mais dans les climats plus chauds, & même dans l'Amérique ſeptentrionale, on trouve pluſieurs plantes aquatiques à fleurs bleues, p. ex. *Utricularia coerulea*, tout le genre *Pontederia* &c.; mais ſur le tout la couleur bleue, ainſi que la rouge, ſe rencontre très-rarement dans les plantes aquatiques.

On peut diſtribuer les Phénogames aquatiques en cinq diviſions, d'après l'habitude & les rapports de poſition des fleurs & des feuilles. On eſt fondé à croire que la nature a deſſiné les Phénogames aquatiques de tous les climats d'après ces cinq types.

Je rapporte *au premier type* les plantes aquatiques rameuſes qui élèvent ſenſiblement leurs tiges, leurs feuilles & leurs fleurs au-deſſus du niveau de l'eau. Les feuilles qu'elles produiſent au-deſſous de l'eau offrent presque toujours des ſurfaces moins larges & des découpures plus déliées que celles qui pouſſent hors de l'eau; telles ſont *Siſymbrium amphibium, Sium latifolium, anguſtifolium, Phellandrium aquaticum, Cicuta viroſa* &c. Toutes les plantes de cette première diviſion peuvent auſſi exiſter dans les terrains marécageux que l'eau ne recouvre point.

Au *ſecond type* je rapporte les plantes dont les feuilles touchent le fond de l'eau, & dont la tige portant la fleur s'élève beaucoup au-deſſus du niveau de l'eau: comme *Butomus umbellatus*, *Lobelia Dortmanna*, *Valisneria ſpiralis*, *Hottonia paluſtris*, *Utricularia vulgaris, intermedia, minor* &c. Les fleurs de cette diviſion ont ordinairement de l'apparence, & aucune de ces plantes ne peut vivre long-temps ſi l'eau ne recouvre leurs feuilles.

Le *troiſième type* comprend les plantes aquatiques, dont les racines tracent ſous l'eau, & dont les feuilles nagent ſur la ſurface de l'eau, en raiſon de quoi elles ſont toutes plus ou moins cordiformes. Telles

ſont

ſont *Nymphæa*, *Nelumbium*, *Hydrocharis*, *Alisma natans*, *Polygonum amphibium*, *Ranunculus aquatilis*, *Trapa natans*, *Lemna* &c. Quand ces plantes ont une tige longue ou rampante, elle eſt pourvue dans ſa portion ſubmergée, de feuilles plus légèrement découpées; elles ne peuvent proſpérer ſans eau, & *Polygonum amphibium* ſeul fait exception. Leurs fleurs ſont préciſément au niveau de la ſurface de l'eau.

Le *quatrième type* comprend les plantes aquatiques dont la tige, ainſi que les feuilles, flottent ſous l'eau, & dont les fleurs ſeules s'élèvent au-deſſus de ſa ſurface, ſoit iſolées, ſoit diſpoſées en épis fort courts. *Potamogeton*, *Myriophyllum*, *Ruppia*, *Zanichellia*, *Callitriche* &c. ſont de ce genre. Les fleurs de ces plantes ſont ſans apparence, leurs feuilles ſont ou fortement découpées, ou très-minces.

Le *cinquième* & *dernier type* ſe préſente dans les Phénogames aquatiques, dont toutes les parties, les fleurs ainſi que les feuilles & la tige, ſont ſubmergées; telles ſont *Ceratophyllum*, *Najas*, *Chara*.

Les plantes qui appartiennent à cette dernière diviſion ſont à mon avis les plus intéreſſantes ſous un grand nombre de rapports, & c'eſt d'elles que je vais m'occuper excluſivement dans la ſuite de ce mémoire.

On regarde comme un axiome applicable à tous les Phénogames ſoit aquatiques ſoit terreſtres, le principe que leur fécondation, dont la fleur contient les organes, ne peut s'opérer que dans l'air libre. On ſait que cette fécondation devient impoſſible auſſitôt que les parties ſexuelles ſont recouvertes d'eau, & l'on en infère que les Phénogames aquatiques doivent tous élever leurs fleurs au-deſſus du niveau de l'eau, faute de quoi elles ne ſauroient être fécondées. Perſonne juſqu'à préſent ne s'eſt inſcrit en faux contre cette opinion, & cependant il eſt certain que les Phénogames de la cinquième diviſion végètent abſolument ſous l'eau, & ne s'élèvent jamais au-deſſus de ſa ſurface.

Ce mode de végétation eſt d'autant plus remarquable, que l'on obſerve dans tous les autres Phénogames, quelles précautions la nature a priſes pour interdire à l'eau de la pluie, & à toute autre ſorte d'hu-

midité l'accès aux fleurs de toutes les autres espèces de plantes, tandis qu'ici les parties de la floraiſon ſe trouvent enſevelies dans ce même liquide, ennemi de toute fécondation végétale. Mais ici comme dans toutes les autres parties de la nature, nous voyons qu'aucune des règles que nous déduiſons de nos obſervations, ne demeure ſans exception. Mille routes détournées conduiſent au même but, qui ſelon nos idées imparfaites n'eſt abordable que par un ſeul point. La ſubſtance fécondante de l'organe mâle des plantes a été jusqu'à préſent trouvée conſtamment immiſcible à l'eau, une larme de ce liquide répandue ſur l'organe femelle en repouſſe la ſubſtance fécondante, ainſi que le démontre l'effet des pluies continues à l'époque de la floraiſon des arbres fruitiers & des plantes céréales. Il n'y a donc pas lieu de s'étonner que l'on ait généraliſé le principe que *ſous l'eau il n'y a pas de fécondation végétale poſſible*, & qu'on l'ait étendu jusqu'aux plantes aquatiques, d'autant plus que la plupart d'entr'elles ouvrent leurs fleurs au-deſſus du niveau de l'eau.

Les adminicules ſecondaires de la fécondation des plantes ſont, comme on ſait, les inſectes, ſans l'intervention desquels la plupart des plantes ne donneroient jamais de ſemence habile à la réproduction. Comment donc eſt-il poſſible que les fleurs mâles fécondent les fleurs femelles qui en ſont diſtinctes dans le *Ceratophyllum* & la *Najas*, ſi leur pouſſière ſeminale eſt immiſcible à l'eau dans laquelle elles baignent, & s'il n'exiſte point là d'inſectes ailés pour en opérer le transport? J'ai eu quelquefois occaſion d'obſerver les fleurs du *Ceratophyllum*, & j'y ai trouvé la ſubſtance fécondante tout autrement conſtituée que dans les autres plantes. Tandis que les autres organes mêlés des fleurs nous préſentent une anthère ou recouverte d'une pellicule qui dans les différentes espèces ſe refend diverſement pour éjaculer le pollen, ou bien, comme dans les Orchides & les Aſclepiades, non-revêtue d'une pellicule, mais compoſée d'une ſubſtance fécondante onctueuſe; j'ai obſervé que dans le *Ceratophyllum* l'anthère eſt d'abord dure, puis revêt une conſiſtance molle qui reçoit toutes les impreſſions & annonce

une ſubſtance onctueuſe. Peut-être donc que l'eau eſt pour les plantes dont nous parlons, l'excipient & le véhicule de la matière fécondante. Les expériences de M. *Kölreuter* nous ayant prouvé qu'un très-petit nombre de molécules de pollen ſuffit pour conſommer la fécondation, on peut penſer que la ſubſtance visqueuſe des fleurs mâles mêlée à l'eau peut aiſément être portée en partie aux fleurs femelles par l'intermède d'un liquide qui n'eſt presque jamais en repos. Je préfère néanmoins de ſuſpendre mon jugement ſur cette matière, parce que je n'ai vu que deux fois les fleurs du *Ceratophyllum demerſum*, & une ſeule fois celles de la *Najas minor* d'*Allioni*. Cet objet eſt un de ceux ſur leſquels on ne parviendra que très-difficilement à la certitude, parce qu'il eſt impoſſible de faire des obſervations ſoutenues pendant pluſieurs heures ſur la ſurface d'une eau courante ou d'un lac, où d'ailleurs les mouvemens ondulatoires de l'eau nuiroient néceſſairement au ſuccès, parce qu'ils empêcheroient l'oeil de ſe porter préciſément ſur les points où il faudroit le diriger pour arriver à la conviction. Il n'y a donc jusqu'à préſent d'autre moyen de concevoir la fécondation des Phénogames qui végètent ſous l'eau, que d'admettre la ſolubilité du pollen de ces plantes dans l'eau, ou du moins de croire que l'eau n'empêche pas dans ces plantes le piſtil de recevoir le pollen fécondant des anthères, comme elle le fait dans les plantes qui fleuriſſent à l'air libre. D'autres botaniſtes auront peut-être plus de bonheur dans ce genre de recherche, ſur lequel nous ſommes réduits à attendre du temps une ſolution plus préciſe.

Les difficultés locales qu'offre l'obſervation des plantes aquatiques, eſt cauſe qu'en général on connoît très-peu leurs fleurs. Peu de botaniſtes, par exemple, ont vu la fleur de la *Lemna* commune. *Micheli*, *Halisneri* & *Ehrhart* ont obſervé celle de la *Lemna gibba*. *Graver* a vu l'inflorescence de la *Lemna polyrhiza*. Enfin, Linné a déterminé celle de la *Lemna minor*. J'ai ſouvent obſervé la fleur de cette dernière, & j'en ai vu le fruit, qui eſt une *capſula compreſſa obcordata bilocularis disperma*. Quant à la *Lemna triſulca*, aucun botaniſte n'en a encore

observé les fleurs ni le fruit, quoiqu'il n'y ait probablement pas un étang, un lac ou un fossé où cette plante ne se rencontre; on doit donc suspendre son jugement relativement à ce végétal, dont au fond il n'est pas décidé encore s'il appartient aux *Lemna*, ou s'il faut le renvoyer à la classe des Cryptogames.

Vaillant & *Dillenius* ont observé les fleurs du *Ceratophyllum*; probablement Linné ne les a pas observées lui-même, puisque sa description paroît évidemment composée d'après celles des deux botanistes que je viens de nommer. Mes observations m'ont donné des résultats un peu différens de ce que Linné dit de cette plante; je crois donc bien faire d'inférer ici en passant une description caractérisée de cette fleur, telle que je l'ai vue.

Ceratophyllum demersum.

Flores masculi

Calyx Perianthium multifidum, laciniis subulatis aequalibus.
Corolla nulla.
Stamina Filamenta sedecim brevissima. *Antherae* oblongae obtusae tricuspidatae.

Flores feminei in eâdem plantâ.

Calyx Perianthium hexaphyllum imbricatum.
Corolla nulla.
Pistillum Germen ovatum compressum, *Stylus* filiformis longissimus, *Stigma* simplex.
Pericarpium Nux tricuspidata monosperma.

Les fleurs de la *Najas* paroissent aussi n'avoir été examinées que par un petit nombre de botanistes. La description que Linné donne de ce genre, indique clairement qu'il n'a pas vu lui-même la plante dans sa floraison, mais qu'il s'en est rapporté à *Micheli*. *Micheli* qui a travaillé à la recherche du vrai en botanique, avec la même sagacité infatigable que *Réaumur* a apportée dans ses recherches entomologiques, distingue trois espèces de *Najas*, que Linné avoit regardées comme

autant de variétés d'une ſeule & même plante. *Allioni* qui trouva l'occaſion de comparer entr'elles les eſpèces de *Najas* que Micheli avoit décrites & gravées ſous la dénomination de *Fluvialis* introduite par *Vaillant*, donne à la première & à la ſeconde des *Fluvialis* de *Micheli*, le nom de *Najas minor*, & déſigne la troiſième par la dénomination de *Najas minor*. Voyez ſon excellente *Flora Pedemontana*, Tom. II, p. 221, N. 2105 & 2106. On croyoit autrefois que la *Najas minor* d'*Allioni* n'exiſtoit qu'en Italie. Mais M. *Schkuhr*, mécanicien de l'univerſité de Wittenberg, l'a trouvée aux environs de cette ville, & moi-même je l'ai vue en 1793 dans le Grunewald proche Berlin. *Micheli* n'a vu que les fleurs femelles, & j'ai pendant pluſieurs années été vainement à la piſte des fleurs mâles, juſqu'à ce qu'enfin j'eus le bonheur de les trouver cette année (1799) au commencement du mois d'août. Au reſte, M. *Schkuhr* en avoit déjà donné le délinéation dans ſon Manuel de botanique, planche 296.

Je vis d'abord par la ſtructure de la fleur, que cette plante conſtitue un genre nouveau & abſolument diſtinct, qu'il eſt par conſéquent néceſſaire de déſigner par un nom particulier.

M. *Caulini*, riche particulier Napolitain, qui a bien mérité de la ſcience par une obſervation profonde d'une plante aquatique, nommée *Zoſtera* par Linné, & qui a compoſé ſur cette matière un traité complet, mérite ſelon l'uſage adopté par les botaniſtes que l'on conſacre ſa mémoire en donnant ſon nom à un genre, & c'eſt ce qui me décide à donner le nom de *Caulinia* au nouveau genre que je viens de découvrir.

Afin de faire reſſortir d'autant mieux les différences qui exiſtent entre *Caulinia* & *Najas*, je donnerai ici les caractères du genre de l'une & de l'autre.

Najas.

Flores masculi

Calyx Perianthium monophyllum campanulatum, limbo bilobo, laciniis oblongis revolutis.

Corolla monopetala infundibuliformis. *Tubus* filiformis, calyce multo longior. *Limbus* campanulatus quadrifidus: laciniis lanceolatis revolutis.

Stamina Filamenta nulla. *Antherae* quatuor fauci corollae infertae connatae.

Flores feminei in eâdem plantâ.

Calyx nullus.

Corolla nulla.

Piſtillum Germen oblongum, *Stylus* brevis ſubulatus. *Stigma* 2—ſ. 3—fidum.

Pericarpium Capſula elliptico-ovata unilocularis, 1—ſ. 4—ſperma.

Semina oblonga obtuſa.

Je n'ai eu occaſion d'obſerver que l'espèce nommée par *Micheli Fluvialis latifolia fructu minus obtuſo monospermo. Nov. plant. gen. p.* 11, *t.* 8, *f.* 2. Au reſte, les exemplaires que j'ai vus n'avoient que des fruits, c'eſt pourquoi le reſte des caractères eſt indiqué d'après la deſcription de *Micheli*, dont la préciſion eſt trop connue pour qu'on puiſſe s'en défier. Dans ce cas-ci, il eſt cependant néceſſaire de discuter les doutes qui pourroient naître du défaut d'accord des deſcriptions que d'autres botaniſtes ont données du même objet. *Vaillant* ne parle pas du tout de la corolle, que *Micheli* décrit & repréſente dans ſa délinéation. A l'inſpection de la figure de *Vaillant* il ſemble que les découpures de la corolle étoient déjà tombées dans ſes exemplaires, ou bien que ſes fleurs n'étoient pas encore épanouies. *Juſſieu* prétend que *Linné* s'eſt trompé en attribuant à cette fleur une corolle quadripartite; ſelon lui il y a dans la réalité, au lieu des quatre découpures de la corolle, quatre valves ou appendices à l'anthère. Mais comme il eſt reconnu que *Micheli* eſt ſcrupuleuſement exact dans la deſcription qu'il nous donne des parties des plantes, & comme lui-même taxe poſitivement *Vaillant* d'erreur ſur le point en queſtion, j'ai cru devoir ſuivre l'opinion d'un botaniſte auſſi juſtement accrédité. Tous les botaniſtes,

Linné ſeul excepté, s'accordent d'ailleurs à donner à la *Najas* des fleurs mâles & femelles diſtinctes ſur le même individu. Cette plante appartient par conſéquent à la 21 *Claſſe Monoecia*, & point à la 22ème *Dioecia* à laquelle *Linné* l'a rapportée. *Linné* ne donne à la *Najas* qu'une anthère, tandis que d'après la figure de *Micheli* il en exiſte quatre connues; auſſi je rapporte ce genre à la *Tetrandria*.

Quant à la queſtion, ſi les deux premières espèces de la *Fluvialis* de *Micheli* ne ſont que des variétés, ou ſi elles conſtituent réellement deux espèces diſtinctes, de façon que nous aurions deux espèces de *Najas*, je dois m'en rapporter à la déciſion des botaniſtes, qui auront occaſion de comparer ces deux plantes entr'elles. Quant à la *Najas minor* d'Allioni, qui eſt la troiſième *Fluvialis* de *Micheli*, j'ai déjà dit que je la tirois de cette catégorie pour en faire un genre nouveau, pour laquelle je conſacre le nom de *Caulinia*. Voici maintenant le caractère de ſa fleur

Caulinia.

Flores masculi.

Calyx nullus.

Corolla nulla.

Stamen Filamentum nullum. *Anthera* oblonga apice dehiscens.

Flores feminei in eâdem plantâ.

Calyx nullus.

Corolla nulla.

Piſtillum Germen ovatum, *Stylus* filiformis caducus, *Stigma* bifidum.

Pericarpium Capſula oblonga monosperma.

Semen oblongum ovatum.

La *Caulinia* appartient à la même claſſe que *Najas*, mais au premier ordre, c'eſt-à-dire *Monoecia Monandria*. La fleur femelle a la même ſtructure que dans *Najas;* mais la fleur mâle s'en diſtingue beaucoup par l'abſence du calyce & de la corolle. Peut-être ne ſe tromperoit-on pas abſolument en claſſant la *Caulinia* parmi les plantes à fleurs her-

maphrodites; car il ſe produit dans chaque angle des jeunes pouſſes un piſtil avec une ou deux anthères. Mais comme ni ce piſtil ni ces anthères ne ſont environnés d'aucun calyce ni corolle, & qu'ils ſont diſpoſés ſans ordre l'un à côté de l'autre, on doit plutôt regarder chaque organe individuel comme une fleur. Les piſtils & les anthères ſont à l'époque de la floraiſon ſi petits qu'il eſt presque impoſſible de les apercevoir à l'oeil non-armé.

J'ai cru d'abord qu'il n'exiſtoit qu'une espèce de ce genre, mais par des rapprochemens plus exacts, j'ai découvert encore deux plantes aquatiques exotiques, qui harmoniſent exactement avec notre *Caulinia*, relativement à la ſtructure de la fleur femelle. Je me décide donc à rapporter ces plantes au nouveau genre que je viens d'établir. Quant aux fleurs mâles, il eſt impoſſible, même dans notre *Caulinia*, de les caractériſer d'après des exemplaires deſſéchés, & il en eſt de même des *Caulinia* exotiques. Il y a donc trois espèces de ce nouveau genre:

Caulinia fragilis foliis ternis oppoſitisve, lineari-ſubulatis recurvatis aculeato dentatis rigidis. Tab. 1. fig. 2.

Najas minor *Allion pedem. N.* 2106. *Schkuhr bot. Handb.* 3 *p.* 250. *t.* 296.

Fluvialis minor, foliis anguſtiſſimis denticulatis deorſum reflexis, fructu acuto majori, monospermo. *Micheli gen. p.* 11. *t.* 8. *f.* 3.

Fluvialis anguſto longoque folio. *Vaill. Act. Paris* 1719. *p.* 17. Habite les lacs & les rivières en Italie, en France & en Allemagne.

Radices filiformes ſimpliciſſimae longiſſimae perpendiculares.

Caulis digitalis usque ſpithamaeus baſi ramoſus diffuſo-adſcendens, ramis dichotomis glabris compreſſis.

Folia terna vel oppoſita lineari-ſubulata acuta recurva uncialia et ultra, reflexa anguſtiſſima, dentata; dentibus alternis mucronatis, baſi in vaginam membranaceam ſubrotundam apicem verſus dentatam deſinentia.

Flores in foliorum axillis ſeſſiles.

Stigmata variant numero, nempe 1, 2, ſ. 3.

Toute

Toute la plante eſt extrêmement fragile, tellement que fraîche, comme dans l'état de deſſiccation, le contact fait que la tige & les feuilles ſe briſent comme du verre. J'ai même obſervé que lorsque cette plante eſt encore ſur pied, & qu'elle s'eſt établie par haſard dans une eau peu profonde, le choc des vagues ſuffit pour la briſer.

2. *Caulinia indica* foliis ternis oppoſitisve, lineari-ſubulatis repandis, junioribus ſetaceo-dentatis. Tab. I. Fig. 3.

Croît ſous l'eau aux environs de Tranquebar aux Indes.

Caulis ſesqui-vel bipedalis natans teres filiformis dichotomo-ramoſus.

Folia ramorum praecipue ad dichotomiam terna, caulina oppoſita, lineari-ſubulata patentia recta, baſi vaginantia, juniora ſetaceo-dentata, ſeniora ob dentes deciduos repanda.

Flores in foliorum axillis ſeſſiles.

Germen oblongum. Stylus filiformis. Stigmata bina ſimplicia.

Quoique cette espèce reſſemble beaucoup à la précédente, elle en diffère néanmoins à beaucoup d'égards. Elle eſt de beaucoup plus grande, ſouple, & point fragile du tout. Les feuilles ne ſe replient point en arrière; lorsqu'elles ſont encore jeunes elles ont des dents aiguës, en forme de ſoies, qui tombent enſuite, ce qui donne de la ſinuoſité au bord des feuilles qui ont achevé leur croiſſance.

3. *Caulinia flexilis* foliis ſenis linearibus apice denticulatis patentibus. Tab. I. fig. 1.

Croît en Penſylvanie ſous la face de l'eau.

Caulis pedalis ſubdichotomus ramoſus filiformis teres.

Folia ſena verticillata linearia patentia apice acute denticulata, inferne integerrima, baſi vaginantia.

Flores axillares ſeſſiles.

Germen oblongum. Stylus filiformis. Stigmata bina ſimplicia.

Cette espèce eſt très-diſtincte des deux autres; elle eſt très-flexible, a conſtamment ſix ou cinq feuilles, qui ne ſont denticulées qu'au ſommet.

Explication de la planche I.

Fig. 1. *Caulinia flexilis.* Toute la plante de grandeur naturelle.
a) une feuille fortement amplifiée.

Fig. 2. *Caulinia fragilis.* Un rameau principal de grandeur naturelle.
a) le sommet en fleur, amplifié,
b) les anthères,
c) les pistils.

Fig. 3. *Caulinia indica.* Toute la plante de grandeur naturelle,
a) une jeune feuille amplifiée,
b) une feuille après la croissance parfaite, amplifiée.

Digitized by Google

DÉTERMINATION

de quelques nouvelles espèces de Figuier, et observations générales sur ce genre.

PAR M. CHARLES LOUIS WILLDENOW.

Traduit de l'allemand.

Des plantes que nous connoissons jusqu'à présent, celle qui offre les caractères les plus frappans c'est sans contredit le Figuier. Ce qu'on appelle dans la vie commune le fruit de cet arbre, & qui n'en est pas un véritable aux yeux des botanistes, présente dans sa structure de si grandes anomalies qu'on ne trouve dans la nature presqu'aucun objet qu'on puisse lui comparer. Et si les détails singuliers de l'anatomie de ce fruit, ou plutôt de cette partie du Figuier, ne frappent point ceux qui manquent de connoissances préliminaires en botanique, il n'est personne au moins qui ne doive être surpris de la manière dont la figue se produit. Sans avoir été précédée d'aucune fleur elle paroît sur le tronc de l'arbre, s'y développe & y parvient insensiblement à maturité. Ce mode de végétation dut frapper nécessairement les premiers observateurs dans les temps mêmes les plus reculés, où l'on n'avoit sur la génération sexuelle des plantes, que des idées poétiques & hasardées, & où l'on étoit bien éloigné de fonder le système de nomenclature botanique sur la structure des organes de la génération dans les végétaux. On chercha long-temps la fleur du figuier sans pouvoir la trouver, jus-

qu'à ce qu'enfin *Valerius Cordus*, il y a plus de deux-cents ans, trouva la vraie ſolution de l'énigme; & vit dans la figue même la fleur du figuier, ſans que pourtant on puiſſe attribuer à ce botaniſte des connoiſſances approfondies ſur la nature & la deſtination des parties de la floraiſon en général. Il eſt étonnant que les anciens botaniſtes n'ayent pas été conduits à l'inveſtigation de la fleur du figuier par le procédé de la caprification, & que ce procédé joint aux manipulations de la culture du palmier-dattier, ne leur ait pas révélé le myſtère de la fécondation des plantes par leurs organes ſexuels. Pline qui décrit la caprification telle qu'on la pratique encore aujourd'hui ſur le figuier dans les îles de la Grèce, l'explique à ſa manière & d'après les notions imparfaites de la phyſique de ſon temps.

La caprification eſt, comme l'on ſait, une fécondation artificielle du figuier. Les payſans grecs ſont encore aujourd'hui dans l'obligation de la pratiquer s'ils veulent obtenir une riche récolte de figues. Pour cet effet, ils s'aſſurent d'un lieu où croiſſe ſpontanément quelque figuier mâle, dit par Pline *Caprificus;* ils vont au mois de juin & de juillet enlever les figues qu'il produit, mais qui ne parviennent jamais à maturité, pour les ſuſpendre enſuite par des brins d'herbe, ou de quelqu'autre manière aux branches du figuier privé, *Ficus ſativa* de Pline; ils obſervent de placer ces figues ſauvages dans le voiſinage des groupes de figues déjà formées ſur l'arbre cultivé. Il ſort alors de la figue mâle un grand nombre de petits inſectes ailés que les entomologues claſſent parmi les cynips, & qui fécondent la figue femelle en s'y introduiſant. Les cultivateurs grecs donnent ſuivant Tournefort, les ſoins les plus empreſſés à cette opération; durant deux mois entiers ils promènent tous les matins l'inſecte en queſtion d'un arbre à l'autre, parce qu'ils ſavent que toutes leurs figues tomberoient avant d'avoir atteint la maturité, s'ils ne les ſauvoient par ce travail pénible, au moyen duquel ils font porter à un bon figuier dans la force de l'âge jusqu'à 280 livres peſant de figues. Pline qui connoiſſoit la caprification & la fécondation du palmier-dattier, qui ſe pratique encore

aujourd'hui en Égypte, croit que les cynips ſe produiſent par la fermentation des ſucs de la figue mâle, & qu'ils vont enſuite piquer les figues femelles pour s'en nourrir. Cette explication repoſe ſur l'admiſſion de la génération équivoque, bannie depuis long-temps des idées reçues, depuis que des expériences bien faites nous en ont démontré l'inadmiſſibilité. Le naturaliſte romain étoit loin de ſoupçonner ici une fécondation de l'organe femelle. Le fameux Tournefort, à qui la botanique a des obligations infinies, qui par ſes travaux fut le digne précurſeur d'un des plus grands hommes que le Nord ait produits, & ſans qui Linné n'auroit pu devenir ce qu'il fut, Tournefort ignoroit néanmoins encore la génération des plantes, il regardoit même le pollen des fleurs mâles comme une matière excrémentielle; il n'eſt donc pas étonnant que ſon opinion ſur la caprification ne s'écartât pas ſenſiblement de celle de Pline. Il penſe que les inſectes de la figue mâle piquent la figue cultivée, & par les extravaſations des ſucs nourriciers en favoriſent la maturescence. Il croit de plus que les inſectes vont faire leur ponte dans les figues, & que les ſucs qu'ils y dépoſent à cette occaſion peuvent ſervir à faire fermenter les liquides contenus dans ce fruit, & hâter ainſi la maturité. Il ſoutient cette hypothèſe, en obſervant qu'en Provence & dans le jardin botanique de Paris, on avance la maturité des figues en les piquant avec un fétu de paille ou avec une plume trempée dans l'huile d'olive. Mais une circonſtance bien eſſentielle lui échappa, c'eſt que le figuier vulgairement connu & cultivé dans nos jardins ne produit jamais de ſemence habile à la réproduction. La piqûre artificielle des figues dont Tournefort aſſimile l'effet à la piqûre des inſectes de la figue mâle, ne démontre rien. Il eſt connu & avoué de tout le monde, que dans des corps organiſés quelconques, ſoit végétaux ſoit animaux, l'application d'un irritant ſur une partie quelconque y détermine une affluence de ſucs. Les melons & les autres fruits cultivés dans nos jardins acquirent plutôt & plus parfaitement une ſaveur ſucrée, attribut de la maturité, quand on les pique avec quelqu'inſtrument acéré; & c'eſt par la même raiſon que les prunes, les

poires & autres fruits ſemblables, offrent le même caractère de maturité plus prompte & plus parfaite, quand ils recèlent des larves d'inſectes que l'on nomme vers dans la vie commune. Mais la caprification des figues offre des phénomènes bien différens. Le figuier vulgaire nous offre trois modifications du ſexe. Dans les climats où il croît ſpontanément, on trouve des figuiers mâles dont les figues tombent d'elles-mêmes quand elles ſe ſont développées jusqu'à un certain point, mais ſans jamais devenir ſucculentes au point d'offrir un aliment. On voit enſuite des figuiers plus hauts de taille & produiſant des figues plus abondantes, mais non-développées & imparfaites, à moins qu'il ne ſe trouve dans leur voiſinage quelque figuier mâle. Ce ſont-là les figuiers femelles. Enfin on rencontre des figuiers plus petits qui produiſent les figues ſuſceptibles de maturité ſans exiger la préſence de l'arbre mâle, parce qu'ils réuniſſent ſur un ſeul individu les organes mâles & femelles. Or c'eſt cette variété hermaphrodite que nous cultivons dans nos jardins, & que l'on voit croître ſpontanément en Eſpagne, en Italie, dans l'Iſtrie, la Dalmatie & les provinces méridionales de l'empire Turc. Mais dans les îles de la Grèce & dans les climats tempérés de l'Aſie cette variété eſt plus rare, & il eſt beaucoup plus fréquent d'y rencontrer les figuiers mâles diſtincts des figuiers femelles. Au reſte, cette variété hermaphrodite n'offre rien de très-paradoxe, puisque nous voyons des exemples analogues dans beaucoup d'autres plantes, parmi lesquelles je me contenterai de citer la *Ceratonia ſiliqua*. On doit obſerver en général que le climat a la plus grande influence ſur le ſexe des plantes, & les variétés qui en proviennent n'échappent ſouvent à notre attention, que parce que les plantes ainſi modifiées n'intéreſſent pas les cultivateurs par la qualité des fruits qu'elles produiſent.

Les figuiers de nos jardins n'ont communément que des fleurs femelles, il eſt infiniment rare de rencontrer dans une figue les fleurs mâles & les fleurs femelles réunies. Or comme nous manquons ici & du figuier mâle, & des inſectes deſtinés à opérer la fécondation par-

faite, il s'enſuit que nous ne pouvons attendre de nos arbres de ſemence propre à la propagation; la figue même atteint bien un certain degré de développement, & offre un aliment ſucculent, dont la qualité eſt néanmoins bien inférieure à celle des figues orientales. Les Grecs auroient moins de ſoin à prendre de leurs plantations de figuiers s'ils ſe décidoient à ne cultiver que la variété qui ſe trouve dans nos jardins; mais ils ſe gardent bien de prendre ce parti, parce que notre figuier demeure conſtamment petit, & ne donne jamais au-delà de vingt-cinq livres peſant de figues.

En ouvrant la figue avant qu'elle ait atteint ſa maturité, on voit qu'elle eſt un corps charnu, dont la face intérieure eſt toute recouverte de petites floscules, dans leſquelles on peut diſtinguer les organes ſexuels dont il a été fait mention plus haut. La figue n'eſt donc pas un fruit, elle eſt un réceptacle (*receptaculum*) ſelon la terminologie préciſe de la ſcience. Des expériences nombreuſes & variées nous ont appris, qu'il eſt peu de fleurs dont la fécondation puiſſe s'effectuer ſans le concours des inſectes, ſurtout dans les espèces où les ſexes différens exiſtent ſur des individus diſtincts. L'expérience nous a pareillement enſeigné que pluſieurs plantes dont les fleurs s'écartent très-ſenſiblement de la forme eſſentielle commune à la grande majorité des fleurs, ſont deſtinées à être fécondées par des inſectes que la nature a mis avec elles en rapport pour cette fin. C'eſt par cette raiſon que pluſieurs des plantes exotiques que nous cultivons dans nos jardins, ne donnent point de ſemence parfaite, parce qu'en les transplantant dans nos climats, nous n'y avons pas conduit en même temps une colonie des inſectes qui leur ſont appropriés. Les figuiers à ſexe diſtinct ſont dans ce cas, ils exigent pour leur fécondation le concours d'un certain inſecte ailé. Auſſitôt que le figuier mâle ouvre ſa figue par un petit trou qui paroît au ſommet, les inſectes en queſtion y pénètrent, non dans le deſſein de concourir à la fécondation des parties femelles, mais attirés par le ſuc mielleux & nourriſſant des petites fleurs que recèle la figue. Ces in-

ſectes ne s'engendrent donc point dans la figue mâle comme le penſoient Pline & Tournefort, ils y viennent du dehors pour s'y nourrir.

Le ſommet de la figue femelle de l'arbre cultivé s'ouvre à l'époque de la floraiſon, comme la figue mâle, & l'orifice qui s'y forme eſt aſſez grand pour laiſſer librement entrer & ſortir les petits inſectes, qui après avoir parcouru les fleurs de la figue, dépoſent leurs oeufs dans la pulpe. De ces oeufs proviennent de larves (vers) qui ſes nourriſſent de la partie charnue de la figue, & ſe changent enſuite en inſectes. Mais la récolte des figues ſe fait avant que ces larves ayent eu le temps de ſe développer, & les fruits récoltés ſont enſuite ſéchés au four. Quant aux larves dépoſées dans les figues mâles, elles peuvent y achever leur croiſſance, y paſſer à l'état de nymphe, & ſe métamorphoſer la ſaiſon ſuivante en inſectes pour aller fréquenter les fleurs du figuier mâle. Il eſt intéreſſant de voir comment la nature a lié la propagation du figuier à l'exiſtence d'un frêle inſecte; on ſe ſent diſpoſé à l'admiration, en voyant dans ce cas comme dans mille autres, l'harmonie régner entre tous les êtres, & le bien général réſulter d'un déſordre apparent.

Des botaniſtes plus récens ont obſervé que dans l'Orient & en Barbarie, on pratique la caprification dans certains cantons, tandis qu'on la néglige entièrement dans d'autres, où cependant la récolte des figues eſt très-abondante. Ils ont prétendu conclure de là que l'opération eſt eſſentiellement inutile, & que ſans elle on obtient également ſon but. Il eſt poſſible en effet que dans les pays où le figuier croît ſpontanément, la caprification ſoit ſuperflue, mais par-tout où il n'exiſte pas dans la proximité des plantations d'arbres ſauvages, elle ſe trouvera certainement être d'une grande utilité. Les anciens en avoient reconnu la néceſſité par expérience, & ce n'eſt pas par des concluſions tirées des principe de la botanique qu'ils y étoient arrivés. Sans doute que dans des pays mêmes où ne ſe trouvent pas des figuiers ſauvages, les figues pourront à toute rigueur mûrir ſans la caprification, mais elles demeureront petites, & leur ſemence ſera ſtérile, parce que, faute de

féco-

fécondation le réceptacle des fleurs & des germes, qui proprement conſtitue la figue, s'étend & augmente ſans que le germe lui-même ſe développe.

Quelque bizarre que puiſſe paroître la ſtructure de la figue, il n'eſt pas difficile néanmoins de tracer un paſſage inſenſible vers cette ſtructure, en rapprochant les unes des autres celles des fleurs de divers autres végétaux. Il paroît que la nature a ſuivi un type normal dans l'organiſation des plantes, puisque nous trouvons dans toutes les mêmes organes dans des formes inſenſiblement modifiées. Je vais tenter de confirmer le principe, en traçant le paſſage inſenſible des formes depuis la fleur exiſtant individuellement jusqu'à la figue. La figue eſt, comme on ſait, un réceptacle creux piriforme, tenant exactement renfermées les fleurs diſpoſées ſur ſa paroi interne. Si nous la rapprochons de la fleur du ceriſier, nous trouverons que cette dernière n'ayant qu'un piſtil unique, le réceptacle eſt auſſi très-peu volumineux, de façon qu'à l'époque de la maturité de la ceriſe, nous trouvons au lieu de réceptacle l'extrémité un peu émouſſée du pédicule. Mais quand une fleur a pluſieurs piſtils à loger, il faut que la baſe où ils viennent s'implanter ait beaucoup plus d'étendue que nous ne lui en trouvons dans les fleurs du piſtil, excepté pourtant *Anacardium, Semecarpus, Hovenia,* & quelques autres peut-être. Dans la fraiſe il exiſte un grand nombre de piſtils qui ne trouveroient point place ſur une baſe circonſcrite, auſſi le réceptacle prend-il de l'étendue, & devient même monceau charnu, au point que dans la vie commune on traite ce réceptacle de fruit. Nous obſervons ici le premier cas d'une amplification du réceptacle, qui devient bien plus ſenſible dans les plantes où pluſieurs fleurs ayant un calice commun, ſont implantées ſur une même baſe, & que les anciens botaniſtes nommoient *Fleurs agrégées,* (flores aggregati) comme par exemple *Dipſacus, Scabioſa, Globularia, Protea, Bankſia* &c. L'amplification du réceptacle devient encore plus ſenſible dans les fleurs qui appartiennent à la 19e claſſe (Syngeneſia) que les anciens nommoient *Flores compoſiti.* L'exemple le plus frappant en eſt *Helianthus,* qui ſur un disque

rond porte un grand nombre de fleurs. Cette espèce de fleurs eſt le point de départ pour arriver aux végétaux, qui ſur la ſurface plane & très-étendue de leur réceptacle portent un grand nombre de fleurs inſérées, ainſi que nous le voyons dans le genre *Dorſtenia*, dont les climats chauds de l'Amérique offrent pluſieurs espèces. Ce ſingulier genre n'offre pas ſur ſon réceptacle épais & charnu des fleurs ſimplement implantées, comme on l'obſerve dans les fleurs compoſées, mais on y voit les fleurs pénétrer profondément dans la ſubſtance même du réceptacle, & ne laiſſer paroître que leurs ſommités. On ne peut méconnoître les rapports marqués de cette ſtructure avec celle de la figue; la ſeule différence qu'on y obſerve, mettant à part la ſtructure des fleurs, ce qui va ſans dire, c'eſt que le réceptacle eſt conſtamment en forme de ſoucoupe aplatie dans la *Dorſtenia*, & que jamais il n'offre un aliment à l'homme. Mais il eſt une plante qui ſe rapproche encore plus de l'inflorescence de la figue; elle conſtitue un genre dont on ne connoît qu'une espèce: c'eſt la *Mithridatea quadrifida* de l'île de Madagascar, que l'on nomme en Allemagne *arbre à tambour*, (Trommelbaum) parce que les Indiens emploient ſon bois à cet uſage. Sonnerat a donné dans la relation de ſon voyage, une bonne deſcription de cet arbre. Les fleurs ſont ici, comme dans la *Dorſtenia*, profondément engagées dans la ſubſtance d'un réceptacle charnu, mais le rapport qui rapproche cette ſtructure de celle de la figue, c'eſt que ce réceptacle eſt fermé avant le développement des fleurs, & ne s'ouvre en quatre parts qu'à l'époque où les petites fleurs qu'il renferme vont ſe développer, & dans ce moment-là il offre l'apparence d'une fleur quadrifide. Le paſſage de *Dorſtenia* à *Ficus* par *Mithridatea* eſt très-frappant; il eſt vrai que le réceptacle de *Mithridatea* n'eſt pas comeſtible, mais cette circonſtance eſt peu relevante, parce que la propriété d'être un fruit alimentaire appartient ſi peu comme caractère au *Ficus*, que la majeure partie des espèces de ce genre ne produiſent pas des réceptacles comeſtibles ou des figues mangeables. Si nous conſidérons d'un autre côté tout réceptacle produiſant pluſieurs fleurs comme un point de réunion ou une

accumulation de pluſieurs pédicules de fleurs ou de fruits, qui ſe ſouderoient enſemble dans cette forme, (& ce point de vue ſeroit très-vrai) nous rencontrons un végétal qui ſous ce rapport a des affinités de ſtructure avec la figue; c'eſt l'arbre connu des botaniſtes ſous le nom de *Hovenia dulcis*, & qui croît au Japon. Les pédicules des fleurs s'arrondiſſent, groſſiſſent & deviennent charnus après la floraiſon, dès qu'ils ont fait toute leur croiſſance; ils ont la ſaveur des pommes de Borſtdorf, tandis que le fruit de l'arbre eſt une capſule acide & nullement comeſtible.

On ſeroit tenté de croire que le figuier étant connu depuis la haute antiquité, ſon fruit dépoſé dans l'intérieur de la figue, ou de ſon réceptacle, pour demeurer fidèle à la terminologie, devroit pareillement être connu des botaniſtes depuis très-long-temps, & parfaitement caractériſé. Si l'on rapproche néanmoins les deſcriptions qu'en ont données divers botaniſtes, nous y trouverons une ſi grande diſharmonie, que quiconque n'auroit pas étudié cet objet par lui-même ne ſauroit quelle idée s'en faire; je crois donc bien faire de comparer entr'elles avec quelque détail ces diverſes deſcriptions. Linné dit:

Receptaculum commune turbinatum carnoſum connivens occultans floſculos vel in eodem, vel in diſtincto.

Flos maſculus: Calyx tripartitus, corolla nulla, ſtamina tria.

Flos femineus: Calyx quinquepartitus, corolla nulla, piſtillum unicum, ſemen unicum.

Scopoli dans ſes *Deliciae Florae et Faunae Inſubricae III* p. 70 s'accorde avec Linné relativement au réceptacle, mais il décrit tout autrement la fleur & le fruit, il dit:

Flos maſculus: Calyx quinquefidus, corolla nulla, ſtamina 2—7, filamentum ſingulum apice ſuſtinet antheras duas diſtinctas ovatas biloculares.

Flos femineus: Calyx quadrifidus, corolla nulla, piſtillum unicum, bacca monosperma.

Gärtner dans ſon bel ouvrage *de Fructibus et ſeminibus plantarum II, p. 66*, a conſervé les caractères du réceptacle & de la fleur tels que Linné les donne: mais il dit du fruit que c'eſt une *Drupa monosperma.* Dans le même volume néanmoins, il ſe trouve avoir changé d'opinion (p. 484), & dit en décrivant *Ficus religioſa: Etiam in hac ſpecie pericarpium proprium eſt mera pellucida pulpa, per maturitatem exarescens et ſemen arcte claudens, hinc omnino Drupae nomen in caractere Ficus Caricae expungendum et ejus loco utriculus pulpoſus ponendus.*

Linné croyoit donc que la figue produit une ſemence nue; Scopoli une baie monosperme, & Gärtner eſt d'abord d'avis que c'eſt un fruit à noyau monosperme, puis il en fait un fruit ſucculent membraneux. Quant à la différence qui règne entre *Linné* & *Scopoli* relativement aux fleurs, il n'eſt pas néceſſaire de s'y arrêter, puisqu'on ſait à quel point le nombre des parties varie dans les fleurs des plantes cultivées, ſelon que le ſol & l'expoſition modifient les individus; mais les caractères attribués au fruit par les deux auteurs ſont trop eſſentiellement différens pour qu'il ſoit poſſible de les concilier. D'après les recherches ſouvent réiterées que j'ai faites pour ſtatuer quelque choſe ſur ce point, il ſe trouve que c'eſt la deſcription de Linné qui mérite le plus de foi. Les fleurs mâles & femelles ſont l'une & l'autre ſoutenues par un pédicule court & filiforme, ainſi que tous les botaniſtes l'ont aperçu. Le germe de la fleur femelle, qui devient enſuite la ſemence, eſt environné du calyce, qui après la floraiſon ſe ferme, devient un peu plus charnu, & recouvre la ſemence jusqu'à ſa maturité complète, ce qui donne à celle-ci quelque reſſemblance avec une baie. Il convient donc d'énoncer ainſi les caractères de ces fruits: *Semen unicum, calyce perſiſtenti ſucculento clauſo tectum.*

Le genre du figuier a été placé ſucceſſivement par Linné dans deux claſſes de ſon ſyſtème. D'abord il le rapporta à la dernière, les *Cryptogames;* puis il ſuivit les conſeils du baron de *Münchhauſen*, & le transporta dans ſa 23ème claſſe (Polygamia), le mettant avec *Ceratonia* dans un ordre particulier qu'il nomma *Trioecia.* Le chevalier *Thunberg*, qui

perfectionna le ſyſtème de *Linné* en éliminant ſes quatre penultièmes claſſes, transporta la figuier dans la troiſième claſſe, *Triandria*, d'après le nombre de ſes anthères. Le profeſſeur *Swartz*, dans ſon *Prodromus Florae Indiae occidentalis*, l'a reporté depuis dans la claſſe des cryptogames. Or il eſt ſelon moi abſolument impoſſible de ranger le figuier dans cette catégorie, parce que la ſtructure de ſes organes eſt abſolument analogue à celle de tous les autres végétaux, quoique ſes parties ſexuelles ſoient dérobées aux yeux par le réceptacle qui les enveloppe. D'ailleurs, la figue offre un mode de germination & de croiſſance abſolument diſtinct de celles des cryptogames, qui malgré les différences de ſtructure les plus ſaillantes, ont cependant des rapports conſtans ſur ce point. *Linné* blâme *Rajus* d'avoir créé une nouvelle claſſe pour recevoir le figuier, & lui-même néanmoins conſacre un *ordre* particulier de la claſſe *Polygamia*, dans lequel il ne reçoit *Ceratonia* que pour ne pas y laiſſer le figuier entièrement iſolé. Ce n'eſt pas ici le lieu d'articuler les raiſons qui militent contre toute cette claſſe, mais je ne puis me diſpenſer d'obſerver que l'ordre *Trioecia* n'a ici aucun ſens précis, & eſt en lui-même très-ſuperflu. Cette obſervation eſt importante, parce que pluſieurs Polygames offrent la même différence ſexuelle. Il n'eſt point rare dans nos climats de trouver des érables de l'eſpèce vulgaire, dont un individu porte les fleurs hermaphrodites, un autre n'a que des fleurs mâles, & un troiſième que des fleurs femelles. Le frêne & pluſieurs autres végétaux offrent le même phénomène. D'où il reſulte que dans le cas où l'on voudroit maintenir cette claſſe, il faudroit de deux choſes l'une, ou recevoir un plus grand nombre de plantes dans l'ordre *Trioecia*, ou rayer entièrement cet ordre, d'autant plus que le caractère *Trioecia* ſemble tacitement compris déjà dans la notion *Polygamia*. Si donc l'on vouloit compter le figuier parmi les Polygames, il faudroit le placer dans l'ordre *Dioecia*.

Les eſpèces du figuier ſont auſſi nombreuſes, & les voyages récens dans les pays lointains ont ſurtout contribué à augmenter ce nombre. *Linné* compte 12 eſpèces dans les dernières éditions qu'il a données lui-même

de ſon ſyſtême. Son fils augmenta ce nombre de cinq, & le chevalier Thunberg en décrit 27 dans une diſſertation en forme de thèſe ſoutenue ſous ſa préſidence à Upſal en 1786. Aujourd'hui ce nombre s'eſt accru juſqu'à 40; auxquelles il faut en ajouter trois nouvelles que je vais caractériſer dans le langage des botaniſtes.

Ficus ſcabra. Tab. II.

F. foliis ſubrotundo-ellipticis, dentatis acuminatis ſcaberrimis.

Rami teretes ſtriati ſcabri a caſu foliorum cicatriſati.

Folia alterna petiolata ſubrotundo-elliptica baſi attenuata integerrima, apice acuminata, margine inaequaliter dentata, venoſa, utrinque punctis prominulis ſcaberrima.

Cette nouvelle eſpèce croît en Guinée, ſes feuilles ſont ſi raboteuſes, qu'elles peuvent, tout auſſi bien que celles de l'*Equiſetum fluviatile* & de quelques autres végétaux, ſervir à donner du poli au bois; je ne connois pas encore la figue.

Ficus paraſitica. Tab. III.

F. foliis ellipticis obtuſiusculis integerrimis ſubtus reticulatis, ſcabriusculis, pedunculis geminatis, receptaculis globoſis umbilicatis.

Rami teretes laeves cortice albicanti tecti.

Folia alterna petiolata elliptica baſi et apice parum attenuata obtuſiuscula, margine integerrima, coriacea, reticulato-venoſa praeſertim ſubtus, ſuperne nitida glabra, inferme ſcabriuscula.

Pedunculi axillares geminati.

Receptacula globoſa magnitudine piſi umbiliçata.

Ce figuier croît aux Indes Orientales ſous forme d'un petit arbuſte, quelquefois même il s'implante ſur de vieux arbres, d'où ſon nom lui eſt venu. Le fruit n'eſt point comeſtible.

Ficus calloſa. Tab. IV.

F. foliis oblongis obtuſis baſi anguſtatis integerrimis ſubtus ſcabris, receptaculis umbilicatis.

Rami teretes fusci a foliorum caſu cicatriſati.

Folia alterna petiolata oblonga obtuſa, baſi parum anguſtata punctisque binis calloſis ſuperne inſtructa, margina integerrima venoſa, ſuperne atro-virida nitida glabra, inferne pallidiora ſcabra.

Receptacula globoſa magnitudine ceraſi umbilicata.

Ce figuier croît dans les Indes Orientales, & a le plus grand rapport avec *Ficus lucida*, dont il ne ſe diſtingue que par ſes feuilles plus petites, plus coriacé-hériſſées dans leur face inférieure, allant en diminuant vers leur baſe, & marquées de deux points très-petits, ayant la conſiſtence cartilagineuſe; il paroît que la figue n'en eſt pas non plus comeſtible.

Ficus mollis. Tab. V.

F. foliis oblongis integerrimis ſupra ſcabriusculis, ſubtus villoſo-mollibus receptaculis lateralibus globoſis umbilicatis ſeſſilibus pubescentibus.

Ficus (mollis) foliis oblongis integerrimis ſubtus villoſis fructibus axillaribus ſeſſilibus tomentoſis. (Vahl Symb. 1, p. 82).

Rami teretes pallide fusci, juniores pubescentes ſubtomentoſi.

Folia oppoſita petiolata oblonga tripollicaria acuta integerrima ſuperne nitida ſcabriuscula, inferne reticulato-venoſa villoſo-hirta mollia.

Petioli ſemi-teretes ſemipollicares pubescentes.

Receptacula lateralia aggregata ſeſſilia globoſa umbilicata pubescentia.

Ce figuier eſt très-diſtinct de tous les autres, ſurtout par la poſition oppoſée de ſes feuilles, tandis que dans tous les autres elles ſont alternes. Je ne décide pas poſitivement ſi la plante décrite par le profeſſeur Vahl eſt préciſément la même dont il s'agit ici, parce que dans ſa deſcription il n'eſt fait mention ni de la poſition oppoſée des feuilles, ni de leur ſurface hériſſée.

Je ne doute pas que dans les climats chauds il n'exiſte encore pluſieurs eſpèces de figuiers encore inconnues. Dans ces pays on ne les

trouve que dans les marécages ou sur les collines. Quoique les figuiers appartiennent presque tous aux climats chauds, plusieurs d'entr'eux présentent la singularité intéressante d'une chute de feuilles qui leur arrive dans leur climat natal, à l'approche de la saison des pluies. C'est à cause de cela que Rumpf a donné à une espèce de figuier le nom d'arbre mort. Il y a enfin quelques espèces de figuiers qui se distinguent par la propriété d'envoyer de leurs rameaux de nouvelles racines en terre, & de produire ainsi de nouveaux individus.

F. Guimpel. aet. mit. pinx. et fec. 1798

Ficus Scabra.

Digitized by Google

Digitized by Google

F. Guimpel. aq. not. pinx. et fc.

1798

Ficus parasitica.

Digitized by Google

Ficus callosa

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE

DES

SCIENCES

ET

BELLES-LETTRES.

CLASSE

DE MATHÉMATIQUE.

Digitized by Google

De la route de la lumière qui traverſe un prisme transparent, avec des applications aux prismes achromatiques & aux lunettes achromatiques.

PAR M. BURJA *).

Rien n'eſt plus connu de ceux qui ont quelque teinture des ſciences phyſico-mathématiques, que les phénomènes qu'offrent les prismes transparens; mais la théorie de ces phénomènes eſt moins vulgaire, & l'on ne connoit pas aſſez les conſéquences qu'on peut en tirer. Ce que les traités d'optique, même les meilleurs, en diſent, eſt aſſez peu de choſe. Feu M. de Beguelin eſt celui qui a traité cette matière avec le plus de ſoin & le plus d'étendue dans ſes divers Mémoires d'optique (voyez les Mémoires de Berlin, pour les années 1762, 1763 & 1764). Cependant il lui eſt échappé quelques inexactitudes, & ſes démonſtrations ne ſont pas toujours les plus courtes & les plus ſimples poſſibles. C'eſt ce qui m'engage à reprendre cette matière. J'examinerai d'abord le chemin que prend la lumière qui traverſe un prisme transparent: j'appliquerai enſuite les principes qui en réſultent, tant aux prismes achromatiques qu'aux lunettes achromatiques. Mon mémoire ſera en quelque ſorte une refonte de celui de M. de Beguelin.

*) Lu le 8 mars 1798.

PREMIÉRE PARTIE.

De la route de la lumière qui traverſe un prisme transparent.

Fig. I. Soit HIK la coupe d'un prisme faite perpendiculairement à l'axe; K ou ϖ l'angle réfringent; AB un rayon de lumière qui tombe ſur le prisme, ABC ou α l'angle qu'il fait avec la droite CBD, qui paſſe par le point d'incidence B, & qui eſt perpendiculaire ſur le côté HK de la coupe du prisme; DBE ou β l'angle que le rayon réfracté BE fait avec la même perpendiculaire; BED ou γ l'angle que le même rayon réfracté fait avec la droite GED, qui paſſe par le point E où ſe fait la ſeconde incidence, & qui eſt perpendiculaire ſur IK; FEG ou δ l'angle que le rayon émergent EF fait avec la même perpendiculaire. Par α, β, γ & ϖ j'entends proprement les longueurs des arcs qui meſurent les angles, le rayon étant ſuppoſé $= 1$. Soit pour les rayons qui paſſent de l'air dans la matière du prisme, le ſinus de l'angle d'incidence au ſinus de l'angle de réfraction comme m eſt à 1; par conſéquent pour les rayons qui ſortent du prisme & entrent dans l'air le rapport ſera celui de 1 à m.

On obſervera d'abord que $\gamma = \varpi - \beta$. Car dans le quadrilatère $BDEKB$, qui a des angles droits en B & en E, $\varpi + \wedge D = 2$ droits. Dans le triangle BDE, $\beta + \gamma + \wedge D = 2$ droits. Donc $\varpi + \wedge D = \beta + \gamma + \wedge D$, & $\varpi = \beta + \gamma$, par conſéquent $\gamma = \varpi - \beta$.

Cela poſé, on a

$$\text{ſin } \beta = \frac{\text{ſin } \alpha}{m} \text{ (puisque } m : 1 :: \text{ſin } \alpha : \text{ſin } \beta)$$

$$\text{cof } \beta = \sqrt{\left(1 - \frac{\text{ſin}^2 \alpha}{m^2}\right)}$$

$$\text{ſin } \gamma = \text{ſin } (\varpi - \beta)$$

$$= \text{ſin } \varpi \,.\, \text{cof } \beta - \text{ſin } \beta \,.\, \text{cof } \varpi$$

$$= \text{ſin } \varpi \,.\, \sqrt{\left(1 - \frac{\text{ſin}^2 \alpha}{m^2}\right)} - \frac{\text{ſin } \alpha}{m} \,.\, \text{cof } \varpi$$

$$\text{fin } \delta = m \,.\, \text{fin } \gamma \text{ (puisque fin } \gamma : \text{fin } \delta :: 1 : m)$$
$$\text{ou fin } \delta = \text{fin } \varpi \,.\, \sqrt{(m^2 - \text{fin}^2\, \alpha)} - \text{fin } \alpha \,.\, \text{cof } \varpi$$

Au moyen de cette formule, connoiſſant l'angle du prisme & l'angle d'incidence, on trouvera toujours l'angle d'émerſion.

Faiſons quelques obſervations ſur cette formule. Elle devient imaginaire lorsque fin $\alpha \succ m$. Cela ne peut pas arriver, lorsque $m \succ 1$, c'eſt-à-dire lorsque le rayon paſſant du milieu ambiant dans le prisme, s'y rapproche en effet de la perpendiculaire: car fin α eſt toujours $\prec 1$, puisque α eſt toujours moindre qu'un angle droit. Mais cela pourroit arriver lorsque $m \prec 1$, c'eſt-à-dire lorsque le rayon en ſe réfractant s'éloigne de la perpendiculaire: car alors l'angle α peut être aſſez grand pour que $\text{fin}^2\, \alpha$ ſoit $\succ m$. Dans ce cas l'angle δ n'exiſteroit pas, c'eſt-à-dire que BE ne rencontreroit pas le côté IK. En effet, ſi le rayon paſſe d'un milieu plus denſe dans un plus rare, & ſi l'angle d'incidence eſt conſidérable, il peut arriver que prenant le ſinus de cet angle m fois, il en réſulte un angle β de 90 degrés ou davantage; alors la réfraction n'a plus lieu, mais elle ſe change en réflexion.

La valeur de fin δ, & par conſéquent de δ, devient nulle lorsque

$$\text{fin } \varpi \sqrt{(m^2 - \text{fin}^2\, \alpha)} = \text{fin } \alpha \,.\, \text{cof } \varpi$$
$$\text{ou fin}^2\, \varpi \,(m^2 - \text{fin}^2\, \alpha) = \text{fin}^2\, \alpha \,.\, \text{cof}^2\, \varpi$$
$$\text{ou } m^2 \,.\, \text{fin}^2\, \varpi - \text{fin}^2\, \alpha \,.\, \text{fin}^2\, \varpi = \text{fin}^2\, \alpha \,.\, \text{cof}^2\, \varpi$$
$$\text{ou } m^2 \,.\, \text{fin}^2\, \varpi = \text{fin}^2\, \alpha \,.\, \text{cof}^2\, \varpi + \text{fin}^2\, \alpha \,.\, \text{fin}^2\, \varpi$$
$$\text{ou } m^2 \,.\, \text{fin}^2\, \varpi = \text{fin}^2\, \alpha \,.\, (\text{cof}^2\, \varpi + \text{fin}^2\, \varpi)$$
$$\text{ou } m^2 \,.\, \text{fin}^2\, \varpi = \text{fin}^2\, \alpha$$
$$\text{ou } m \,.\, \text{fin } \varpi = \text{fin } \alpha$$

Ainſi lorsque fin ϖ : fin α :: 1 : m, le rayon émergent eſt perpendiculaire à la ſurface du prisme qu'il vient de quitter.

La valeur de fin δ, & par conſéquent de δ, devient négative, lorsque

$$\text{fin } \varpi \sqrt{(m^2 - \text{fin}^2\, \alpha)} \prec \text{fin } \alpha \,.\, \text{cof } \varpi$$

ou, en faiſant des transformations ſemblables aux précédentes, lorsque

$$m \cdot \text{ſin } \varpi < \text{ſin } \alpha$$
$$\text{ou ſin } \alpha > m \cdot \text{ſin } \varpi.$$

Dans ce cas le rayon incident AB reſtant toujours du côté de la baſe HI, par rapport à la perpendiculaire CD, le rayon EF ſera du côté oppoſé relativement à la perpendiculaire GD, c'eſt-à-dire qu'il ira du côté de la pointe K.

Si l'on fait ſin α négatif dans la formule, c'eſt-à-dire ſi l'on ſuppoſe que le rayon incident vienne du côté de la pointe K, on aura

$$\text{ſin } \delta = \text{ſin } \varpi \cdot \sqrt{(m^2 - \text{ſin}^2 \varpi)} + \text{ſin } \alpha \cdot \text{coſ } \varpi$$

& alors δ, hors le cas de l'impoſſible, eſt toujours poſitif, c'eſt-à-dire que le rayon émergent va toujours du côté de la baſe IK.

Toutes ces conſéquences de la formule générale ſe vérifient encore par la conſtruction, ſi on la fait, ou du moins ſi on ſe l'imagine, pour chaque cas particulier.

Au lieu de rapporter la poſition & la direction du rayon émergent à la perpendiculaire correſpondante, on peut les rapporter auſſi au rayon incident.

Fig. II. Dans la ſeconde figure on voit tout ce qu'il y a dans la précédente, & de plus, on y a prolongé le rayon incident & le rayon émergent de manière qu'ils ſe coupent en L & forment l'angle ε. Les angles ζ & η ſont ceux que les prolongemens font avec le rayon traverſant BE.

Il eſt clair que $\angle DBL = \angle ABC = \alpha$, & $\angle DEL = \angle FEG = \delta$. Ainſi

$$\angle DBL + \angle DEL = \alpha + \delta$$
ſouſtrayant $\beta + \gamma = \varpi$ (comme on l'a prouvé)
$$\text{reſte } \zeta + \eta = \alpha + \delta - \varpi.$$

Or ε étant l'angle extérieur du triangle BEL, il eſt égal à $\zeta + \eta$. Ainſi

$$\varepsilon = \alpha + \delta - \varpi$$
$$\text{donc ſin } \varepsilon = \text{ſin } (\alpha + \delta - \varpi)$$

On pourroit développer ce ſinus, en mettant pour ſin δ & cof δ qui y entreroient leurs valeurs en fonction de α & de ϖ (voyez ci-deſſus page 5), mais cela deviendroit trop compliqué. Connoiſſant donc α & ϖ, on calculera d'abord δ ſelon les règles précédentes, & en ſouſtrayant ϖ on aura ε, c'eſt-à-dire l'inclinaiſon réciproque du rayon incident & du rayon émergent.

Si le rayon émergent devoit devenir parallèle avec l'incident, il faudroit que ε devint $= 0$, & que $\alpha + \delta = \varpi$, ce qui eſt évidemment impoſſible dans le cas où α & δ ſont tous deux poſitifs comme dans la figure, puiſque $(\beta + \gamma) + (\zeta + \eta) = \alpha + \beta$, donc $(\beta + \gamma) < (\alpha + \beta)$. Mais on ne voit pas ſi clairement ſi la même impoſſibilité ſubſiſte dans tous les autres cas. Examinons la choſe. L'angle $\varepsilon = 0$ ſuppoſe donc $\alpha + \delta = \varpi$, ou

$$\delta = \varpi - \alpha,$$
$$\text{ou } \text{ſin } \delta = \text{ſin } \varpi \text{ cof } \alpha - \text{cof } \varpi \,.\, \text{ſin } \alpha$$

Égalant cette valeur de ſin δ, à celle qui a été trouvée plus haut, il vient

$$\text{ſin } \varpi \sqrt{(m^2 - \text{ſin}^2 \alpha)} - \text{ſin } \alpha \,.\, \text{cof } \varpi = \text{ſin } \varpi \,.\, \text{cof } \alpha - \text{cof } \varpi \,.\, \text{ſin } \alpha$$
$$\text{ou ſin } \varpi \,.\, \sqrt{(m^2 - \text{ſin}^2 \alpha)} = \text{ſin } \varpi \,.\, \text{cof } \alpha$$
$$\sqrt{(m^2 - \text{ſin}^2 \alpha)} = \text{cof } \alpha$$
$$m^2 - \text{ſin}^2 \alpha = \text{cof}^2 \alpha$$
$$m^2 - \text{ſin}^2 \alpha = 1^2 - \text{ſin}^2 \alpha$$
$$m^2 = 1$$
$$m = 1.$$

Cela montre que le parallélisme dont il s'agit n'eſt poſſible que dans le cas où $m = 1$, c'eſt-à-dire où la lumière ne ſe briſe point du tout en entrant d'un milieu transparent dans l'autre, ce qui fait le même effet que ſi elle ne changeoit point de milieu. Il n'eſt pas beſoin d'examiner encore ſi ε peut devenir négatif, c'eſt-à-dire ſi cet angle peut changer de poſition, & ſe trouver relativement au rayon incident du côté de l'angle K. Car pour changer de nature, & devenir né-

gatif de poſitif qu'il étoit, il devroit paſſer par l'état de nullité, ce qui, comme on vient de voir, ne ſe peut pas.

Il y a cependant un cas où la nullité de l'angle ε, & par conſéquent le parallélisme du rayon émergent avec l'incident, a lieu; c'eſt lorsque l'angle $\varpi = 0$, c'eſt-à-dire lorsqu'au lieu d'un prisme triangulaire, on a un corps renfermé entre deux ſurfaces parallèles. Car mettant $\varpi = 0$ dans la formule générale (page 5), on trouve $\sin \delta = -\sin \alpha$, ou $\delta = -\alpha$, & mettant $-\alpha$ pour δ & 0 pour ϖ dans $\varepsilon = \alpha + \delta - \varpi$, on a $\varepsilon = 0$, ce qui s'accorde avec les notions élémentaires de la dioptrique.

Fig. III. On peut encore rapporter la poſition du rayon émergent à une droite AF tirée arbitrairement, & dont on connoît la poſition au moyen de l'angle θ que le rayon incident AB fait avec cette ligne AF. Dans ce cas, nommant ι l'angle que le rayon émergent fait avec AF, on a

$$\iota = \varepsilon - \theta$$
$$\text{ou } \iota = \alpha + \delta - \varpi - \theta.$$

Puiſque ε ou $\alpha + \delta - \varpi$ eſt toujours poſitif, ι ſera auſſi poſitif, tant que θ ſera plus petit que ε. Mais ſi θ étoit $> \varepsilon$, ι ſeroit négatif, c'eſt-à-dire tourné en ſens contraire, & la rencontre auroit lieu vers le côté oppoſé à celui où eſt F relativement à AB ou AE.

On voit que dans toutes les queſtions relatives à la route du rayon de lumière qui traverſe le prisme, les angles α & δ ſont les quantités dont dépendent principalement les ſolutions. Ces angles dépendant l'un de l'autre, examinons le cas où ils deviennent égaux. Pour cet effet il faut donc que

$$\sin \alpha = \sin \delta$$
$$\text{ou que } \sin \alpha = \sin \varpi \sqrt{(m^2 - \sin^2 \alpha)} - \sin \alpha \cdot \cos \varpi$$
$$\sin \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \varpi = \sin \varpi \sqrt{(m^2 - \sin^2 \alpha)}$$
$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varpi + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \varpi = m^2 \sin^2 \varpi - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \varpi$$
$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \varpi + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \varpi + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \varpi = m^2 \sin^2 \varpi$$

2 sin

$$2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \varpi = m^2 \sin^2 \varpi$$
$$2 \sin^2 \alpha (1 + \cos \varpi) = m^2 \sin^2 \varpi$$
$$\sin^2 \alpha = \frac{m^2 \sin^2 \varpi}{2 (1 + \cos \varpi)}$$
$$\sin^2 \alpha = \tfrac{1}{2} \operatorname{sin\,verf} \varpi \cdot m^2$$
$$\sin^2 \alpha = (\sin \tfrac{1}{2} \varpi)^2 \cdot m^2$$
$$\sin \alpha = m \cdot \sin \tfrac{1}{2} \varpi.$$

Et puisqu'on a ſuppoſé $\delta = \alpha$, donc auſſi $\delta = m \sin \frac{1}{2} \varpi$. De là il Fig. IV. s'enſuit que $\beta = \gamma = \frac{1}{2} \varpi$. Donc auſſi les angles BEK & EBK, complémens de γ & de β, ſont égaux, par conſéquent le triangle BEK eſt iſocèle, & $BK = EK$. Puisque $BK = EK$, que $DK = DK$, & qu'il y a des angles droits en B & en E, les triangles KBD & KED ſont identiques, & $BD = ED$, $\wedge BDK = \wedge EDK$, $\wedge BKD = \wedge EKD = \frac{1}{2} \varpi = \beta = \gamma$. Dans les triangles ADM, EDM on a donc $BD = ED$, $DM = DM$, $\wedge BDM = \wedge EDM$. Ils ſont donc identiques. Donc $\wedge EMD = \wedge BMD = 90^d$ & $ME = MB$. Ainſi le rayon traverſant BE eſt perpendiculaire à la ligne DK qui mi partit l'angle réfringent K & auſſi le rayon traverſant BE.

On ſe ſouviendra que $\varepsilon = \alpha + \delta - \varpi$. Pour avoir la plus grande valeur de ε, il faudra donc différentier & ſuppoſer $d\varepsilon = 0$. Il faut auſſi regarder ϖ comme conſtante. On aura donc $0 = d\alpha + d\delta$. Mais $\alpha = \text{arc sin } (m \sin \beta)$ & $\delta = \text{arc sin } (m \sin \gamma) = \text{arc sin } m \sin (\varpi - \beta)$. De plus, on a en général $d\,(\text{arc sin } x) = \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)}}$, ainſi

$$0 = \frac{m \cdot d\beta \cdot \cos \beta}{\sqrt{[1 - m^2 \sin^2 \beta]}} - \frac{m \cdot d\beta \cdot \cos (\varpi - \beta)}{\sqrt{[1 - m^2 \cos^2 (\varpi - \beta)]}}$$
$$0 = \frac{\cos \beta}{\sqrt{[1 - m^2 \sin^2 \beta]}} - \frac{\cos (\varpi - \beta)}{\sqrt{[1 - m^2 \cos^2 (\varpi - \beta)]}}.$$

Sans autre opération, on voit d'abord que cette égalité ne peut avoir lieu à moins que l'on n'ait $\beta = \frac{1}{2} \varpi$, par conſéquent $\gamma = \frac{1}{2} \varpi$, $\beta = \gamma$, & $\alpha = \delta$.

Ainſi pour que le rayon émergent faſſe avec le rayon incident le plus grand angle poſſible, il faut que $\delta = \alpha$, $\beta = \gamma = \frac{1}{2}\varpi$, & alors comme il a été prouvé, le rayon traverſant fait un triangle iſocèle avec les jambes de l'angle réfringent BEK. Cela étant, ſi au lieu du rayon incident on ſuppoſe un faiſceau de lumière du ſoleil, le ſpectre ſera le plus élevé poſſible, & ſi au contraire on regarde un objet à travers le prisme, l'image paroîtra la plus baſſe poſſible.

Toutes ces choſes ſont connues, mais elles ſont démontrées ici d'une manière nouvelle.

Fig. V. Soit maintenant un rayon de lumière, qui partant du point A traverſe l'air & le prisme ſelon la ligne rompue $ABEF$, & ſoient dans la nouvelle figure toutes les lignes & les lettres qui ſe rapportent à ce rayon, comme dans la figure précédente. Soit en même temps AL un autre rayon de lumière plus réfrangible que le rayon AB. Que celui-ci atteigne le prisme plus bas vers le tranchant *inférieur*, faiſant un angle d'incidence $AOL = \alpha'$ & un angle d'émerſion $MNP = \delta'$, & ſoit pour ce rayon la raiſon de réfraction m' au lieu de m. Cela poſé ſin δ' ſera fonction de ſin α' & de m' de la même manière que ſin δ étoit fonction de ſin α & de m. De plus les rayons émergens deviendront parallèles, convergens ou divergens ſelon que ſin $\delta' =$ ſin δ, ſin $\delta' >$ ſin δ ou ſin $\delta' <$ ſin δ. Ainſi les rayons émergens ſeront parallèles, ſi

$$\text{ſin}\,\varpi \sqrt{(m'^2 - \text{ſin}^2\,\alpha')} - \text{ſin}\,\alpha' \,.\, \text{coſ}\,\varpi = \text{ſin}\,\varpi \sqrt{(m^2 - \text{ſin}^2\,\alpha)} - \text{ſin}\,\alpha \,.\, \text{coſ}\,\varpi$$

Ils ſeront au contraire convergens ſi le premier membre eſt plus grand que le ſecond, & divergens ſi le premier membre eſt plus petit que le ſecond. On peut ſimplifier un peu l'équation, en diviſant tout par coſ ϖ, alors on a pour le cas du parallélisme

$$\text{tang}\,\varpi \sqrt{(m'^2 - \text{ſin}^2\,\alpha')} - \text{ſin}\,\alpha' = \text{tang}\,\varpi \sqrt{(m^2 - \text{ſin}^2\,\alpha)} - \text{ſin}\,\alpha$$

ou

$$\text{tang}\,\varpi \left[\sqrt{(m'^2 - \text{ſin}^2\,\alpha')} - \sqrt{(m^2 - \text{ſin}^2\,\alpha)}\right] = \text{ſin}\,\alpha' - \text{ſin}\,\alpha,$$

l'excès du premier membre ſur le ſecond indiquera toujours la convergence, & l'excès du ſecond marquera la divergence. On pourra donc, dans chaque cas particulier, en ſubſtituant à ϖ, α, α', m, m' leurs valeurs données, découvrir ſi les deux rayons, après deux réfractions, doivent devenir parallèles ou convergens ou divergens.

L'équation que nous venons de trouver pour le parallélisme des rayons émergens renfermant des quantités trigonométriques, & auſſi des quantités radicales, dont on ne peut la délivrer qu'en la changeant en une autre très-compliquée du quatrième degré; on voit qu'il eſt difficile d'en tirer des conſéquences ſimples & lumineuſes.

Dans le cas aſſez fréquent où les angles ſont petits, on peut uſer d'une transformation ſemblable à celle que M. Euler a employée dans ſa dioptrique, & qui ſert de fondement à tous les calculs que cet ouvrage renferme. On n'a qu'à ſuppoſer en général

$$\text{ſin } x = x - \tfrac{1}{6} x^3$$
$$\text{cof } x = 1 - \tfrac{1}{2} x^2$$

& omettre en général tous les termes qui contiennent plus de trois dimenſions des petits angles ou plutôt des arcs qui les meſurent. Pour transformer de cette manière

$$\text{ſin } \delta = \text{ſin } \varpi \sqrt{(m^2 - \text{ſin}^2 \alpha)} - \text{ſin } \alpha \,.\, \text{cof } \varpi$$

on a donc

$$\text{ſin } \alpha = \alpha - \tfrac{1}{6} \alpha^3$$
$$\text{ſin}^2 \alpha = \alpha^2$$
$$\sqrt{(m^2 - \text{ſin } \alpha^2)} = \sqrt{(m^2 - \alpha^2)} = m^2 - \frac{\alpha^2}{2m}$$
$$\text{ſin } \varpi \sqrt{(m^2 - \text{ſin}^2 \alpha)} = (\varpi - \tfrac{1}{6} \varpi^3)\left(m - \frac{\alpha^2}{2m}\right) = m\varpi - \frac{m\varpi^3}{6} - \frac{\alpha^2 \varpi}{2m}$$

enſuite

$$\text{ſin } \alpha \,.\, \text{cof } \varpi = (\alpha - \tfrac{1}{6} \alpha^3) \,.\, (1 - \tfrac{1}{2} \varpi^2) = \alpha - \tfrac{1}{6} \alpha^3 + \tfrac{1}{2} \varpi^2$$

Additionnant les valeurs de $\text{fin}\, \varpi \sqrt{(m^2 - \text{fin}^2\, \alpha)}$ & de $\text{fin}\, \alpha \,.\, \text{cof}\, \varpi$, on trouve

$$\text{fin}\, \delta = m\,(\varpi - \tfrac{1}{6}\varpi^3) - (1 - \tfrac{1}{2}\varpi^2)\,\alpha - \frac{\varpi}{2m}\,\alpha^2 + \tfrac{1}{6}\,\alpha^3$$

& $\text{fin}\, \delta'$ étant une fonction toute ſemblable de m' & de α', on a

$$\text{fin}\, \delta' = m'\,(\varpi - \tfrac{1}{6}\varpi^3) - (1 - \tfrac{1}{2}\varpi^2)\,\alpha' - \frac{\varpi}{2m'}\,\alpha'^2 + \tfrac{1}{6}\,\alpha'^3$$

& le parallélisme des rayons émergens exige que

$$\left.\begin{array}{l} m'\,(\varpi - \tfrac{1}{6}\varpi^3) - (1 - \tfrac{1}{2}\varpi^2)\,\alpha' \\ - \dfrac{\varpi}{2m'}\,\alpha'^2 + \tfrac{1}{6}\,\alpha'^3 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} m\,(\varpi - \tfrac{1}{6}\varpi^3) - (1 - \tfrac{1}{2}\varpi^2)\,\alpha \\ - \dfrac{\varpi}{2m}\,\alpha^2 + \tfrac{1}{6}\,\alpha^3 \end{array}\right.$$

L'excès du premier membre ſur le ſecond marque la convergence, & l'excès du ſecond la divergence des rayons émergens. Cette équation n'eſt pas plus commode que celle dont on l'a tirée. Mais elle devient extrêmement ſimple ſi on omet encore les produits de trois dimenſions en α & en ϖ, alors on aura

$$\text{fin}\, \delta = m\,\varpi - \alpha$$

ou comme dans ce cas $\text{fin}\, \delta = \delta$, on aura

$$\delta = m\,\varpi - \alpha$$

de même

$$\delta' = m'\,\varpi - \alpha'$$

& la condition du parallélisme des rayons émergens ſera exprimée par

$$m'\,\varpi - \alpha' = m\,\varpi - \alpha$$

$$\text{ou}\quad (m' - m)\,\varpi = \alpha' - \alpha.$$

Or $\alpha' = 90^d - \wedge BLA$ (voyez la dernière figure) & $\alpha = 90^d - \wedge HBA$. Donc $\alpha' - \alpha = \wedge HBA - \wedge BLA = \wedge A$. Donc dans le cas du parallélisme des rayons émergens, les angles étant toujours très-petits, on a

$$(m' - m)\,\varpi = \wedge A$$

ſi on ſuppoſe $\delta' > \delta$, on aura pour le cas des rayons émergens qui convergent

$$(m' - m)\,\varpi > \wedge A$$

& au contraire les rayons émergens divergeront ſi

$$(m' - m)\,\varpi \prec \wedge A.$$

Suppoſons le cas de la convergence, & par conſéquent $A \prec (m' - m)\,\varpi$, alors les rayons émergens ſe rencontreront quelque part en Q. Soit maintenant en Q un point lumineux ou éclairé, & en A un oeil. Suppoſons auſſi que les deux rayons que nous avons conſidérés ſoient de la ſorte la moins & la plus réfrangible de toutes, ainſi ſelon le ſyſtème que j'ai expoſé dans un mémoire antérieur, un rouge & un bleu. Puisque ſelon l'hypothèſe le rayon rouge AB & le rayon bleu AL, après deux réfractions vont ſe rencontrer en Q, pareillement, en partant de Q, le rayon rouge QC & le bleu QM iront après deux réfractions ſe rencontrer en A. Donc l'oeil en A verra une image du point Q diverſement colorée, ſous l'angle A ou BAL. Et ſi Q eſt l'extrémité ſupérieure d'un objet blanc placé ſur un fond noir, l'image rouge de l'objet commencera dans la direction AB, l'image bleue dans la direction AL, & l'angle BAL ſera la meſure de la bordure ſupérieure. Pour mieux comprendre ceci il faut ſe rappeler ce que j'ai dit des bordures colorées dans mon mémoire ſur la nature des couleurs. Fig. VI.

A meſure que l'angle en A s'agrandit, les rayons EF & MN deviennent moins convergens, & par conſéquent le point Q s'éloigne. Ou au contraire, ſi le point Q s'éloigne l'angle en A s'agrandit. Donc la bordure paroît plus large à meſure que l'objet eſt plus loin, l'oeil reſtant à l'égard du prisme dans la même poſition & à la même diſtance.

Mais l'angle en A étant devenu $= (m' - m)\,\varpi$, les rayons CF & MN deviennent parallèles, ce qui ſuppoſe le point ou l'objet Q à une diſtance infinie. Ainſi quelque loin que ſoit l'objet, l'angle en A & par conſéquent la bordure ne peut devenir plus grande, ni même tout auſſi grande que $(m' - m)\,\varpi$.

Enfin l'angle en A devenant plus grand que $(m' - m)\,\varpi$, les rayons CF & MN deviennent divergens en partant du prisme. Par

conſéquent il faudroit que l'objet Q envoyât des rayons convergens de diverſes couleurs vers le prisme, pour qu'ils puſſent ſe réunir en A en y faiſant un angle plus grand que $(m' - m)\varpi$, ce qui eſt impoſſible dans l'état ordinaire des choſes, & lorsqu'il n'y a pas eu antérieurement d'autres réfractions ou réflexions.

On voit donc que l'angle de la bordure ne croit que jusqu'à une certaine limite, à meſure que l'objet s'éloigne. Or toutes les quantités qui ont une limite, croiſſent d'autant plus lentement qu'elles en ſont plus proches. Ainſi la bordure d'un objet vu par le prisme & qui s'en éloigne, doit d'abord croître aſſez vite, enſuite de plus en plus lentement, & reſter toujours au deſſous de $(m' - m)\varpi$.

Il eſt évident que cela ne s'accorde pas du tout avec une hypothèſe de M. de Beguelin ſelon laquelle les bordures croiſſent en raiſon des diſtances de l'objet. Si cela étoit il faudroit que l'angle de la bordure pût augmenter à l'infini, ce qui eſt même abſurde.

M. de Beguelin étoit incapable de tomber dans une abſurdité; auſſi paroît-il qu'il n'eſtimoit pas la grandeur de la bordure d'après l'angle qu'elle fait à l'oeil, mais plutôt par la ſoutendante de cet angle, priſe à une diſtance du prisme égale à celle de l'objet, c'eſt-à-dire qu'imaginant les directions AB & AL prolongées jusqu'au plan vertical dans lequel eſt l'objet, il prenoit ſur ce plan une droite qui joignoit les extrémités de AB & de AL prolongées, & c'eſt la longueur de cette droite qu'il ſuppoſoit proportionnée à la diſtance de l'objet. Cependant cela même n'eſt point exact. Si ces eſpèces de cordes devoient être en raiſon des diſtances au prisme ou plutôt à l'oeil, il faudroit que l'angle à l'oeil fût conſtant; mais nous avons vu qu'il augmente avec la diſtance, quoique ce ne ſoit point en raiſon de la diſtance. Ainſi les grandeurs des bordures rapportées aux diſtances des objets croiſſent dans une raiſon plus grande que celle des diſtances.

Du moins l'avons-nous prouvé pour le cas où les angles, tant celui du prisme que ceux d'incidence & d'émergence, ſont petits.

Mais ſi la proportion en queſtion étoit vraie, elle devroit avoir lieu pour les angles très-petits tout auſſi bien que pour les grands. D'ailleurs la formule plus complète trouvée ci-deſſus pour les angles un peu plus grands (page 12), & même la formule rigoureuſe pour toutes ſortes d'angles (page 10) montrent également qu'en ſuppoſant les rayons partant de A, ils ne ſortent du prisme convergens qu'auſſi long-temps que l'angle en A eſt au deſſous d'une certaine valeur, qu'il vient enſuite une valeur de A qui les rend parallèles, & que les valeurs de A plus grandes encore les rendent divergens: ce qui ſuffit pour en déduire des conſéquences ſemblables à celles qui ont lieu pour les petits angles.

On a vu que l'angle δ ou ſon ſinus peuvent être exprimés de trois manières, ſavoir:

$$(A)\quad \text{ſin}\,\delta = \text{ſin}\,\varpi\sqrt{(m^2 - \text{ſin}^2\,\alpha)} - \text{ſin}\,\alpha\,.\,\text{cof}\,\varpi$$

$$(B)\quad \text{ſin}\,\delta = m(\varpi - \tfrac{1}{6}\varpi^3) - (1 - \tfrac{1}{2}\varpi^2)\,\alpha - \frac{\varpi}{2m}\alpha^2 + \tfrac{1}{6}\alpha^3$$

$$(C)\quad \delta = m\varpi - \alpha.$$

Les conſéquences qu'on tire de chacune de ces expreſſions doivent être d'autant plus juſtes que les formules elles-mêmes ſont plus exactes.

Pour juger de leur plus ou moins d'exactitude, on obſervera que la première (A) eſt complète & vraie même pour les angles les plus grands. Dans la formule (B), toutes les puiſſances des arcs au deſſus de la troiſième ſont omiſes, il faut donc que la quatrième puiſſance puiſſe déjà être cenſée nulle, lorsqu'on n'exige pas une grande exactitude. Suppoſons qu'on compte pour rien tout ce qui eſt au deſſous de la millième partie du rayon, alors faiſant les quatrièmes puiſſances des arcs de 1, 2, 3 &c. jusqu'à 10 degrés, on trouve que ces quatrièmes puiſſances ont trois zéros après la virgule, mais que la quatrième puiſſance de l'arc de 11 degrés n'a que deux zéros. Ainſi la formule (B) eſt aſſez juſte tant que les angles ne vont pas au-delà de 10 degrés, pourvu qu'on puiſſe compter pour rien la millième partie du rayon, & par conſéquent auſſi négliger des arcs ou des angles de 1, 2 ou 3 mi-

nutes qui ſont moindres que cette millième partie. Mais ſi l'on ne veut compter pour rien que la ſixième décimale, & par conſéquent un arc d'une ou de deux ſecondes, alors la formule (*B*) ne pourra ſervir qu'à-peu-près jusqu'au troiſième degré incluſivement.

Quant à la formule (*C*), où les ſinus ſont ſuppoſés égaux aux arcs, ſi on compte pour rien toute décimale au-delà de la troiſième, elle ſervira jusqu'au ſixième degré incluſivement. Mais ſi on ne veut compter pour rien que la ſixième décimale, la formule ne ſera paſſablement exacte que pour des angles de 1 & de 2 degrés.

On voit par là, qu'on ne gagne pas beaucoup à ſe ſervir dans les calculs de dioptrique des formules qui vont jusqu'à trois dimenſions des arcs qui meſurent les angles, au lieu de celles où les arcs ſont ſuppoſés égaux aux ſinus. Ainſi quoique les calculs auſſi pénibles qu'ingénieux dont la dioptrique de M. Euler eſt remplie, faſſent, comme tous ſes autres ouvrages, honneur à ſon grand génie, j'oſe dire que l'avantage qui en réſulte n'eſt pas aſſez conſidérable, pour compenſer le travail qu'exige l'emploi des formules qu'il a données.

SECONDE PARTIE.

Application aux prismes achromatiques.

On entend par prismes achromatiques des prismes triangulaires tellement combinés qu'un objet vu par tous ces prismes à la fois n'offre aucune bordure colorée. Pour cet effet il faut que les rayons hétérogènes contenus dans un même faiſceau de lumière, étant tombés ſur le premier prisme parallèles entre eux, ſe briſent & ſe rebriſent tellement qu'ils ſortent de nouveau parallèles du dernier prisme, pour être reçus par l'oeil. Car l'oeil de l'homme, qui eſt la plus excellente lunette achromatique, eſt conſtruit de façon que des rayons hétérogènes partis d'un même point d'un objet, ſe réuniſſent de nouveau en un même point de la rétine, nonobſtant leur diverſe réfrangibilité, pourvu qu'ils ſoient arrivés à l'oeil parallèles entre eux. Il n'eſt pas même néceſſaire qu'ils

qu'ils entrent par la même partie de la pupille: p. e. les rayons rouges peuvent entrer par le bas de la pupille, les violets par le haut, & les autres par le milieu: dès qu'ils arrivent parallèles ils vont ſe réunir en un foyer commun, & former une image blanche ou de la couleur naturelle de l'objet. Je conçois cependant que ſi la diſtance entre les rayons les plus & les moins réfrangibles qui arrivent d'un point blanc, ſéparés, mais parallèles, étoit plus grande que l'ouverture de la pupille, les rayons de toutes les eſpèces ne pouvant entrer à la fois, il en manqueroit d'une ou de pluſieurs ſortes dans l'image, qui ne ſeroit plus blanche, mais de quelque autre couleur. Comme cependant ce cas ne ſe rencontre guères dans la dioptrique, nous ne nous y arrêterons pas.

C'eſt une loi de la dioptrique que des rayons qui traverſent un milieu uniforme, borné par des ſurfaces parallèles, & entouré de part & d'autre d'un même milieu, ſortent toujours dans une direction parallèle à celle ſelon laquelle ils ſont entrés, quelle que ſoit leur réfrangibilité, & quel que ſoit l'angle d'incidence. Ainſi p. e. un carreau de fenêtre eſt achromatique: car quoique les rayons hétérogènes d'un même faiſceau ſe ſéparent un peu en traverſant obliquement le verre, ils en ſortent néanmoins parallèles à la première direction du faiſceau, & par conſéquent parallèles entre eux. Ce parallélisme peut être démontré de plus d'une manière. Nous l'avons prouvé plus haut, en ſuppoſant un prisme dont l'angle réfringent ſoit $= o$.

Quand même les deux ſurfaces du carreau de verre ne ſont pas exactement parallèles, mais forment un très-petit angle, il n'y a pas encore de couleurs à remarquer. D'où l'on voit que le parallélisme parfait des rayons hétérogènes qui parviennent à l'oeil, n'eſt pas même néceſſaire pour éviter les bordures colorées: un parallélisme approchant ſuffit.

Si on applique deux ou pluſieurs prismes d'une même manière, Fig. VII.
tels que ABC & BCD, l'un contre l'autre, & s'il ſe trouve que les ſurfaces extérieures, comme AB & CD, ſoient parallèles ou à-peu-près, ce prisme compoſé ſera toujours achromatique. C'eſt encore le

cas des ſurfaces parallèles, puisque toute la matière entre *AB* & *CD* eſt homogène.

Mais dès que le milieu réfringent eſt borné par des ſurfaces qui s'écartent un peu conſidérablement du parallélisme, les rayons hétérogènes arrivés d'abord en un même faiſceau, & parallèles ou à-peu-près, ne ſortent plus ſenſiblement parallèles entre eux, & l'on voit des bordures colorées. C'eſt donc ce qui doit toujours arriver avec un ſeul prisme, dès que les ſurfaces extrêmes s'écartent ſenſiblement du parallélisme. On a vu dans la première partie quel eſt le chemin que prennent les rayons émergens au ſortir d'un tel prisme.

Cependant ſi l'on combine deux ou pluſieurs prismes de matières qui diffèrent relativement à la réfrangibilité & à la diſperſion des rayons de lumière qui y paſſent, il eſt poſſible d'éviter les couleurs prismatiques, lors même que les ſurfaces extérieures ne ſont ni tout-à-fait ni ſenſiblement parallèles.

Afin de voir comment & quand cela peut arriver, il faut conſidérer d'abord l'angle d'émergence d'un rayon de lumière qui a traverſé deux prismes combinés qui ſe touchent par leurs faces. Pour plus de ſimplicité nous imaginerons les angles aſſez petits pour qu'on puiſſe les ſuppoſer proportionnés à leurs ſinus.

Fig. VIII. Soient deux prismes *HIK*, *IKL* joints par leurs faces *IK*. Soit la raiſon de réfraction m pour le premier prisme & m' pour le ſecond. Que les lettres α, β, γ, π ayent ici la même ſignification que plus haut, & les lettres β', γ', π', une ſignification correſpondante pour le ſecond prisme. Soit δ l'angle que le rayon émergent feroit avec la perpendiculaire, ſi le ſecond prisme n'exiſtoit pas, & δ' l'angle que le rayon ſortant du ſecond prisme fait en effet avec la perpendiculaire.

Les Opticiens prouvent qu'étant données deux ſortes de verre (ou de matière transparente), la raiſon de la réfraction, en allant de la première ſorte à la ſeconde, eſt compoſée de la raiſon de la réfraction en allant du premier verre dans l'air, & de la raiſon de la réfraction en

allant de l'air dans le ſecond verre. Ainſi les rayons de lumière paſſant du verre HKI dans le verre KIL, la raiſon de l'incidence à la réfraction ſera compoſée des raiſons $1 : m$ & $m' : 1$. Cette raiſon ſera donc celle de $m' : m$ ou de $\frac{m'}{m} : 1$. Ainſi l'angle d'incidence γ eſt à l'angle de réfraction β' comme $\frac{m'}{m} : 1$, en un mot

$$\gamma : \beta' :: \frac{m'}{m} : 1$$

$$\text{d'où } \beta' = \frac{m}{m'}\gamma$$

Cela poſé, nous avons $\beta = \frac{1}{m}\alpha$, $\gamma = \pi - \beta = \pi - \frac{1}{m}\alpha$, $\beta' = \frac{m}{m'}\gamma = \frac{m}{m'}\pi - \frac{1}{m'}\alpha$, $\gamma' = \pi' - \beta' = \pi' - \frac{m}{m'}\pi + \frac{1}{m'}\alpha$, $\delta' = m'\gamma' = m'\pi' - m\pi + \alpha$.

Cette dernière formule exprime donc l'angle d'émergence au ſortir de deux prismes contigus & différemment réfringens.

Imaginez maintenant infiniment près de AB un autre rayon plus réfrangible, & tel que pour lui m ſe change en M, m' en M', δ' en Δ', on aura pareillement pour ſon angle d'émergence

$$\Delta' = M'\pi' - M\pi + \alpha$$

Si les deux rayons émergens doivent être parallèles, il faudra que $\Delta' = \delta'$ ou que

$$M'\pi' - M\pi + \alpha = m'\pi' - m\pi + \alpha$$

$$\text{ou } M'\pi' - M\pi = m'\pi' - m\pi$$

$$\text{ou } (M' - m')\pi' = (M - m)\pi$$

$$\text{ou que } \pi : \pi' :: (M' - m') : (M - m)$$

c'eſt-à-dire il faudra que les angles réfringens des prismes ſoient en raiſon inverſe des différences des nombres qui expriment la diſperſion pour chaque ſorte de verre.

On voit que l'angle d'incidence n'entre point dans la dernière formule, ainſi pourvu que cette proportion ſoit obſervée, le prisme com-

posé sera achromatique, pour tous les rayons ou faisceaux de lumière qui tomberont sur la face HK, en faisant avec cette face ou avec une perpendiculaire tirée sur elle, un angle quelconque.

Le prisme sera encore achromatique, si on le retourne, & qu'on expose la face IL à la lumière qui vient des objets. Car alors, il n'y a qu'à substituer m à m', M à M', π à π', & au rebours, puisque les lettres m', M', π' sont toujours pour le verre tourné vers les objets. Dans ce cas on aura pour le cas de l'achromatisme, $\pi' : \pi :: (M - m) : (M' - m')$ comme dans l'autre situation du prisme.

On voit en même temps que l'achromatisme exige que le verre qui réfracte le plus ait l'angle réfringent le plus petit.

Combinons maintenant trois prismes, en les appliquant l'un contre l'autre, de manière que l'angle réfringent de celui du milieu soit tourné en sens contraire de ceux des deux autres. Le cas le plus ordinaire, & que nous examinerons, est celui où l'on n'emploie que deux sortes de verre, une sorte pour le prisme du milieu & une autre sorte pour les deux extérieurs. Les angles sont toujours supposés très-petits.

Fig. IX. Dans la figure, les lettres déjà employées ont la même signification que précédemment, & les nouvelles des significations correspondantes pour le troisième prisme ILM. Nous avions trouvé $\gamma' = \pi' - \frac{m}{m'}\pi + \frac{1}{m'}\alpha$. Maintenant puisque le troisième prisme est de la même matière que le premier, & puisqu'au passage du premier au second on avoit $\beta' = \frac{m}{m'}\gamma$, on a au contraire au passage du second au troisième $\beta'' = \frac{m'}{m}\gamma' = \frac{m'}{m}\pi' - \pi + \frac{1}{m}\alpha$. Ensuite $\gamma'' = \pi'' - \beta'' = \pi'' - \frac{m'}{m}\pi' + \pi - \frac{1}{m}\alpha$, & enfin $\delta'' = m\gamma'' = m\pi'' - m'\pi' + m\pi - \alpha$.

Suppoſez infiniment près de AB, un autre rayon plus réfrangible, tellement que pour lui m devienne M, que m' devienne M', & que δ'' devienne Δ'', on aura pareillement

$$\Delta'' = M\pi'' - M'\pi' + M\pi - \alpha$$

Si les rayons émergens doivent devenir parallèles, il faut que $\Delta'' = \delta''$, c'eſt-à-dire que

$$M\pi'' - M'\pi' + M\pi - \alpha = m\pi'' - m'\pi' + m\pi - \alpha$$

ou $M\pi'' - M'\pi' + M\pi = m\pi'' - m'\pi' + m\pi$

ou $M(\pi'' + \pi) - M'\pi' = m(\pi'' - \pi) - m'\pi'$

$(M - m) . (\pi'' + \pi) = (M' - m')\pi'$

ou $(M - m) : (M' - m') :: \pi' : (\pi'' + \pi)$

C'eſt-à-dire: comme la diſperſion du premier & du troiſième verre eſt à la diſperſion du ſecond, ainſi l'angle du ſecond eſt à la ſomme des angles des deux autres.

On voit encore ici que l'achromatisme eſt indépendant de l'angle d'incidence. Il eſt auſſi indépendant de la ſituation de l'objet qui peut être devant la face ML auſſi bien que devant HK. Car en mettant l'objet devant ML, le premier prisme devient le troiſième & *vice verſa*, de façon que $\pi'' + \pi$ devient $\pi + \pi''$, ce qui revient au méme; $M - m$ vaut également pour les deux prismes extrêmes, $(M' - m')$ & π' gardent leur valeur pour le prisme du milieu.

Mais ce qui n'eſt pas indifférent, c'eſt de mettre au milieu la ſorte de verre la plus ou la moins diſperſante. Car comme on a

$$\frac{\pi'' + \pi}{\pi'} = \frac{M' - m'}{M - m}$$

& que $M' - m'$ vaut toujours pour le prisme du milieu, il eſt clair que ſi le prisme du milieu diſperſe davantage, il faudra faire $\pi'' + \pi$ plus grand que π' : c'eſt le contraire ſi les prismes extrêmes diſperſent davantage.

C'eſt toujours l'angle ou la ſomme des angles du verre le plus diſperſant, qui doit être la plus petite.

Comme on n'eſt guères dans le cas de combiner plus de trois prismes, nous n'irons pas plus loin. Quelques exemples montreront l'application des principes. Pour fixer nos idées, au lieu de deux ſortes quelconques de verre, prenons le *Crownglaſs* & le *Flintglaſs*, de manière que r & v indiquent les réfractions du *Crownglaſs*, & R & V celles du *Flintglaſs*. M. de Beguelin ſuppoſe que la diſperſion du *Crownglaſs* eſt à celle du *Flintglaſs* comme 10 à 16, ainſi $\frac{R-V}{r-v} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$. Par conſéquent pour un prisme compoſé de deux, $\frac{\pi'}{\pi} = \frac{8}{5}$, ou l'angle réfringent du *Crownglaſs* doit être à celui du *Flintglaſs* comme 8 eſt à 5. On pourroit donc combiner les angles de la manière ſuivante, en n'admettant pas des angles au deſſus de 6 degrés,

Crownglaſs.	*Flintglaſs.*
6 degrés	$3^d\ 45'\ 0''$
5 degrés	$3^d\ 7'\ 30''$
4 degrés	$2^d\ 30'\ 0''$
3 degrés	$1^d\ 52'\ 30''$
2 degrés	$1^d\ 15'\ 0''$
1 degré	$0^d\ 37'\ 30''$.

Comme le calcul a été fait pour de petits angles, il faut toujours ſuppoſer l'angle d'incidence petit, & de même l'angle réfringent. Cependant comme l'achromatisme n'exige pas un parallélisme parfait des rayons émergens, il pourra ſe faire que le prisme ſoit encore achromatique avec un angle réfringent & un angle d'incidence médiocrement grand. C'eſt à l'expérience de montrer jusqu'où cela peut aller.

Nous avons ſuppoſé le *Crownglaſs* tourné vers l'objet; mais il faudra exactement les mêmes proportions ſi c'eſt le *Flintglaſs* qui eſt tourné vers l'objet. Car alors on aura

$$\frac{5}{8} = \frac{\text{angle du } \textit{Flintglaſs}}{\text{angle du } \textit{Crownglaſs}}$$

ce qui revient à

$$\frac{8}{5} = \frac{\text{angle du } \textit{Crownglaſs}}{\text{angle du } \textit{Flintglaſs}},$$

comme ci-deſſus.

Pour trois prismes nous avons

$$\frac{8}{5} = \frac{\pi'' + \pi}{\pi'}.$$

Ici l'on peut faire une multitude de combinaiſons. P. e.

Premier *Crowngl.*	*Flintgl.*	2e *Crowngl.*
2	5	6
3	5	5
4	5	4
5	5	3
6	5	2

On peut auſſi prendre les moitiés, les tiers, &c. des trois angles. P. e. les moitiés:

Premier *Crowngl.*	*Flintgl.*	2e *Crowngl.*
1 degr.	$2\frac{1}{2}$	3
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
2	$2\frac{1}{2}$	2
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
3	$2\frac{1}{2}$	1

Si au contraire on ſuppoſe les deux prismes extérieurs de *Flintglaſs*, & celui du milieu de *Crownglaſs*, les lettres auront une ſignification oppoſée, & on aura

$$\frac{5}{8} = \frac{\pi'' + \pi}{\pi'}$$

π'' & π déſignant les angles du *Flintglaſs*, & π' celui du *Crownglaſs* qui ſera au milieu. On pourra donc faire les combinaiſons ſuivantes:

Premier *Flintgl.*	*Crowngl.*	2e *Flintgl.*
$\frac{1}{2}$ degr.	4	2
1	4	$1\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{2}$	4	1
2	4	$\frac{1}{2}$

On voit que le *Flintglaſs* étant au milieu, on peut faire les trois angles réfringens presque égaux; au lieu que ſi le *Crownglaſs* eſt au milieu, il faut que ſon angle réfringent ſoit beaucoup plus grand que la ſomme des deux autres.

On peut faire des prismes achromatiques par eſſai, en faiſant d'abord à volonté un prisme de *Flintglaſs*, d'un très-petit angle réfringent. On fera enſuite un ou deux prismes de *Crownglaſs*, de façon que l'angle réfringent ou la ſomme des angles réfringens ſoit plus grande que n'exige le rapport de diſperſion qu'on peut ſuppoſer entre les deux verres. On diminuera enſuite cet angle ou ces angles jusqu'à ce qu'on trouve qu'appliquant le prisme ou les prismes de *Crownglaſs* contre celui de *Flintglaſs*, on n'aperçoive plus de bordures colorées, en regardant les objets par ce prisme compoſé. Il paroit que c'eſt ainſi que M. Dollond père, faiſoit les prismes achromatiques, d'après leſquels il conſtruiſit les premiers objectifs achromatiques. Dans la ſuite les dimenſions étant trouvées, il n'étoit pas néceſſaire de faire de nouveaux eſſais.

Ayant fait un prisme compoſé achromatique par eſſai, on peut, en meſurant les angles réfringens, en déduire le rapport de la diſperſion; mais il faut que les angles ſoient les plus petits poſſibles. Car puisque dans ce cas on a toujours pour deux prismes

$$\frac{M' - m'}{M - m} = \frac{\pi'}{\pi}$$

& pour trois

$$\frac{M' - m'}{M - m} = \frac{\pi'' + \pi}{\pi'}$$

connoiſſant π & π' ou π, π' & π'', on aura le rapport $\frac{M' - m'}{M - m}$.

Jusqu'ici j'ai ſuppoſé des prismes qui ſe touchent par leurs côtés. Mais les proportions qui viennent d'être trouvées n'ont pas moins lieu s'ils ſont ſéparés, pourvu que les faces, au lieu de ſe toucher, ſoient parallèles.

Fig. X. Nous avons vu plus haut qu'un rayon ſortant du prisme HIK, pour lequel la raiſon de réfraction eſt m, & entrant dans le prisme

prisme KIL, pour lequel la même raiſon eſt m', & les deux prismes étant contigus, on a $\beta' = \frac{m}{m'}\gamma$. Maintenant ſuppoſez le ſecond prisme poſé en $K'I'L$, de manière que $I'K'$ ſoit parallèle avec IK. Le rayon paſſant du premier prisme dans l'air, formera l'angle de réfraction $\delta = m\gamma$. Il tombera ſur le ſecond prisme en faiſant un angle d'incidence $\varepsilon = \delta = m\gamma$, ces deux angles δ & ε étant alternes. Enſuite $\beta' = \frac{1}{m}\varepsilon = \frac{1}{m}\delta = \frac{m}{m'}\gamma$, tout comme dans le cas où les prismes ſe touchent. Il en eſt de même de trois prismes combinés.

Il y a plus, & l'expérience fait voir, qu'un prisme compoſé étant achromatique dans le cas où les faces ſont contiguës ou parallèles, on peut varier aſſez conſidérablement la poſition des mêmes faces, & au lieu de les poſer parallèlement, les diſpoſer de façon qu'elles forment divers angles: le prisme demeure toujours ſenſiblement achromatique. D'où l'on voit, comme il a déjà été remarqué, que la nature n'exige pas une très-grande préciſion dans le parallélisme des rayons de lumière hétérogène qui parviennent à l'oeil, pour qu'ils forment ſur la rétine une image ſans fauſſes couleurs: ce qui eſt un grand avantage pour l'optique pratique, dans laquelle une préciſion rigoureuſe eſt ſouvent très-difficile ou même impoſſible à obtenir.

TROISIÈME PARTIE.

Des objectifs achromatiques.

Dès que l'on a un prisme achromatique, on peut faire auſſi un objectif achromatique.

Soit le triangle ACB la coupe d'un prisme quelconque, perpendiculairement à l'axe. Soit C l'angle réfringent. Ajoutez-y un triangle pareil ADB. Prolongez AB. Érigez DH perpendiculairement ſur AD, & DG perpendiculairement ſur BD; prolongez ces perpendiculaires jusqu'à ce qu'elles rencontrent en H & en G, le prolonge- Fig. XI.

ment de AB. Prenant H pour centre, & HD pour rayon, décrivez l'arc DEC. Prenant G pour centre, & GD pour rayon, décrivez l'arc DFC. Soit faite une lentille dont $DECFD$ eſt la coupe. Tirez DC. Elle coupera perpendiculairement l'axe AB de la lentille, & partagera l'angle réfringent ACB ou ADB du prisme en deux angles égaux ou inégaux, k & l.

Les deux triangles AIC & AHC ont chacun un angle droit, & en A ils ont un angle commun; donc $\wedge k = \wedge m =$ (en degrés) à l'arc $CE =$ (en degrés) à la moitié de l'arc CED. De même $\wedge l = \wedge n =$ (en degrés) $CF =$ (en degrés) $\frac{1}{2} CFD$.

Maintenant ſi la lumière tombe vers les points D & E, elle ſubira la même réfraction & la même diſperſion, étant reçue ſoit par le prisme, ſoit par la lentille, parce qu'à ces endroits le prisme & la lentille ſe confondent. Suppoſons des rayons qui arrivent parallèlement à l'axe GH de la lentille: ils ſubiront, comme il vient d'être dit, au paſſage de la lentille les mêmes changemens qu'au paſſage du prisme. Des rayons plus proches de l'axe ſubiront, s'ils tombent ſur la lentille, moins de réfraction & de diſperſion que s'ils tomboient ſur le prisme: car vers l'axe les faces de la lentille s'approchent de plus en plus du parallélisme entr'elles & de la perpendicularité ſur l'axe.

Étant donc donné un prisme quelconque, il eſt toujours facile de faire une lentille qui même à ſon bord ne réfracte & ne diſperſe pas plus la lumière que ce prisme. Puisque l'angle k eſt en degrés la moitié de l'arc CED, & $\wedge l$ la moitié de l'arc CFD, donc $(k + l)$ eſt en degrés la moitié de la ſomme des arcs CEF & CFD. Il n'y aura donc qu'à faire en ſorte que la ſomme des degrés des deux arcs de courbure de la lentille ſoit le double des degrés de l'angle réfringent du prisme.

On remarquera qu'il n'y a que les degrés des arcs de courbure dont il faille tenir compte; les longueurs de ces arcs & leurs rayons ſont indifférens, & ne répondent qu'au plus ou moins de longueur des faces CA & CB du prisme.

Quoique nous n'ayons pris que l'exemple d'une lentille convexe, ce qui en a été dit peut cependant auſſi s'appliquer aux lentilles concaves: dans celles-ci, il faut faire paſſer l'axe de la lentille par l'extrémité du tranchant du prisme.

Soit ACB un prisme, GH un axe tiré à volonté par le ſommet C de l'angle réfringent, DCI un prisme tout pareil au premier & poſé de même par rapport à l'axe GH, de manière que les angles HCB & HCI, de même GCA & GCD, ſoient égaux. Les droites IH & BH perpendiculaires ſur IC & BC ſe rencontreront quelque part dans l'axe en H, de même DG & AG perpendiculaires ſur DC & AC ſe rencontreront quelque part dans l'axe en G. Des points H & G pris pour centres, avec les rayons HI & GD, décrivez les arcs de cercles IFB & DEA, vous aurez la coupe d'une lentille concave $DIFBAED$, qui vers les extrémités DI & AB fera le même effet que le prisme ABC. Par C tirant OP perpendiculairement à l'axe GH, l'angle réfringent du prisme ſera diviſé en deux angles égaux ou inégaux k & l. On aura $\wedge k = \wedge m$ & $\wedge l = \wedge n$. Car $\wedge GCA + \wedge k = 90^d$ & dans le triangle rectangle GAC, $\wedge GCA + \wedge m = 90^d$, donc $k = m$. On prouve de même que $l = n$. Ainſi $k = m =$ (en degrés) $AE =$ (en degrés) $\frac{1}{2} DA$. De même $l = n =$ (en degrés) $BF = \frac{1}{2} BI$. Donc $k + l$ ou $\wedge ACB =$ (en degrés) $\frac{1}{2} (AED + BIF)$ ou $AED + BIF =$ (en degrés) $2 \wedge ACB$. Fig. XII.

Soit maintenant un prisme achromatique compoſé du prisme de *Crownglaſs* ABC & du prisme de *Flintglaſs* BCD, poſés l'un contre l'autre. Tirez les arcs FGB, FCB, EID, comme il a été dit, de manière qu'ils touchent les faces des prismes, ou bien déterminez ſeulement ces arcs de façon que $FGB + FHB =$ (en degrés) $\wedge \pi$, & que $FHB + EID =$ (en degrés) $\wedge \pi'$. Vous aurez une lentille de *Crownglaſs* $FGBHF$, & une de *Flintglaſs* $FHBDICEF$, leſquelles étant appliquées l'une contre l'autre comme dans la figure, feront un objectif achromatique: car c'eſt aux bords que les couleurs Fig. XIII.

ſont le plus à craindre. Or il a été prouvé que les rayons de lumière qui paſſeront aux bords de ces lentilles combinées ne ſouffriront pas plus de diſperſion que ſi elles paſſoient par les deux prismes combinés, & que vers le milieu de la lentille elles en ſouffriront moins.

De plus, comme les prismes dont la réunion fait un prisme achromatique, peuvent être ſéparés (voyez page 25) pourvu que les faces qui ſe touchoient demeurent parallèles, on pourra ſéparer un peu les deux lentilles, ſi on le juge convenable, les faces auparavant contiguës reſteront ſenſiblement parallèles.

Comme on peut non ſeulement ſéparer, mais auſſi incliner conſidérablement les prismes, ſans que l'achromatisme en ſouffre, on pourra auſſi non ſeulement ſéparer les lentilles, mais auſſi les faire de manière que les faces voiſines ne ſoient pas égales en degrés.

Fig. XIV. Suppoſez p. e. que le prisme de *Crownglaſs* ABC, & celui de *Flintglaſs* DEF ſoient achromatiques lorsque ED eſt appliquée ſur CB, ils le ſeront encore lorsque EB eſt ſéparée de CB, n'importe que ces deux faces ſoient parallèles ou qu'elles s'écartent de quelques degrés du parallélisme. Tirez PQ pour être l'axe des lentilles. Tirez BG & OR perpendiculairement à cet axe, il ſuffira pour l'achromatisme qu'en degrés on ait

$$BHG = 2\alpha$$
$$BIG = 2\beta$$
$$DMK = 2\gamma$$
$$FNL = 2\delta$$

ou, en nommant π l'angle ABC, & π' l'angle DEF, il ſuffira que

$$BHG + BIG = \pi$$
$$DMK + FNL = \pi'$$

ou que

$$(BHG + BIG) : (DMH + FNL) :: \pi, \pi'$$

ſi les angles ſont petits, on a vu que dans le cas de l'achromatisme

$$\pi : \pi' :: (M' - m') : (M - m)$$

Un lentille compoſée d'une convexe & d'une concave ſera donc achromatique ſi, nommant les arcs ſucceſſifs des courbures c, c', c'', c''' &c., on a

$$(c + c') : (c'' + c''') : : (M' - m') : (M - m)$$

en entendant par c'' & c''' les degrés des arcs de courbures pour le prisme concave de *Flintglaſs*.

Il en eſt de même des prismes compoſés de 3, & des objectifs correſpondans. L'achromatisme du prisme exige que

$$(\pi + \pi'') : \pi' : : (M' - m') : (M - m)$$

Nommant de nouveau c, c', c'' &c. les courbures ſucceſſives des faces des lentilles, on aura

$$(c + c' + c^{IV} + c^{V}) : (c''' + c^{IV}) : : (M' - m') : (M - m)$$

Ici c''', c^{IV}, M' & m' ſe rapportent au *Flintglaſs* qui eſt au milieu.

En général, ſoit que l'objectif ſoit compoſé de deux ou de trois verres, ſi on ſuppoſe que ceux de *Flintglaſs* ſont concaves & ceux de *Crownglaſs* convexes, on aura cette règle, en ſuppoſant toujours les angles & les arcs petits: *la ſomme des arcs convexes doit être à la ſomme des arcs concaves, comme la diſperſion du Flintglaſs eſt à la diſperſion du Crownglaſs.*

D'après cela il ſera facile d'arranger des objectifs de deux ou trois verres qui ſoient achromatiques. En gardant les nombres 8 & 5 pour la proportion des diſperſions, on pourra, pour deux verres, arranger ainſi un objectif achromatique:

	Crownglaſs.		*Flintglaſs.*	
	1e face	2e face	1e face	2e face
degrés	5	3	3	2
	4	4	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
	$4\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
	&c.		&c.	

Si on diminue les nombres correſpondans dans une même ligne ſelon une même proportion, on aura encore des objectifs achromatiques à

deux verres. A trois verres, on pourra partager 8 & 5 de la manière ſuivante:

	1er *Crownglaſs.*		*Flintglaſs.*		2e *Crownglaſs.*	
	1e face	2e face	1e face	2e face	1e face	2e face
degrés	2	2	2	2	2	3
	1	2	3	4	2	1
	$2\frac{1}{6}$	$2\frac{1}{6}$	$2\frac{1}{6}$	$2\frac{1}{6}$	$2\frac{1}{6}$	$2\frac{1}{6}$
	&c.			&c.		

On voit par là que l'emploi de trois verres permet plus d'égalité dans les courbures que celui de deux.

Nous avons trouvé, dans le cas de deux prismes pour l'angle d'émergence,

$$\delta = m'\pi' - m\pi + \alpha$$

Fig. XV. α étant l'angle d'incidence. Cet angle d'incidence peut être auſſi celui que forme un rayon AB parallèle à l'axe CD des lentilles correſpondantes, & alors il eſt égal à l'angle i qui fait partie de l'angle π. Soit maintenant E le point d'émergence, EF perpendiculaire à la dernière face du dernier prisme, EG parallèle à CD, EH le rayon émergent, faiſant avec la perpendiculaire EF l'angle $HGF = \delta$. Soit auſſi d l'angle que la parallèle à l'axe CD fait avec cette perpendiculaire EF, alors $\wedge \Phi = \wedge \pi HE = \wedge HEG = \delta - d$, & $\delta = \Phi + d$, donc

$$\Phi + d = m'\pi' - m\pi + i$$
$$\Phi = m'\pi' - m\pi + i - d$$

or

$$i = \pi - g$$
$$g = p - d$$
$$i = \pi - p + d$$
$$i - d = \pi - p$$

donc

$$\Phi = Rp - r\pi + \pi - p$$
$$\Phi = (R - 1)\,p - (r - 1)\,\pi$$

Si au lieu des deux prismes on a deux lentilles, & ſi les demi-courbures des faces ſont c, c', c'', c''', on a

$$\Phi = (R - 1)(c + c') - (r - 1)(c'' + c''')$$

proprement il faut que $c' = c''$; mais nous avons déjà vu qu'on peut s'écarter un peu de la rigueur géométrique.

Reprenons l'équation

$$\Phi = (R - 1)\, p - (r - 1)\, \pi.$$

Si $\Phi = o$, alors le rayon ſort parallèle à l'axe, & l'on a

$$o = (R - 1)\, p - (r - 1)\, \pi$$

$$\text{ou } (R - 1)\, p = (r - 1)\, \pi$$

$$\text{ou } \frac{R - 1}{r - 1} = \frac{\pi}{p}$$

Or nous avons trouvé plus haut pour un prisme achromatique de deux verres

$$\frac{V - R}{v - r} = \frac{\pi}{p}$$

Si donc $\frac{V - R}{v - r} = \frac{R - 1}{r - 1}$, le prisme ſera en même temps achromatique, & auſſi tel que les rayons qui y entrent parallèlement à l'axe en ſortiront parallèlement à l'axe.

$R - 1$ & $r - 1$ étant les différences entre les angles (ou proprement les ſinus) d'incidence & de réfraction, on a nommé ces quantités les pouvoirs réfractifs. Donc ſi les diſperſions de deux ſortes de verres ſont comme leurs pouvoirs réfractifs (comme Newton l'avoit ſuppoſé) il eſt impoſſible de faire des objectifs achromatiques, puiſqu'en détruiſant la diſperſion on détruit en même temps l'effet de la réfraction, qui cependant eſt néceſſaire pour raſſembler les rayons en un même foyer.

Paſſons aux prismes compoſés de trois, le *Flintglaſs* au milieu. Nous avons trouvé, en ſuppoſant l'angle d'incidence du rayon parallèle à l'axe $= i$

$$\varrho = r\Pi - Rp + r\pi - i$$

En nommant de nouveau Φ l'angle à l'axe, & d l'angle que le rayon émergent fait avec la parallèle à l'axe, $\Phi = \varphi - d$ ou $\varphi = \Phi + d$ Donc

$$\Phi + d = r\,\Pi - Rp + r\pi - i$$
$$\text{ou } \Phi = r\Pi - Rp + r\pi - i - d$$

Nommant les moitiés des angles ſucceſſifs du prisme i, g; g, f; f, d, on a

$$i = \pi - g$$
$$g = p - f$$
$$f = \Pi - d$$

De là

$$i = \pi - p + f$$
$$\text{ou } i = \pi - p + \Pi - d$$
$$i + d = \pi - p + \Pi$$
$$-i - d = -\pi + p - \Pi$$

Donc

$$\Phi = r\Pi - Rp + r\pi - \pi + p - \Pi$$
$$\text{ou } \Phi = (r-1)\,\pi - (R-1)\,p + (r-1)\,\Pi$$

Subſtituant à la place de chaque angle du prisme les deux demi-courbures correſpondantes, c'eſt-à-dire mettant $\pi = c + c'$, $p = c'' + c'''$, $\Pi = c^{IV} + c^{V}$, on a

$$\Phi = (r-1)(c + c') - (R-1)(c'' + c''') + (r-1)(c^{IV} + c^{V})$$

Proprement il faut que $c' = c''$, & $c''' = c^{IV}$, mais il eſt permis de s'écarter un peu de l'exactitude géométrique.

Si le rayon émergent devient parallèle à l'axe, on a

$$0 = (r-1)\,\pi - (R-1)\,p + (r-1)\,\Pi$$
$$0 = (r-1)(\pi + \Pi) - (R-1)\,p$$
$$(R-1)\,p = (r-1)(\pi + \Pi)$$
$$\frac{R-1}{r-1} = \frac{\pi + \Pi}{p}$$

Mais

Mais l'achromatisme des prismes ſuppoſe

$$\frac{V-R}{v-r} = \frac{\pi+\Pi}{p}$$

Si donc $\frac{V-R}{v-r} = \frac{R-1}{r-1}$ c'eſt-à-dire ſi les diſperſions ſont comme les pouvoirs réfractifs, le prisme ne peut être achromatique à moins que les rayons émergens ne ſoient parallèles à l'axe comme les immergens, ce qui confirme la remarque faite au ſujet des prismes & des objectifs de deux ſortes de verres.

On ſe ſouviendra que les quantités c, c', c'', &c., déſignent des arcs d'un certain nombre de degrés.

Soit $CD = AD = f$ le rayon avec lequel a été décrit l'arc $AC = c$. Soit $ED = GD$ égal à l'unité, & GE un arc du même nombre de degrés que AC. Soit $AB = x$ le ſinus de AC ou la demi-ouverture de l'objectif, alors Fig. XVI.

$$AD : GD :: AB : GF$$
$$f : 1 :: x : GF$$
$$\text{donc } GF = \frac{x}{f}.$$

Mais les angles étant petits, on peut ſuppoſer le ſinus GF égal à l'arc GE, qui pour le rayon 1 détermine l'angle GDE ou ADC, & par conſéquent les degrés de AC ou de c. Ainſi nous pouvons mettre

$$GE = \frac{x}{f}$$

Ainſi en n'ayant égard qu'aux degrés de c, on a auſſi

$$AC = c = \frac{x}{f}$$

De même en ſuppoſant, comme il eſt permis, les ouvertures de toutes les lentilles d'un même objectif égales, & toutes $= x$, & les rayons ſucceſſifs des faces égales à f, f', f'', f''', alors puisque pour deux verres

$$\Phi = (R-1)(c+c') - (r-1)(c''+c''')$$

on aura

$$\Phi = (R - 1)\left(\frac{x}{f} + \frac{x}{f'}\right) - (r - 1)\left(\frac{x}{f''} + \frac{x}{f'''}\right)$$

ou

$$\frac{\Phi}{x} = (R - 1)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f'}\right) - (r - 1)\frac{1}{f''} + \frac{1}{f'''}\Big)$$

& pour trois verres, au lieu de

$$\Phi = (r - 1)(c + c') - (R - 1)(c'' + c''') + (r - 1)(c^{IV} + c^{V})$$

on aura

$$\Phi = (r - 1)\left(\frac{x}{f} + \frac{x}{f'}\right) - (R - 1)\left(\frac{x}{f''} + \frac{x}{f'''}\right) + (r - 1)\left(\frac{x}{f^{IV}} + \frac{x}{f^{V}}\right)$$

ou

$$\frac{\Phi}{x} = (r - 1)\left(\frac{1}{f} + \frac{1}{f'}\right) - (R - 1)\left(\frac{1}{f''} + \frac{1}{f'''}\right) + (r - 1)\left(\frac{1}{f^{IV}} + \frac{1}{f^{V}}\right)$$

On remarquera pour f comme pour c, qu'à la rigueur f' & f'', f''' & f^{IV} doivent être égaux. De plus, que Φ eſt exprimé en parties du rayon 1.

Fig. XVII. Enfin pour avoir la diſtance focale dans le triangle rectangle PQR on connoît l'ouverture x, & l'angle Φ peut ſe calculer par les formules précédentes. Nommant donc F cette diſtance QR, on a

$$PQ : QR :: \text{ſin } \Phi : \text{cof } \Phi$$
$$\text{ou } x : F :: \text{ſin } \Phi : \text{cof } \Phi$$
$$\text{d'où } F = \frac{x \cdot \text{cof } \Phi}{\text{ſin } \Phi}$$

Si l'angle Φ eſt aſſez petit pour qu'on puiſſe ſuppoſer ſon coſinus $= 1$, on a

$$F = \frac{x}{\text{ſin } \Phi}$$

Fig. I.

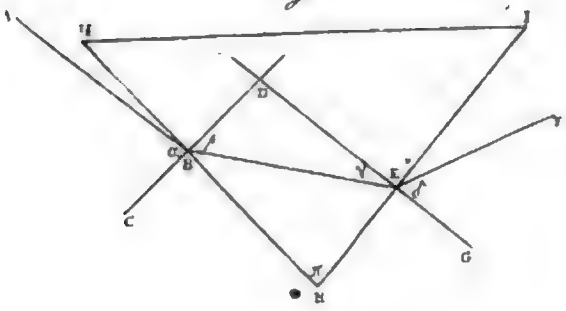


Fig. II.

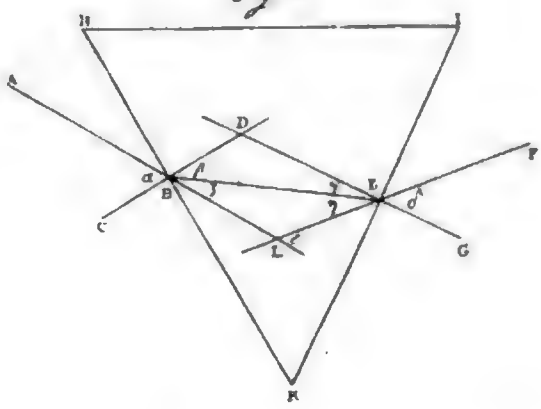


Fig. III.

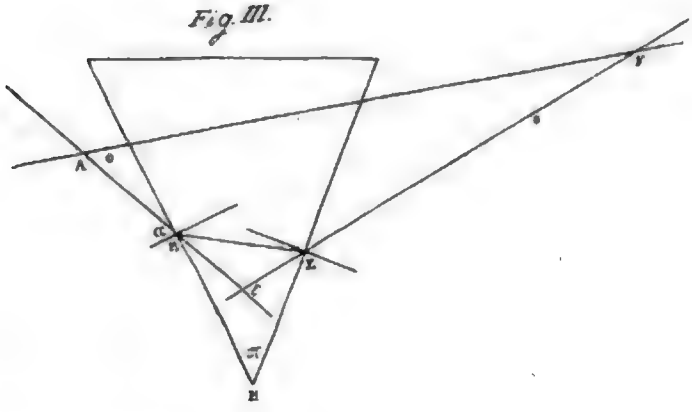


Fig. IV.

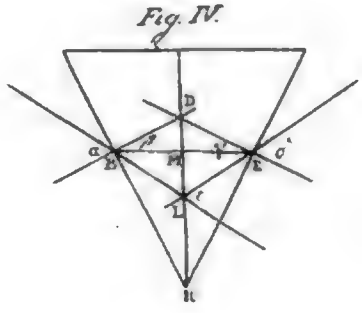


Fig. V.

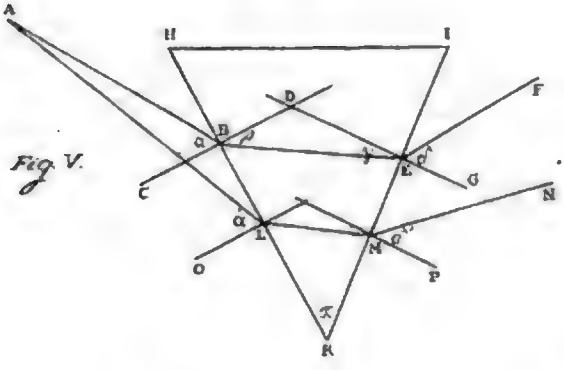


Fig. VI.

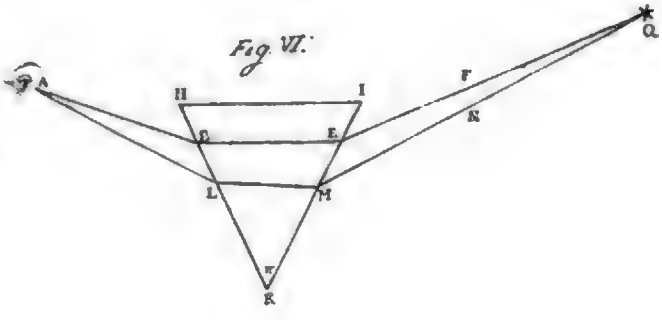


Fig. VII.

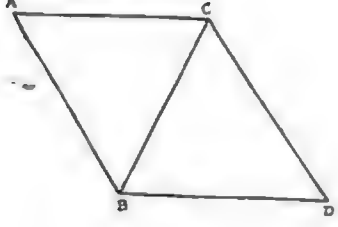


Fig. VIII.

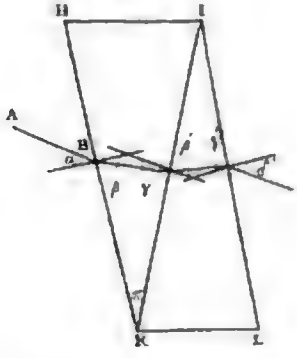
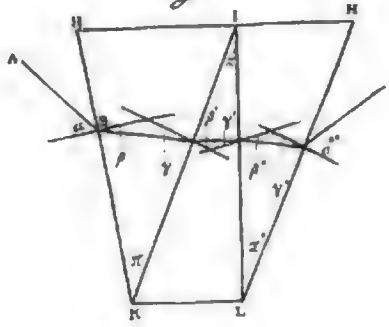


Fig. IX.



Digitized by Google

Fig X.

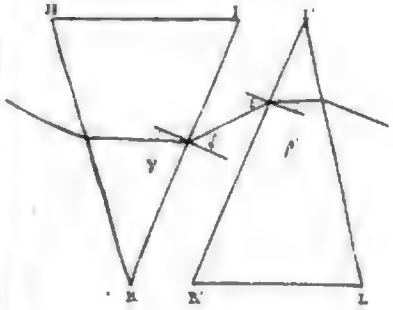


Fig XIII

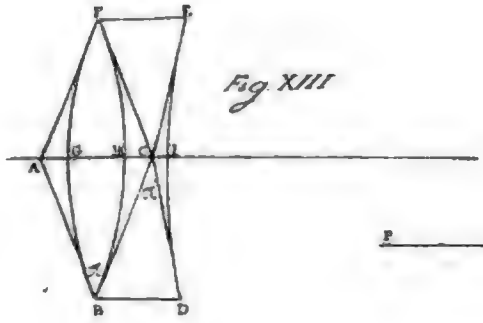


Fig XIV

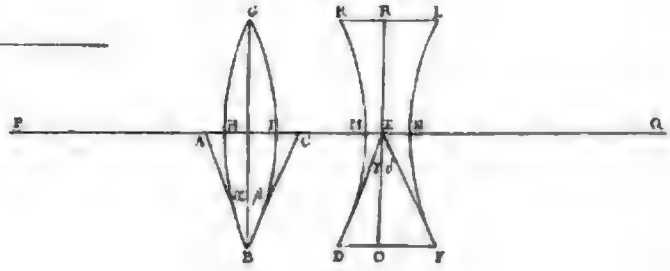


Fig XI

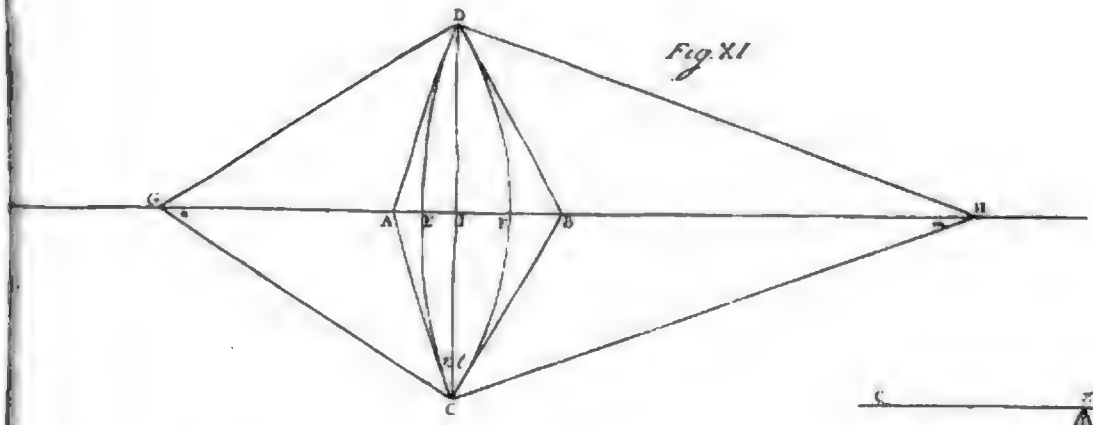


Fig XV

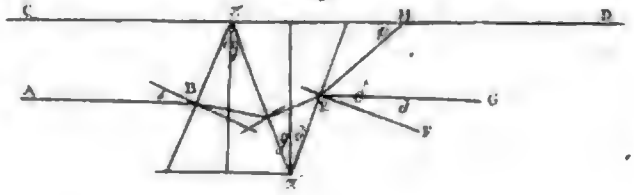


Fig XII.

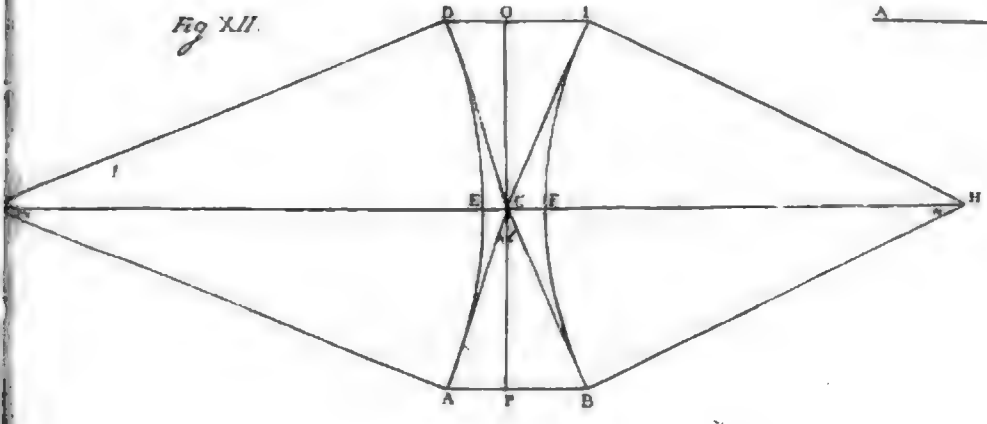


Fig XVII.

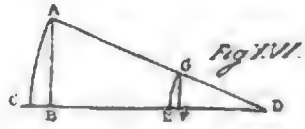
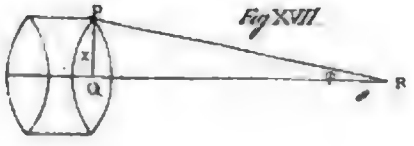


Fig XVIII.



Digitized by Google

La même choſe ſe trouve en diſant

$$QP : PR :: \text{ſin } \Phi : \text{rayon}$$

ou, ſuppoſant $RR = QR = F$, parce que la différence n'eſt pas grande,

$$x : F :: \text{ſin } \Phi : 1$$

d'où $F = \frac{x}{\text{ſin } \Phi}$

Suppoſant encore, vu la petiteſſe des angles, ſin $\Phi = \Phi$, on a

$$F = \frac{x}{\Phi}$$

$$\frac{1}{F} = \frac{\Phi}{x}$$

Ainſi pour deux verres

$$\frac{1}{F} = (R-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}\right) - (r-1)\left(\frac{1}{f''}+\frac{1}{f'''}\right)$$

ou

$$F = \frac{1}{(R-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}\right) - (r-1)\left(\frac{1}{f''}+\frac{1}{f'''}\right)}$$

Pour trois verres

$$\frac{1}{F} = (r-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}\right) - (R-1)\left(\frac{1}{f''}+\frac{1}{f'''}\right) - (r-1)\left(\frac{1}{f^{IV}}+\frac{1}{f^{V}}\right)$$

ou

$$F = \frac{1}{(r-1)\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{f'}\right) - (R-1)\left(\frac{1}{f''}+\frac{1}{f'''}\right) - (r-1)\left(\frac{1}{f^{IV}}+\frac{1}{f^{V}}\right)}.$$

OBSERVATIONS
ſur les ſéries qui expriment la valeur des ſinus & coſinus d'arcs multiples.

PAR M. JEAN TREMBLEY *).

On trouve dans les Mémoires de l'Académie de Pétersbourg pour l'année 1791 un Mémoire de M. Euler ſur cet objet. Ce grand géomètre y rapporte les deux ſuites connues qui expriment la valeur de ſin $n\Phi$ & cof $n\Phi$ en ſin Φ & cof Φ, & il remarque que ces ſuites ne donnent pas des valeurs légitimes pour toutes les valeurs poſſibles de n, mais ſeulement lorsque n eſt un nombre entier poſitif. Encore y a-t-il des précautions à prendre ſur le nombre des termes. Pour remédier à ces anomalies, M. Euler cherche d'autres expreſſions en ſuites, qu'il obtient par une méthode très-compliquée, en intégrant une équation différentielle du ſecond degré. Le même volume contient un Mémoire de M. Fuſs ſur cette matière, lequel eſt relatif au Mémoire précédent de M. Euler, & contient une méthode beaucoup plus ſimple pour parvenir aux dernières ſuites qu'a trouvées M. Euler. On y trouve encore d'autres recherches fort ingénieuſes dont je ne m'occuperai pas pour le préſent. La lecture de ces deux Mémoires a fait naître dans mon eſprit quelques idées que je vais ſoumettre au jugement des géomètres.

*) Lu à l'Académie le 26 avril 1798.

§. 1. Je commencerai par expoſer une manière aſſez ſimple de parvenir aux réſultats qu'ont obtenus MM. Euler & Fuſs. Pour cela je traite d'abord le problème ſuivant: Étant donnée l'équation $p = y + \sqrt{(yy-1)}$, réduire la formule p^n en une ſuite régulière qui procède ſuivant les puiſſances de y. On a en différentiant $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{\sqrt{(yy-1)}}$. Soit la ſuite cherchée $p^n = Ay^n + By^{n-1} + Cy^{n-2} + Dy^{n-3} + Ey^{n-4} + Fy^{n-5} + Gy^{n-6} + Hy^{n-7}$ &c. on aura $\frac{n\,dp}{p} = \frac{n\,dy}{\sqrt{(yy-1)}} =$

$$\frac{dy\,(nAy^{n-1} + (n-1)By^{n-2} + (n-2)Cy^{n-3} + (n-3)Dy^{n-4} + (n-4)Ey^{n-5} + (n-5)Fy^{n-6} + (n-6)Gy^{n-7}\ \&c.}{Ay^n + By^{n-1} + Cy^{n-2} + Dy^{n-3} + Ey^{n-4} + Fy^{n-5} + Gy^{n-6} + \&c.}$$

$= n\,dy\,(y^{-1} + \frac{1}{2}y^{-3} + \frac{3}{8}y^{-5} + \frac{5}{16}y^{-7}$ &c.). On tire de là l'équation ſuivante,

$$\begin{array}{llllll}
nAy^{n-1} & +(n-1)By^{n-2} & +(n-2)Cy^{n-3} & +(n-3)Dy^{n-4} & +(n-4)Ey^{n-5} & \\
-nA & -nB & -nC & -nD & -nE & \\
 & & -\frac{nA}{2} & -\frac{nB}{2} & -\frac{nC}{2} & \\
 & & & & -\frac{3nA}{8} & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
+(n-5)Fy^{n-6} & +(n-6)Gy^{n-7} & +(n-7)Hy^{n-8} \\
-nF & -nG & -nH \\
-\frac{nD}{2} & -\frac{nE}{2} & -\frac{nF}{2} \\
-\frac{3nB}{8} & -\frac{3nC}{8} & -\frac{3nD}{8} \\
 & -\frac{5nA}{16} & -\frac{5nB}{16}
\end{array}$$

&c. $= 0$.

Égalant ſucceſſivement à zéro le coëfficient de chaque terme, on trouve; que le premier terme laiſſe A indéterminé, que le ſecond donne $B = 0$, que le troiſième donne $C = -\frac{nA}{4}$, que le quatrième donne $D = 0$, que le cinquième donne $E = \frac{nA(n-3)}{32}$, que le ſixiè-

me donne $F = 0$, que le ſeptième donne $G = -\frac{An(n-4)(n-5)}{2.3.64}$, que le huitième donne $H = 0$ &c. L'analogie eſt maintenant évidente, & l'on a $p^n = A\left(y^n - n\,\frac{y^{n-2}}{2^2} + \frac{n(n-3)}{2}\,\frac{y^{n-4}}{2^4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}\,\frac{y^{n-6}}{2^6}\text{ &c.}\right) = \frac{A}{2^n}\left((2y)^n - \frac{n}{1}(2y)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}(2y)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}(2y)^{n-6}\text{ &c.}\right)$. C'eſt la formule que trouve M. Fuſs (Mém. de Pétersb. 1791 p. 211) d'une manière fort différente. Il ne s'agit plus que de déterminer la conſtante A. Pour cela on conſidérera que quel que ſoit n, le premier terme de p^n doit toujours être $(2y)^n$. Car $(y + \sqrt{(yy-1)})^n = y^n + \frac{n}{1}y^{n-1}\sqrt{(yy-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2}y^{n-2}(yy-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}y^{n-3}(yy-1)^{\frac{3}{2}}$ &c. = (en ne prenant que la plus haute dimenſion de y) $y^n\left(1 + \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\text{ &c.}\right) = 2^n y^n = (2y)^n$. Donc $\frac{A}{2^n} = 1$, $A = 2^n$, & l'on a comme M. Fuſs, $p^n = (2y)^n - \frac{n}{1}(2y)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}(2y)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2y)^{n-6}$ &c.

§. 2. Si l'on veut exécuter la même opération pour la formule $q = y - \sqrt{(yy-1)}$, on aura en différentiant $\frac{dq}{q} = -\frac{dy}{\sqrt{(yy-1)}}$. Je fais la ſuite cherchée $q^n = A^{(n)}y^n + A^{(n-1)}y^{n-1} + A^{(n-2)}y^{n-2} + A^{(n-3)}y^{n-3} \ldots\ldots\ldots + A^{(2)}y^2 + A^{(1)}y + A^{(0)} + A_{(1)}y^{-1} + A_{(2)}y^{-2} \ldots\ldots + A_{(n-1)}y^{-n+1} + A_{(n)}y^{-n} + A_{(n+1)}y^{-n-1} + A_{(n+2)}y^{-n-2} + A_{(n+3)}y^{-n-3} + A_{(n+4)}y^{-n-4} + A_{(n+5)}y^{-n-5} + A_{(n+6)}y^{-n-6}$

$+ A_{(n+7)} y^{-n-7}$ &c. On a en opérant précisément comme ci-dessus l'équation suivante,

$$
\begin{array}{llll}
n A^{(n)} y^{n-1} & + (n-1) A^{(n-1)} y^{n-2} & + (n-2) A^{(n-2)} y^{n-3} & + (n-3) A^{(n-3)} y^{n-4} \\
+ n A^{(n)} & + n A^{(n-1)} & + n A^{(n-2)} & + n A^{(n-3)} \\
 & & + \frac{n}{2} A^{(n)} & + \frac{n}{2} A^{(n-1)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
+ (n-4) A^{(n-4)} y^{n-5} & + (n-5) A^{(n-5)} y^{n-6} & + (n-6) A^{(n-6)} y^{n-7} \\
+ n A^{(n-4)} & + n A^{(n-5)} & + n A^{(n-6)} \\
+ \frac{n}{2} A^{(n-2)} & + \frac{n}{2} A^{(n-3)} & + \frac{n}{2} A^{(n-4)} \\
+ \frac{3n}{8} A^{(n)} & + \frac{3n}{8} A^{(n-1)} & + \frac{3n}{8} A^{(n-2)} \\
 & & + \frac{15n}{16} A^{(n)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
+ (n-7) A^{(n-7)} y^{n-8} \ldots\ldots & + (n-2n+1) A_{(n-1)} y^{-n} & + (n-2n) A_{(n)} y^{-n-1} \\
+ n A^{(n-7)} & + n A_{(n-1)} & + n A_{(n)} \\
+ \frac{n}{2} A^{(n-5)} & + \frac{n}{2} A_{(n-3)} & + \frac{n}{2} A_{(n-2)} \\
+ \frac{3n}{8} A^{(n-3)} & + \frac{3n}{8} A_{(n-5)} & + \frac{3n}{8} A_{(n-4)} \\
+ \frac{5n}{16} A^{(n-1)} & \text{&c.} & \text{&c.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
+ (n-2n-1) A_{(n+1)} y^{-n-2} & + (n-2n-2) A_{(n+2)} y^{-n-3} & + (n-2n-3) A_{(n+1)} y^{-n-4} \\
+ n A_{(n+1)} & + n A_{(n+2)} & + n A_{(n+1)} \\
+ \frac{n}{2} A_{(n-1)} & + \frac{n}{2} A_{(n)} & + \frac{n}{2} A_{(n+1)} \\
+ \frac{3n}{8} A_{(n-3)} & + \frac{3n}{8} A_{(n-2)} & + \frac{3n}{8} A_{(n-1)} \\
\text{&c.} & \text{&c.} & \text{&c.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
+ (n-2n-4) A_{(n+4)} y^{-n-5} & + (n-2n-5) A_{(n+5)} y^{-n-6} \\
+ n A_{(n+4)} & + n A_{(n+5)} \\
+ \frac{n}{2} A_{(n+2)} & + \frac{n}{2} A_{(n+3)} \\
+ \frac{3n}{8} A^{(n)} & + \frac{3n}{8} A_{(n+2)} \\
\text{&c.} & \text{&c.}
\end{array}
$$

$+ (n - 2n - 6) A_{(n+6)} y^{-n-7}$ $+ (n - 2n - 7) A_{(n+7)} y^{-n-8}$ &c.
$+ n A_{(n+6)}$ $+ n A_{(n+7)}$ $= 0.$
$+ \frac{n}{2} A_{(n+4)}$ $+ \frac{n}{2} A_{(n+5)}$
$+ \frac{3n}{8} A_{(n+2)}$ $+ \frac{3n}{8} A_{(n+3)}$
$+ \frac{5n}{16} A^{(n)}$ $+ \frac{5n}{16} A_{(n+1)}$

Le premier terme donne $A^{(n)} = 0$, le second terme donne $A^{(n-1)} = 0$, le troiſième terme donne $A^{(n-2)} = 0$, & l'on trouve ſucceſſivement $A^{(n-3)} = A^{(n-4)} \ldots = A_{(n-1)} = 0$. Mais le coëfficient de y^{-n-1} donne $(2n - 2n) A_{(n)} = 0$, ce qui laiſſe $A_{(n)}$ indéterminé, le terme ſuivant donne $A_{(n+1)} = 0$, le ſuivant donne $A_{(n+2)} = \frac{n}{4} A_{(n)}$, le ſuivant donne $A_{(n+3)} = 0$, le ſuivant donne $A_{(n+4)} = \frac{n}{8} A_{(n+2)} + \frac{3n}{32} A_{(n)} = \frac{(nn+3n)}{32} A_{(n)}$ $= \frac{n(n+3)}{2.2^4} A_{(n)}$, le ſuivant donne $A_{(n+5)} = 0$, le ſuivant donne $A_{(n+6)} = \frac{n}{2.6} A_{(n+4)} + \frac{3n}{8.6} A_{(n+2)} + \frac{5n}{16.6} A_{(n)} = \left(\frac{n^3+3n^2}{6.64}\right.$ $\left. + \frac{6nn}{6.64} + \frac{20n}{6.64}\right) A_{(n)}$. Donc $A_{(n+6)} = \left(\frac{n^3+9n^2+20n}{6.64}\right) A_{(n)}$ $= \frac{n(n+4)(n+5)}{6.2^6} A_{(n)}$, le ſuivant donne $A_{(n+7)} = 0$ &c. On a donc $q^n = A_{(n)} \left(y^{-n} + \frac{n}{1} \frac{y^{-n-2}}{2^2} + \frac{n(n+3)}{1.2} \frac{y^{-n-4}}{2^4}\right.$ $\left. + \frac{n(n+4)(n+5)}{2.3} \frac{y^{-n-6}}{2^6} \text{ &c.}\right) = 2^n A_{(n)} \left(\frac{1}{(2y)^n} + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{(2y)^{n+2}}\right.$ $\left. + \frac{n(n+3)}{1.2} \frac{1}{(2y)^{n+4}} + \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3} \frac{1}{(2y)^{n+6}} \text{ &c.}\right)$. Pour déterminer la conſtante A, on conſidérera que $(y - \sqrt{(yy-1)})^n$ $= (y + \sqrt{(yy-1)})^n = y^{-n} - n y^{-n-1} \sqrt{(yy-1)}$ $+ \frac{n(n+1)}{1.2} y^{-n-2} (yy-1) - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} y^{-n-3} (yy-1)^{\frac{3}{2}}$ &c. $=$ (en

$= $ (en ne prenant que la plus haute dimenſion de y) $y^{-n}\left(1 - n + \frac{n(n+1)}{1.2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\text{ &c.}\right) = \frac{y^{-n}}{2n} = \frac{1}{(2y)^n}$. Donc $A_{(n)}\ 2^n = 1$. Donc $A_{(n)} = \frac{1}{2^n}$ & l'on a $q^n = \frac{1}{(2y)^n} + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{(2y)^{n+2}} + \frac{n(n+3)}{1.2}\frac{1}{(2y)^{n+4}} + \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}\frac{1}{(2y)^{n+6}}$ &c. comme le trouve M. Fuſs ibid.

§. 3. Si l'on multiplie la valeur de p^n par celle de $\frac{1}{\sqrt{(yy-1)}} = y^{-1} + \frac{1}{2}y^{-3} + \frac{3}{8}y^{-5} + \frac{5}{16}y^{-7}$ &c. on a $\frac{p^n}{2\sqrt{(yy-1)}} = (2y)^{n-1} - \frac{(n-2)}{1}(2y)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}(2y)^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2.3}(2y)^{n-7}$ &c. comme le trouve M. Fuſs p. 213.

§. 4. Si l'on multiplie la valeur de q^n par celle de $\frac{1}{\sqrt{(yy-1)}}$, on a $\frac{q^n}{2\sqrt{(yy-1)}} = \frac{1}{(2y)^{n+1}} + \frac{(n+2)}{1}\cdot\frac{1}{(2y)^{n+3}} + \frac{(n+3)(n+4)}{1.2}\cdot\frac{1}{(2y)^{n+5}} + \frac{(n+4)(n+5)(n+6)}{1.2.3}\frac{1}{(2y)^{n+7}}$ &c. comme le trouve M. Fuſs p. 214.

§. 5. Si n eſt un nombre entier poſitif, on aura, $p^n = (2y)^n - \frac{n}{1}(2y)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}(2y)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}(2y)^{n-6}$ &c. $- \frac{1}{(2y)^n} - \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{(2y)^{n+2}} - \frac{n(n+3)}{1.2}\frac{1}{(2y)^{n+4}} - \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{(2y)^{n+6}}$ &c. Les coëfficiens des termes y^{-1}, y^{-2}, y^{-3} . . . . y^{-n-1} ſont nuls, puiſque zéro eſt un facteur de ces termes, comme il eſt aiſé de s'en aſſurer. On a donc $p^n + q^n = (2y)^n - \frac{n}{1}(2y)^{n-2}$

$+ \frac{n(n-3)}{2}(2y)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}(2y)^{n-6}$ &c. Si n eſt pair, le dernier terme ſera $\frac{n\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-3\right)\ldots 1}{1\ldots\ldots\frac{n}{2}} = 2$: Si n eſt impair, le dernier terme ſera $\frac{n\frac{(n-1)}{2}\cdot\frac{(n-3)}{2}\ldots 2}{1\ldots\ldots\frac{(n-1)}{2}}(2y) = 2ny$. Ce ſont les formules que M. Euler a trouvées dans l'Introduction à l'analyſe de l'infini. En effet puiſque $p = y + V(yy-1) = y + V-1\,V(1-yy) =$ (en faiſant $y = \text{cof}\,\Phi$, ce qui donne $\text{ſin}\,\Phi = V(1-yy)$) $\text{cof}\,\Phi + \text{ſin}\,\Phi\,V-1$, & $q = y - V(yy-1) = y - V-1\,V(1-yy) = \text{cof}\,\Phi - \text{ſin}\,\Phi\,V-1$, on a par les formules des ſinus $(\text{cof}\,\Phi + \text{ſin}\,\Phi\,V-1)^n = p^n = \text{cof}\,n\Phi + \text{ſin}\,n\Phi\,V-1$, $(\text{cof}\,\Phi - \text{ſin}\,\Phi\,V-1)^n = \text{cof}\,n\Phi - \text{ſin}\,n\Phi\,V-1 = q^n$. Donc $2\,\text{cof}\,n\Phi = p^n + q^n$, équation qu'a trouvée M. Euler.

§. 6. Prenant toujours pour n un nombre entier poſitif, on aura $\frac{p^n}{2V(yy-1)} = (2y)^{n-1} - \frac{(n-2)}{1}(2y)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}(2y)^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}(2y)^{n-7}$ &c. $+ \frac{1}{(2y)^{n+1}} + \frac{(n+2)}{1}\cdot\frac{1}{(2y)^{n+3}} + \frac{(n+3)(n+4)}{1.2}\cdot\frac{1}{(2y)^{n+5}} + \frac{(n+4)(n+5)(n+6)}{1.2.3}\frac{1}{(2y)^{n+7}}$ &c. Les termes intermédiaires ſont nuls, parce que zéro y entre comme facteur, comme il eſt facile de s'en aſſurer. Donc $\frac{p^n - q^n}{2V(yy-1)} = (2y)^{n-1} - \frac{(n-2)}{1}(2y)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}(2y)^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}(2y)^{n-7}$ &c. Si n eſt impair, le dernier terme ſera ± 1. Si n eſt pair, le dernier terme ſera $\pm\frac{n}{2}$. Ce

ſont les formules que M. Euler a trouvées dans l'Introduction à l'analyſe de l'infini. Car on a $2 \sin n\Phi \sqrt{-1} = p^n - q^n$. Donc $\sin n\Phi = \frac{p^n - q^n}{2\sqrt{-1}}$. Or $\sqrt{(yy-1)} = \sin\Phi \sqrt{-1}$. Donc $\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{(yy-1)}}{\sin\Phi}$, $\sin n\Phi = \frac{\sin\Phi\,(p^n - q^n)}{2\sqrt{(yy-1)}}$. Donc $\sin n\Phi$ $= \sin\Phi \left((2y)^{n-1} - \frac{(n-2)}{1}(2y)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}(2y)^{n-5}\right.$ $\left. - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}(2y)^{n-7} \text{ &c.}\right)$ comme l'a trouvé M. Euler. On voit par l'analyſe même que ces formules n'ont lieu que pour les cas où n eſt un nombre entier poſitif, il n'eſt donc pas étonnant qu'elles ſoient fauſſes lorsque $n = 0$, ou lorsque n eſt un nombre rompu ou négatif. On voit auſſi pourquoi il faut s'arrêter dans ces formules lorsque l'expoſant ceſſe d'être poſitif, puisque nous avons déterminé la valeur des derniers termes. Il eſt bien clair que ſi l'on alloit au-delà, on trouveroit des expreſſions fauſſes.

§. 7. Si n eſt un nombre rompu, pour trouver la forme de la ſuite, je fais $q^n = A^{(\nu)} y^\nu + A^{(\nu-2)} y^{\nu-2} + A^{(\nu-4)} y^{\nu-4} + A^{(\nu-6)} y^{\nu-6}$ &c. on aura $\frac{n\,dq}{dy} + nq\,(y^{-1} + \frac{1}{2} y^{-3} + \frac{3}{8} y^{-5} + \frac{5}{16} y^{-7}$ &c.$) = 0$, ou

$$\begin{array}{llll}
\nu A^{(\nu)} y^{\nu-1} & +(\nu-2) A^{(\nu-2)} y^{\nu-3} & +(\nu-4) A^{(\nu-4)} y^{\nu-5} & +(\nu-6) A^{(\nu-6)} y^{\nu-7} \\
+ nA^{(\nu)} & + nA^{(\nu-2)} & + nA^{(\nu-4)} & + nA^{(\nu-6)} \\
 & + \frac{n}{2} A^{(\nu)} & + \frac{n}{2} A^{(\nu-2)} & + \frac{n}{2} A^{(\nu-4)} \text{ &c.} = 0 \\
 & & + \frac{3n}{8} A^{(\nu)} & + \frac{3n}{8} A^{(\nu-2)} \\
 & & & + \frac{5n}{16} A^{(\nu)}
\end{array}$$

ce qui donne $\nu = -n$, $A^{(\nu)}$ indéterminé, $A^{(\nu-2)} = \frac{A^{(\nu)} n}{4}$, $A^{(\nu-4)}$ $= \frac{n(n+3)}{4^2 \cdot 2} A^{(\nu)}$, $A^{(\nu-6)} = \frac{n(n+4)(n+5)}{2 \cdot 3 \cdot 4^3} A^{(\nu)}$, comme nous

l'avons trouvé ci-deſſus. Ce procédé a lieu quel que ſoit n, mais ſi n eſt un nombre rompu, à moins que ſon dénominateur ne ſoit 2, q^n ne contient pas de termes de la même forme que p^n, alors il ne ſe fait point de deſtruction de termes. Mais ces ſuites que donnent M. Euler & M. Fuſs ne peuvent ſervir dès que n eſt une fraction au deſſous de l'unité, parce que y ſe trouvant au dénominateur, & étant néceſſairement < 1, la ſuite tend à diverger. Il faut donc dans ce cas-là avoir des ſuites où les expoſans de y ne deviennent jamais négatifs.

§. 8. Pour cela je mets (§. 2.) l'expreſſion $-\frac{n\,dy}{\sqrt{(yy-1)}}$ ſous la forme $\frac{-n\,dy}{\sqrt{-1}\,\sqrt{(1-yy)}}$; & j'ai $\frac{n\,dq}{q} = \frac{-n\,dy}{\sqrt{-1}}\left(1 + \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{3}{2.2^2}y^4 + \frac{3.5}{2.3.2^3}y^6 + \frac{3.5.7}{2.3.4.2^4}y^8 + \frac{3.5.7.9}{2.3.4.5.2^5}y^{10}\ \&c.\right)$

Je fais maintenant $q^n = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + Fy^5 + Gy^6$ &c. & j'ai $\frac{n\,dq}{q} = \frac{B + 2Cy + 3Dy^2 + 4Ey^3 + 5Fy^4 + 6Gy^5}{A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + Fy^5 + Gy^6}$.

Donc

$$\begin{array}{rrrrrr} B & +2Cy & +3Dy^2 & +4Ey^3 & +5Fy^4 & +6Gy^5 \\ +\frac{An}{\sqrt{-1}} & +\frac{Bn}{\sqrt{-1}} & +\frac{An}{2\sqrt{-1}} & +\frac{Bn}{2\sqrt{-1}} & +\frac{3An}{2.2^2\sqrt{-1}} & +\frac{3Bn}{2.2^2\sqrt{-1}} \\ & & +\frac{Cn}{\sqrt{-1}} & +\frac{Dn}{\sqrt{-1}} & +\frac{Cn}{2\sqrt{-1}} & +\frac{Dn}{2\sqrt{-1}} \\ & & & & +\frac{En}{\sqrt{-1}} & +\frac{Fn}{\sqrt{-1}} \end{array}$$

$$\&c. = 0.$$

On tire de là $B = -\frac{An}{\sqrt{-1}}$, $C = -\frac{Bn}{2\sqrt{-1}} = -\frac{Ann}{1.2}$,

$D = -\frac{An}{6\sqrt{-1}} = -\frac{Cn}{3\sqrt{-1}} = -\frac{An}{6\sqrt{-1}} + \frac{An^3}{6\sqrt{-1}}$

$= \frac{An(n^2-1)}{1.2.3\sqrt{-1}}$, $4E = -\frac{Bn}{2\sqrt{-1}} - \frac{Dn}{\sqrt{-1}} = -\frac{Ann}{2}$

$$+\frac{A(n^4-n^2)}{1.2.3}=\frac{A(n^4-4n^2)}{1.2.3},\quad E=\frac{A(n^4-4n^2)}{1.2.3.4},\quad 5F=$$

$$-\frac{3An}{8\sqrt{-1}}-\frac{Cn}{2\sqrt{-1}}-\frac{En}{\sqrt{-1}}=-\frac{3An}{8\sqrt{-1}}+\frac{An^3}{4\sqrt{-1}}$$

$$-\frac{A(n^5-4n^3)}{2.3.4\sqrt{-1}}=-\frac{9An+6An^3-A(n^5-4n^3)}{1.2.3.4\sqrt{-1}}=$$

$$-\frac{A(n^5-10n^3+9n)}{1.2.3.4\sqrt{-1}}=-\frac{An(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4\sqrt{-1}},\quad F=$$

$$-\frac{An(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5\sqrt{-1}},\quad 6G=-\frac{3Bn}{8\sqrt{-1}}-\frac{Dn}{2\sqrt{-1}}-\frac{Fn}{\sqrt{-1}}$$

$$=-\frac{3Ann}{8}+\frac{A(n^4-n^2)}{1.2}-\frac{A(n^6-10n^4+9n^2)}{1.2.3.4.5}=$$

$$-\frac{45Ann+10A(n^4-n^2)+A(-n^6+10n^4-9n^2)}{1.2.3.4.5}=$$

$$-\frac{(n^6-20n^4+64n^2)}{1.2.3.4.5}A=-\frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5}A,\quad G=$$

$$-\frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5.6}A.$$ On trouvera de même $H=$

$$-\frac{3.5.An}{2.3.2^3\sqrt{-1}}-\frac{3Cn}{2.2^2\sqrt{-1}}-\frac{En}{2\sqrt{-1}}-\frac{Gn}{\sqrt{-1}}=-\frac{3.5An}{2.3.2^3\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{3An^3}{4.2^2\sqrt{-1}}-\frac{A(n^5-4n^3)}{2.2.3.4\sqrt{-1}}+\frac{(n^7-20n^5+64n^3)}{2.3.4.5.6\sqrt{-1}}=$$

$$-\frac{9.25An+27.5An^3-15A(n^5-4n^3)+(n^7-20n^5+64n^3)A}{1.2.3.4.5.6\sqrt{-1}}$$

$$=\frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1.2.3.4.5.6\sqrt{-1}}A.$$ On aura de même, $I=$

$$-\frac{3.5Bn}{2.3.2^3\sqrt{-1}}-\frac{3Dn}{2.2^2\sqrt{-1}}-\frac{Fn}{2\sqrt{-1}}-\frac{Hn}{\sqrt{-1}}=-\frac{3.5Ann}{2.3.2^3}$$

$$+\frac{3A(n^4-n^2)}{2.3.8}-\frac{(n^6-10n^4+9n^2)A}{2.2.3.4.5}+\frac{(n^8-35n^6+259n^4-225n^2)A}{1.2.3.4.5.6.7}$$

$$=-\frac{9.25.7An^2+9.5.7A(n^4-n^2)-21A(n^6-10n^4+9n^2)+A(n^8-35n^6+259n^4-225n^2)}{1.2.3.4.5.6.7}$$

$$=\frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{1.2.3.4.5.6.7.8}A.$$ L'analogie eſt maintenant

evidente, & l'on aura $q^n = A\Big(1 - \frac{ny}{\sqrt{-1}} - \frac{nn}{1.2}y^2 + \frac{n(n^2-1)}{1.2.3\sqrt{-1}}y^3$
$+ \frac{n^2(n^2-4)}{1.2.3.4}y^4 - \frac{n^2(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5\sqrt{-1}}y^5 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5.6}y^6$
$+ \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7\sqrt{-1}}y^7 + \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{1.2.3.4.5.6.7.8}y^8$ &c.$\Big)$

§. 9. Si l'on cherche maintenant la valeur p^n, on aura l'équation

$$\begin{array}{llllllll} -B & -2Cy & -3Dy^2 & -4Ey^3 & -5Fy^4 & -6Gy^5 & & \\ +\frac{An}{\sqrt{-1}} & +\frac{Bn}{\sqrt{-1}} & +\frac{An}{2\sqrt{-1}} & +\frac{Bn}{2\sqrt{-1}} & +\frac{3An}{2.2^2\sqrt{-1}} & +\frac{3Bn}{2.2^2\sqrt{-1}} & & \\ & & +\frac{Cn}{\sqrt{-1}} & +\frac{Dn}{\sqrt{-1}} & +\frac{Cn}{2\sqrt{-1}} & +\frac{Dn}{2\sqrt{-1}} & & \\ & & & & +\frac{En}{\sqrt{-1}} & +\frac{Fn}{\sqrt{-1}} & & \end{array}$$

&c. $= 0$.

On voit aiſément que les coëfficiens A, B, C, D &c. conſervent leurs valeurs, mais que B, D, F, H &c. changent de ſigne, tandis que C, E, G, I &c. conſervent les mêmes ſignes, en ſorte qu'on aura

$p^n = A'\Big(1 + \frac{ny}{\sqrt{-1}} - \frac{nn}{1.2}y^2 - \frac{n(n^2-1)}{1.2.3\sqrt{-1}}y^3 + \frac{n^2(n^2-4)}{1.2.3.4}y^4$
$+ \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5\sqrt{-1}}y^5 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5.6}y^6$
$- \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7\sqrt{-1}}y^7 + \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{1.2.3.4.5.6.7.8}y^8$ &c.$\Big)$.

Je mets A' pour la conſtante, parce que la conſtante arbitraire n'eſt pas la même dans les deux cas. Dans le cas de p^n on a $A' = (\sqrt{-1})^n$, dans le cas de q^n, on a $A = (-\sqrt{-1})^n = \frac{1}{(\sqrt{-1})^n}$. En ſuppoſant que n ſoit un nombre entier, on aura $A' = A$ lorsque n eſt pair, & $A' = -A$ lorsque n eſt impair. Suppoſant donc n un nombre entier & pair, on a $\frac{p^n + q^n}{2} = \text{cof}\, n\Phi$

$= (\sqrt{-1})^n \left(1 - \frac{nn}{1.2} y^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{1.2.3.4} y^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5.6} y^6 + \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{1.2.3.4.5.6.7.8} y^8 \text{ &c.}\right)$. Si n eſt un nombre entier & impair, on aura $\frac{p^n + q^n}{2} = \text{cof } n\Phi = (\sqrt{-1})^{n-1} \left(ny - \frac{n(n^2-1)}{1.2.3} y^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5} y^5 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7} y^7 \text{ &c.}\right)$.

Dans les deux cas la ſuite ſera exempte d'imaginaires, puisque dans le premier cas n eſt pair, & dans le ſecond $n - 1$ eſt pair. Ces deux formules répondent à celles que M. Euler a données dans l'Introduction à l'analyſe de l'infini, comme on peut s'en aſſurer aiſément, elles ne donnent point de réſultats abſurdes, & dans le cas de $n = 0$, elles donnent $\text{cof } n\Phi = 1$, comme cela doit être.

§. 10. Suppoſant maintenant n entier & pair, nous aurons, $\frac{(p^n - q^n)}{2} = \frac{(\sqrt{-1})^n}{\sqrt{-1}} \left(ny - \frac{n(n^2-1)}{1.2.3} y^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5} y^5 - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7} y^7 \text{ &c.}\right)$, $\frac{(p^n - q^n)}{2\sqrt{-1}} = -(\sqrt{-1})^n \left(ny - \frac{n(n^2-1)}{1.2.3} y^3 + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4.5} y^5 - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7} y^7 \text{ &c.}\right)$ $= \text{ſin } n\Phi$. Multiplions cette ſuite par $\frac{1}{\sqrt{(1-yy)}} = \frac{1}{\text{ſin } \Phi} = 1 + \frac{1}{2} y^2 + \frac{3}{8} y^4 + \frac{5}{16} y^6$ &c. & nous aurons $\frac{p^n - q^n}{2\sqrt{-1}} = \text{ſin } n\Phi = -(\sqrt{-1})^n \left(ny - \frac{n(n^2-4)}{1.2.3} y^3 + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5} y^5 - \frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{1.2.3.4.5.6.7} y^7 \text{ &c.}\right) \text{ſin } \Phi$. Suppoſant n entier & impair nous aurons $\frac{p^n - q^n}{2} = (\sqrt{-1})^n \left(1 - \frac{nn}{2} y^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{1.2.3.4} y^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5.6} y^6 + \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{1.2.3.4.5.6.7.8} y^8 \text{ &c.}\right)$

Donc $\frac{p^n - q^n}{2\sqrt{-1}} = \sin n\Phi = (\sqrt{-1})^{n-1}\left(1 - \frac{nn}{2}y^2 + \frac{n^2(n^2-4)}{1.2.3.4}y^4 - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{1.2.3.4.5.6}y^6 + \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{1.2.3.4.5.6.7.8}y^8 \text{ &c.}\right)$

Multiplions cette ſuite par $\frac{1}{\sqrt{(1-yy)}} = \frac{1}{\sin\Phi} = 1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{8}y^4 + \frac{5}{16}y^6$ &c. & nous aurons $\frac{p^n - q^n}{2\sqrt{-1}} = \sin n\Phi = (\sqrt{-1})^{n-1}\sin\Phi\left(1 - \frac{(n^2-1)}{1.2.}y^2 + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{1.2.3.4}y^4 - \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{1.2.3.4.5.6}y^6 \text{ &c.}\right)$. Dans les deux cas la ſuite eſt auſſi, comme l'on voit, exempte d'imaginaires. Ces deux formules répondent à celles que M. Euler a données dans l'Introduction à l'analyſe de l'infini, ſans être ſujettes aux mêmes inconvéniens, ce qui vient de ce que nous avons diſtingué le cas de n pair du cas de n impair.

§. 11. Soit maintenant n un nombre rompu que nous ſuppoſerons $= \frac{m}{\mu}$, m & μ étant premiers entre eux & entiers, on aura

$$p^{\frac{m}{\mu}} + q^{\frac{m}{\mu}} = (\sqrt{-1})^{\frac{m}{\mu}}\left(1 - \frac{\frac{m}{\mu}}{\sqrt{-1}}y - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}}{1.2}y^2 + \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-1\right)}{1.2.3\sqrt{-1}}y^3 + \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-4\right)}{1.2.3.4}y^4 - \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-1\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2}-9\right)}{1.2.3.4.5\sqrt{-1}}y^5 - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-4\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2}-16\right)}{1.2.3.4.5.6}y^6 \text{ &c.}\right) + (\sqrt{-1})^{-\frac{m}{\mu}}\left(1 + \frac{\frac{m}{\mu}}{\sqrt{-1}}y - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}}{1.2}y^2 - \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-1\right)}{1.2.3\sqrt{-1}}y^3 + \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-4\right)}{1.2.3.4}y^4 + \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-1\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2}-9\right)}{1.2.3.4.5\sqrt{-1}}y^5 - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-4\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2}-16\right)}{1.2.3.4.5.6}y^6 \text{ &c.}\right) =$$

$$= \left((V-1)^{\frac{m}{\mu}} + (V-1)^{-\frac{m}{\mu}}\right)\left(1 - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}}{1.2}y^2 + \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-4\right)}{1.2.3.4}y^4 - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-4\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2}-16\right)}{1.2.3.4.5.6}y^6 \text{ &c.}\right)$$

$$- \left(\frac{(V-1)^{\frac{m}{\mu}} - (V-1)^{-\frac{m}{\mu}}}{V-1}\right)\left(\frac{m}{\mu}y - \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-1\right)}{1.2.3}y^3 + \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-1\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2}-9\right)}{1.2.3.4.5}y^5 \text{ &c.}\right).$$

Or $(V-1)^{\frac{m}{\mu}} + (V-1)^{-\frac{m}{\mu}} = (V-1)^{\frac{m}{\mu}} + \frac{1}{(V-1)^{\frac{m}{\mu}}} = \frac{(V-1)^{\frac{2m}{\mu}}+1}{(V-1)^{\frac{m}{\mu}}}$

$= \frac{(-1)^{\frac{m}{\mu}}+1}{(V-1)^{\frac{m}{\mu}}}$. Mais la fraction $\frac{m}{\mu}$ étant ſuppoſée irréductible, m & μ ne peuvent être tous deux pairs. Il ne reſte donc que trois cas à examiner.

I. Si m eſt pair & μ impair, on a $(-1)^{\frac{m}{\mu}} + 1 = \sqrt[\mu]{(-1)^m} + 1 = \sqrt[\mu]{1} + 1 = 2$. Donc ſi m eſt pair & μ impair on a, $(V-1)^{\frac{m}{\mu}} + (V-1)^{-\frac{m}{\mu}} = \frac{2}{(V-1)^{\frac{m}{\mu}}} = \frac{2}{\sqrt[2\mu]{(-1)^m}} = \frac{2}{\sqrt[2\mu]{1}} = 2$.

II. Si m eſt impair & μ impair, on a $\sqrt[\mu]{(-1)^m} + 1 = \sqrt[\mu]{-1} + 1 = 0$. Donc ſi m eſt impair & μ impair, on a $(V-1)^{\frac{m}{\mu}} + (V-1)^{-\frac{m}{\mu}} = 0$.

III. Si m eſt impair & μ pair, on a $\sqrt[\mu]{(-1)^m} + 1 = \sqrt[\mu]{-1} + 1$. Donc ſi m eſt impair & μ pair, on a $(\sqrt{-1})^{\frac{m}{\mu}} + (\sqrt{-1})^{-\frac{m}{\mu}} = \frac{\sqrt[\mu]{-1}+1}{\sqrt[2\mu]{-1}}$. On aura maintenant $(\sqrt{-1})^{\frac{m}{\mu}} - (\sqrt{-1})^{-\frac{m}{\mu}} = (\sqrt{-1})^{\frac{m}{\mu}} - \frac{1}{(\sqrt{-1})^{\frac{m}{\mu}}} = \frac{(\sqrt{-1})^{\frac{2m}{\mu}}-1}{(\sqrt{-1})^{\frac{m}{\mu}}} = \frac{(-1)^{\frac{m}{\mu}}-1}{(\sqrt{-1})^{\frac{m}{\mu}}}$. Sur quoi il y a trois cas à examiner.

I. Si m eſt pair & μ impair, on a $(-1)^{\frac{m}{\mu}} - 1 = \sqrt[\mu]{(-1)^m} - 1 = \sqrt[\mu]{1} - 1 = 0$. Donc ſi m eſt pair & μ impair, on a $(\sqrt{-1})^{\frac{m}{\mu}} - (\sqrt{-1})^{-\frac{m}{\mu}} = 0$.

II. Si m eſt impair & μ impair, on a $\sqrt[\mu]{(-1)^m} - 1 = \sqrt[\mu]{-1} - 1 = -2$. Donc ſi m eſt impair & μ impair, on a $(\sqrt{-1})^{\frac{m}{\mu}} - (\sqrt{-1})^{-\frac{m}{\mu}} = \frac{-2}{(\sqrt{-1})^{\frac{m}{\mu}}} = -\frac{2}{\sqrt[2\mu]{(-1)^m}} = -\frac{2}{\sqrt[2\mu]{-1}}$.

III. Si m eſt impair & μ pair, on a $\sqrt[\mu]{(-1)^m} - 1 = \sqrt[\mu]{-1} - 1$. Donc ſi m eſt impair & μ pair, on a $(\sqrt{-1})^{\frac{m}{\mu}} - (\sqrt{-1})^{-\frac{m}{\mu}} = \frac{\sqrt[\mu]{-1}-1}{\sqrt[2\mu]{-1}}$.

§. 12. On aura donc pour les deux premiers cas les formules ſuivantes :

I Cas. m pair, μ impair.

$$\frac{p^{\frac{m}{\mu}} + q^{\frac{m}{\mu}}}{2} = \text{cof}\,\frac{m}{\mu}\,\Phi = \pm\left(\frac{1 - \frac{m^2}{\mu^2}}{1.2}\,y^2 + \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 4\right)}{1.2.3.4}\,y^4 - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 4\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 16\right)}{1.2.3.4.5.6}\,y^6 \text{ &c.}\right).$$

II Cas. m impair, μ impair.

$$\frac{p^{\frac{m}{\mu}} + q^{\frac{m}{\mu}}}{2} = \text{cof}\,\frac{m}{\mu}\,\Phi = \pm\left(\frac{m}{\mu}\,y - \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 1\right)}{1.2.3}\,y^3 + \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 1\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 9\right)}{1.2.3.4.5}\,y^5 \text{ &c.}\right).$$

En effet $\frac{2}{\sqrt{-1}\,\sqrt[2\mu]{\sqrt{-1}}} = 2\,(-1)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2\mu}} = 2\,(-1)^{\frac{\mu+1}{2\mu}} = 2\,\sqrt[2\mu]{(-1)^{\mu+1}} = 2\,\sqrt[2\mu]{1}$ (puisque $\mu + 1$ eſt pair) $= 2$.

§. 13. Le troiſième cas exige les calculs ſuivans: Soit $\frac{\sqrt{-1}+1}{\sqrt{-1}} = x'$, on aura $\frac{2\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = 2 = x'^2$, donc $x' = \pm\sqrt{2}$. Soit $\frac{\sqrt{-1}+1}{\sqrt{-1}} = x''$, on a $\frac{\sqrt{-1}+1}{\sqrt{-1}} + 2 = x''^2 = 2 \pm \sqrt{2}$. Donc $x'' = \pm\sqrt{(2 \pm \sqrt{2})}$. Soit $\frac{\sqrt[6]{-1}+1}{\sqrt[12]{-1}} = x'''$, on a $\frac{\sqrt[6]{-1}+1}{\sqrt[6]{-1}} + 2 = x'''^2 = 2$, donc $x''' = \pm\sqrt{2}$. Soit $\frac{\sqrt[8]{-1}+1}{\sqrt[16]{-1}} = x^{IV}$, on a $\frac{\sqrt[8]{-1}+1}{\sqrt[8]{-1}} + 2 = x^{IV\,2} = 2 \pm \sqrt{(2 \pm \sqrt{2})}$. Donc $x^{IV} = \pm\sqrt{(2 \pm \sqrt{(2 \pm \sqrt{2})})}$. Soit $\frac{\sqrt[10]{-1}+1}{\sqrt[20]{-1}} = x^{V}$, on a

$\frac{\overset{8}{V}-1+1}{\overset{10}{V}-1}+2=x^{v2}=2$. Donc $x^v=\pm V2$. Soit $\frac{\overset{12}{V}-1+1}{\overset{20}{V}-1}=x^{vi}$, on a $\frac{\overset{8}{V}-1+1}{\overset{12}{V}-1}+2=x^{vi2}=2\pm V2$. Donc $x^{vi}=\pm V(2\pm V2)$. L'analogie eſt évidente, & l'on aura $\frac{\overset{\mu}{V}-1+1}{\overset{2\mu}{V}-1}=\pm V(2\pm V2\pm$ &c.) en prenant autant de termes que μ renferme de fois le facteur 2.

§. 14. Soit maintenant $\frac{V-1-1}{\overset{4}{V}-1}=y'$, on a $-\frac{2V-1}{V-1}=2=y'^2$. Donc $y'=\pm V-2=\pm V2\,V-1$. Soit $\frac{\overset{4}{V}-1-1}{\overset{8}{V}-1}=y''$, on a $\frac{V-1+1}{\overset{4}{V}-1}-2=y''^2=-2\pm V2$. Donc $y''=\pm V(-2\pm V2)=\pm V-1\,V(2\pm V2)$. Soit $\frac{\overset{8}{V}-1-1}{\overset{12}{V}-1}=y'''$, on a $\frac{\overset{8}{V}-1+1}{\overset{8}{V}-1}-2=y'''^2=-2$. Donc $y'''=\pm V-1\,V2$. Soit $\frac{\overset{8}{V}-1-1}{\overset{16}{V}-1}=y^{iv}$, on a $\frac{\overset{8}{V}-1+1}{\overset{8}{V}-1}-2=y^{iv2}=-2\pm V(2\pm V2)$. Donc $y^{iv}=\pm V(-2\pm V(2\pm V2))=\pm V-1\,V(2\mp V(2\pm V2))$. Soit $\frac{\overset{10}{V}-1-1}{\overset{20}{V}-1}=y^v$, on a $\frac{\overset{8}{V}-1-1}{\overset{10}{V}-1}-2=y^{v2}=-2$. Donc $y^v=\pm V-2=\pm V-1\,V2$. Soit $\frac{\overset{12}{V}-1-1}{\overset{24}{V}-1}=y^{vi}$, on a $\frac{\overset{8}{V}-1+1}{\overset{12}{V}-1}-2=y^{vi2}=-2\pm V2$. Donc $y^{vi}=\pm V(-2\pm V2)=\pm V-1\,V(2\mp V2)$.

L'analogie eſt maintenant évidente, & l'on aura $\frac{\sqrt[\mu]{-1} - 1}{\sqrt[2\mu]{-1}}$ $= \pm \sqrt{-1}\ l(2 \mp \sqrt{2} \pm$ &c.) en prenant autant de termes que le facteur μ renferme de fois le facteur 2.

§. 15. On aura donc pour troiſième cas les formules ſuivantes:

III Cas. m impair, μ pair.

$$\frac{p^{\frac{m}{\mu}} + q^{\frac{m}{\mu}}}{2} = \pm \frac{\sqrt{(2 \pm \sqrt{2} \pm \&c.)}}{2} \left\{ 1 - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}}{1.2} y^2 + \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 4\right)}{1.2.3.4} y^4 - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 4\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 16\right)}{1.2.3.4.5.6} y^6 \&c. \right\}$$

$$\pm \frac{\sqrt{(2 \mp \sqrt{2} \pm \&c.)}}{2} \left\{ \frac{m}{\mu} y - \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 1\right)}{1.2.3} y^3 + \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 1\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 9\right)}{1.2.3.4.5} y^5 \&c. \right\}$$

$= \cos \frac{m}{\mu} \Phi$. On prendra dans chaque radical autant de fois $\sqrt{2}$ que μ contient de fois le facteur 2. Et pour les deux premiers ſignes alternatifs, il faut prendre à la fois les ſignes ſupérieurs ou les inférieurs. L'on voit que ces formules ne contiennent point d'imaginaires.

§. 16. On a maintenant, $p^{\frac{m}{\mu}} - q^{\frac{m}{\mu}} =$

$$(\sqrt{-1})^{-\frac{m}{\mu}} \left\{ 1 + \frac{\frac{m}{\mu} y}{\sqrt{-1}} - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}}{1.2} y^2 - \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 1\right)}{1.2.3\sqrt{-1}} y^3 + \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 4\right)}{1.2.3.4} y^4 \&c. \right\} - (\sqrt{-1})^{\frac{m}{\mu}} \left\{ 1 - \frac{\frac{m}{\mu} y}{\sqrt{-1}} - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}}{1.2} y^2 + \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 1\right)}{1.2.3\sqrt{-1}} y^3 + \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 4\right)}{1.2.3.4} y^4 \&c. \right\} =$$

$$\left((\sqrt{-1})^{-\frac{m}{\mu}} - (\sqrt{-1})^{\frac{m}{\mu}} \right) \left\{ 1 - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}}{1.2} y^2 + \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2} - 4\right)}{1.2.3.4} y^4 \right.$$

$$- \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-4\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2}-16\right)}{1.2.3.4.5.6} y^6 \text{ &c.} \Big\} + \frac{\left((V-1)^{-\frac{m}{\mu}} + (V-1)^{\frac{m}{\mu}}\right)}{V-1} \Big\{ \frac{m}{\mu} y$$

$$- \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-1\right)}{1.2.3} y^3 + \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-1\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2}-9\right)}{1.2.3.4.5} y^5 \text{ &c.} \Big\}. \text{ Donc}$$

$$\frac{p^{\frac{m}{\mu}} - q^{\frac{m}{\mu}}}{V-1} = \frac{\left((V-1)^{-\frac{m}{\mu}} - (V-1)^{\frac{m}{\mu}}\right)}{V-1} \Big\{ 1 - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}}{1.2} y^2$$

$$+ \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-4\right)}{1.2.3.4} y^4 - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-4\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2}-16\right)}{1.2.3.4.5.6} y^6 \text{ &c.} \Big\}$$

$$- \left((V-1)^{-\frac{m}{\mu}} + (V-1)^{\frac{m}{\mu}}\right) \Big\{ \frac{m}{\mu} y - \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-1\right)}{1.2.3} y^3$$

$$+ \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-1\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2}-9\right)}{1.2.3.4.5} y^5 \text{ &c.} \Big\}. \text{ On aura donc}$$

III Cas. m impair, μ pair.

$$\frac{p^{\frac{m}{\mu}} - q^{\frac{m}{\mu}}}{2V-1} = \text{sin } \frac{m}{\mu} \Phi = \pm \frac{V(2 \mp V2)}{2} \cdot \Big\{ 1 - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}}{1.2} y^2$$

$$+ \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-4\right)}{1.2.3.4} y^4 - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-4\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2}-16\right)}{1.2.3.4.5.6} y^6 \text{ &c.} \Big\}$$

$$\mp \frac{V(2 \pm V2)}{2} \Big\{ \frac{m}{\mu} y - \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-1\right)}{1.2.3} y^3 + \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-1\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2}-9\right)}{1.2.3.4.5} y^5 \text{ &c.} \Big\}$$

On obſervera ſur cette formule les mêmes règles que ſur la précédente. On voit qu'elle ne contient pas non plus d'imaginaires. On aura auſſi pour les deux premiers cas

I Cas. m pair, μ impair.

$$\frac{p^{\frac{m}{\mu}} - q^{\frac{m}{\mu}}}{2V-1} = \text{sin } \frac{m}{\mu} \Phi = \pm \Big\{ \frac{m}{\mu} y - \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-1\right)}{1.2.3} y^3$$

$$+ \frac{\frac{m}{\mu}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-1\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2}-9\right)}{1.2.3.4.5} y^5 \text{ &c.} \Big\}$$

II Cas. m impair, μ impair.

$$\frac{p^{\frac{m}{\mu}} - q^{\frac{m}{\mu}}}{2\sqrt{-1}} = \text{fin}\,\frac{m}{\mu}\Phi = \pm\left\{1 - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}}{1.2}y^2 + \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-4\right)}{1.2.3.4}y^4 - \frac{\frac{m^2}{\mu^2}\left(\frac{m^2}{\mu^2}-4\right)\left(\frac{m^2}{\mu^2}-16\right)}{1.2.3.4.5.6}y^6 \text{ \&c.}\right\}$$

§. 17. Il reſte à ôter l'ambiguité des ſignes dans le troiſième cas. Pour ſavoir quels ſont les ſignes que l'on doit employer, on remarquera que $\frac{p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}}}{2} = \text{cof}\,\frac{1}{2}\Phi = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \text{\&c.}) \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{m}{\mu}y \text{ \&c.}\right)$. Soit $y = \text{cof}\,\Phi = 0$, on aura $\text{cof}\,\frac{1}{2}\Phi = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, or $\Phi = \frac{\pi}{2}$, donc $\text{cof}\,\frac{\pi}{4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \text{cof}\,45°$, on aura donc ici $\text{cof}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $\text{fin}\,\frac{\pi}{4} = \text{fin}\,45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Maintenant on a $\text{cof}\,\frac{\pi}{4} = \text{cof}\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 - \text{fin}\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = 2\,\text{cof}\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 - 1$, donc $\text{cof}\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \text{cof}\,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})$, $\text{cof}\,\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}$, $\text{fin}\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$; $\text{fin}\,\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}$. On a de plus, $\text{cof}\,\frac{\pi}{8} = 2\,\text{cof}\left(\frac{\pi}{16}\right)^2 - 1$, $\text{cof}\left(\frac{\pi}{16}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \text{cof}\,\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}\right) = \frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{(2+\sqrt{2})}\right)$, $\text{cof}\,\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}\right)}$, $\text{fin}\,\frac{\pi}{16} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(2-\sqrt{(2+\sqrt{2})}\right)}$. Ce ſont donc les ſignes ſupérieurs qu'il faut prendre dans les formules précédentes.

§. 18. Les formules que nous venons de trouver peuvent ſe déduire immédiatement de celles que M. Euler a trouvées dans l'Intro-

duction à l'analyſe de l'infini, comme je vais le faire voir par un exemple, & cela ſervira à montrer comment on doit entendre les premières formules, & quel uſage légitime on doit en faire lorsque n eſt un nombre rompu. On a par ces formules, $\text{cof } 3\,\Phi = 4\,\text{cof}\,\Phi^3 - 3\,\text{cof}\,\Phi$, ou $\text{cof}\,\Phi = 4\,\text{cof}\,(\frac{1}{3}\Phi)^3 - 3\,\text{cof}\,\frac{1}{3}\Phi$. Soit $\text{cof}\,\Phi = y$, faiſons par la méthode du retour des ſuites, $\text{cof}\,\frac{1}{3}\Phi = Ay + By^3 + Cy^5 + Dy^7$ &c., l'équation $\text{cof}\,\Phi + 3\,\text{cof}\,\frac{1}{3}\Phi - 4\,\text{cof}\,(\frac{1}{3}\Phi)^3 = 0$, donnera en y ſubſtituant les valeurs,

$$\begin{array}{llllll} y & +3By^3 & +3Cy^5 & +3Dy^7 & & \\ +3A & -4A^3 & -12A^2B & -12A^2C & \text{\&c.} & = 0 \\ & & & -12AB^2 & & \end{array}$$

d'où l'on tire $A = -\frac{1}{3}$, $B = -\frac{4}{81}$, $C = -\frac{16}{9.81}$, $D = -\frac{(16)^2}{3(81)^2}$ &c. On a donc $\text{cof}\,\frac{1}{3}\Phi = -\left(\frac{1}{3}y + \frac{4}{81}y^3 + \frac{16}{9.81}y^5 + \frac{(16)^2}{3.(81)^2}y^7 \text{ \&c.}\right)$, ce qui coïncide avec la formule $\text{cof}\,\frac{1}{3}\Phi = -\left(\frac{1}{3}y + \frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{9})}{1.2.3}y^3 + \frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{9})(9-\frac{1}{9})}{1.2.3.4.5}y^5 + \frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{9})(9-\frac{1}{9})(25-\frac{1}{9})}{1.2.3.4.5.6.7}y^7 \text{ \&c.}\right)$ trouvée ci-deſſus par le cas II du § 12. Pour avoir maintenant la valeur de $\text{ſin}\,\frac{1}{3}\Phi$, on emploiera la formule $\text{ſin}\,\frac{1}{3}\Phi = \sqrt{(1 - \text{cof}\,\frac{1}{3}\Phi^2)}$, ou la formule $\text{ſin}\,\Phi = \text{ſin}\,\frac{1}{3}\Phi\,(4\,\text{cof}\,\frac{1}{3}\Phi^2 - 1)$, en employant la méthode du retour des ſuites. On aura $\text{ſin}\,\frac{1}{3}\Phi = 1 - \frac{1}{2.9}y^2 - \frac{35}{8.3.81}y^4 - \frac{1001}{16(81)^2}y^6$ &c., ce qui coïncide avec $\text{ſin}\,\frac{1}{3}\Phi = 1 - \frac{\frac{1}{9}}{1.2} - \frac{\frac{1}{9}(4-\frac{1}{9})}{1.2.3.4}y^4 - \frac{\frac{1}{9}(4-\frac{1}{9})(16-\frac{1}{9})}{1.2.3.4.5.6}y^6$ &c. formule trouvée dans le cas II du § 16. On a maintenant, $\text{cof}\,\frac{2}{3}\Phi = 2\,\text{cof}\,\frac{1}{3}\Phi^2 - 1 = -1 + \frac{2}{9}y^2 + \frac{16}{3.81}y^4 + \frac{224}{(81)^2}y^6 + \frac{1280}{9(81)^2}y^8$ &c.

ce

ce qui coïncide avec la formule $\text{cof}\,\frac{2}{3}\Phi = -\left(1 - \frac{\frac{4}{9}}{1.2}y^2 - \frac{\frac{4}{9}(4-\frac{4}{9})}{1.2.3.4}y^4 - \frac{\frac{4}{9}(4-\frac{4}{9})(16-\frac{4}{9})}{1.2.3.4.5.6}y^6 \text{ &c.}\right)$ trouvée dans le cas I. du §. 12. On aura enfin $\text{fin}\,\frac{2}{3}\Phi = 2\,\text{fin}\,\frac{1}{3}\Phi\,\text{cof}\,\frac{1}{3}\Phi = -\frac{2}{3}y - \frac{5}{81}y^3 - \frac{77}{4.9.81}y^5 - \frac{2431}{8.3.(81)^2}y^7$ &c. ce qui coïncide avec la formule $\text{fin}\,\frac{2}{3}\Phi = -\left(\frac{2}{3}y + \frac{\frac{2}{3}(1-\frac{4}{9})}{1.2.3}y^3 + \frac{\frac{2}{3}(1-\frac{4}{9})(9-\frac{4}{9})}{1.2.3.4.5}y^5 + \frac{\frac{2}{3}(1-\frac{4}{9})(9-\frac{4}{9})(25-\frac{4}{9})}{1.2.3.4.5.6.7}y^7 \text{ &c.}\right)$ trouvée dans le cas I. du §. 16.

§. 19. Pour ce qui regarde le cas III., suppoſons $\frac{m}{\mu} = \frac{1}{4}$, on a par les formules de M. Euler, $\text{cof}\,\Phi = 8\,\text{cof}\,(\frac{1}{4}\Phi)^4 - 4\,\text{cof}\,(\frac{1}{4}\Phi)^2 + 1$, ou en faiſant $\text{cof}\,\Phi = y$, $1 - y - 8\,\text{cof}\,(\frac{1}{4}\Phi)^2 + 8\,\text{cof}\,(\frac{1}{4}\Phi)^4 = 0$. Je fais $\text{cof}\,\frac{1}{4}\Phi = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 + Fy^5$ &c., & j'ai en ſubſtituant les valeurs dans l'équation précédente,

$$\begin{array}{llllll}
1 & -y & -16ACy^3 & -16ADy^3 & -16AEy^4 & -16AFy^5 \\
-8A^2 & -16AB & -8B^2 & -16BC & -16BD & -16BE \\
+8A^4 & +32A^3B & +32A^3C & +32A^3D & -8C^2 & -16CD \\
 & & +48A^2B^2 & +96A^2BC & +32A^3E & +32A^3F \\
 & & & +32AB^3 & +96A^2BD & +96A^2BE \\
 & & & & +48A^2C^2 & +96A^2CD \\
 & & & & +96AB^2C & +96AB^2D \\
 & & & & +8B^4 & +96ABC^2 \\
 & & & & & +32B^3C
\end{array}$$

$$= 0,$$

On tire de là $8A^4 - 8A^2 + 1 = 0$, ou $A = \pm\sqrt{(2 \pm \sqrt{2})}$. On aura enſuite $B = \pm\sqrt{(2 \mp \sqrt{2})}$, $C = -\frac{A}{32}$, $D = \frac{5B}{32}$,

$E = -\frac{21A}{32.64}$, $F = \frac{143B}{32.64}$ &c. ce qui donne $\text{cof}\frac{1}{4}\Phi = A\left(1 - \frac{1}{32}y^2 - \frac{21}{32.64}y^4 \text{ &c.}\right) + B\left(y + \frac{5}{32}y^3 + \frac{143}{32.64}y^5 \text{ &c.}\right)$, ce qui coïncide avec les formules du § 15; $\text{cof}\frac{1}{4}\Phi = \pm\frac{2\sqrt{(2\pm\sqrt{2})}}{2}\left(1 - \frac{\frac{1}{16}}{2}y^2 - \frac{\frac{1}{16}\cdot\frac{63}{16}}{2.3.4}y^4 \text{ &c.}\right) \pm \frac{2\sqrt{(2\mp\sqrt{2})}}{2}\left(\frac{1}{4}y + \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{15}{16}}{2.3}y^3 + \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{143}{16}}{2.3.4.5}y^5 \text{ &c.}\right)$.

§. 20. On tire de la valeur précédente de $\text{cof}\frac{1}{4}\Phi$, $\text{fin}^2(\frac{1}{4}\Phi)^2 = (1 - A^2)\left(1 - \frac{2AB}{1-A^2}y + \frac{2A^2}{32(1-A^2)}y^2 - \frac{8AB}{32(1-A^2)}y^3 - \frac{B^2}{1-A^2} + \frac{40A^2}{32.64(1-A^2)}y^4 - \frac{224AB}{32.64(1-A^2)}y^5 \text{ &c.}\right)$. Je fais $\text{fin}\frac{1}{4}\Phi = -\frac{10B^2}{32(1-A^2)}\sqrt{(1-A^2)}\,(1 + ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 \text{ &c.})$, ce qui donne, $\text{fin}(\frac{1}{4}\Phi)^2 = (1 - A^2)(1 + 2ay + 2by^2 + 2cy^3 + 2dy^4 + 2ey^5 \text{ &c.})$.

$$+ a^2 \quad + 2ab + 2ac + 2ad$$
$$+ bb \quad + 2bc$$

On tire de là $a = -\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{8}$, $b = -\frac{1}{32}$, $c = -\frac{5\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{4.64}$, $d = -\frac{21}{32.64}$, $e = -\frac{143\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{256.64}$ &c., ce qui donne, $\text{fin}\frac{1}{4}\Phi = \sqrt{(1-A^2)}\left(1 - \frac{1}{32}y^2 - \frac{21}{32.64}y^4 \text{ &c.}\right) - \frac{\sqrt{(1-A^2)}\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{2}\left(\frac{1}{4}y + \frac{5}{2.64}y^3 + \frac{143}{128.64}y^5 \text{ &c.}\right) = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}\left(1 - \frac{1}{32}y^2 - \frac{21}{32.64}y^4 \text{ &c.}\right) - \frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}\left(\frac{1}{4}y + \frac{5}{4.32}y^3 + \frac{143}{4.32.64}y^5 \text{ &c.}\right)$, ce qui coïn-

cide avec la formule du § 16; ſin $\frac{1}{4}\Phi = \pm\frac{\sqrt{(2\mp\sqrt{2})}}{2}\left(1 - \frac{\frac{1}{16}}{1.2}y^2 - \frac{\frac{1}{16}\cdot\frac{63}{16}}{1.2.3.4}y^4 \text{ &c.}\right) \mp \frac{\sqrt{(2\pm\sqrt{2})}}{2}\left(\frac{1}{4}y + \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{15}{16}}{1.2.3}y^3 + \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{15}{16}\cdot\frac{143}{16}}{1.2.3.4.5}y^5 \text{ &c.}\right)$. Ceci prouve la bonté de nos formules, & fait voir en même temps quel uſage on doit faire des formules que M. Euler a données dans l'Introduction à l'analyſe de l'infini, pour en tirer tous les cas poſſibles. Ces formules étant tirées de la ſuppoſition que l'on cherche les ſinus & coſinus des arcs multiples par le moyen des ſimus & coſinus des arcs ſoumultiples; pour trouver au moyen de ces mêmes formules les ſoumultiples par les multiples, il faut employer la méthode du retour des ſuites.

§. 21. Du reſte, la détermination des ſignes du §. 17. ne vaut que pour la ſuppoſition des plus petites valeurs. Si nous avions pris pour $y = 0$, $\Phi = \frac{3\pi}{2}$, nous aurions trouvé $\text{cof}\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, ſin $\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{cof}\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{2})}$, ſin $\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{2})}$, & ainſi de ſuite. Les ſignes ſe déterminant ſuivant les valeurs de m & de μ, il ne peut y avoir de difficulté dans aucun cas.

OBSERVATIONS
ſur une diſcuſſion relative à la Théorie de la réſiſtance des milieux.

PAR M. JEAN TREMBLEY *).

On trouve dans l'Ouvrage que M. de la Grange a publié ſous le titre de Théorie des fonctions analytiques, le paſſage ſuivant pp. 5 & 6.

„Newton n'avoit d'abord employé que la ſimple conſidération des ſéries pour réſoudre le problème troiſième du ſecond livre des Principes, dans lequel il cherche la loi de la réſiſtance néceſſaire pour qu'un corps peſant décrive librement une courbe donnée; problème qui dépend naturellement du calcul différentiel ou fluxionel. On ſait que Jean Bernoulli trouva cette ſolution fauſſe, en la comparant avec celle qui réſulte du calcul différentiel, & ſon neveu Nicolas prétendit que l'erreur venoit de ce que Newton avoit pris le troiſième terme de la ſérie convergente dans laquelle il réduiſit l'ordonnée de la courbe donnée, pour la différentielle ſeconde de cette ordonnée, & le quatrième pour la différentielle troiſième, au lieu que ſuivant les règles du calcul différentiel, ces termes ne ſont, l'un que la moitié, l'autre que la ſixième partie des mêmes différentielles. (Voyez les Mémoires de l'Académie des Sciences de 1711 & le T. 1. des Oeuvres de Jean Bernoulli.) Newton ſans répondre abandonna entièrement ſa première méthode, &

*) Lu à l'Académie le 23 novembre 1797.

donna dans la ſeconde édition des Principes une ſolution différente du même problème fondée ſur la méthode même du calcul différentiel. Depuis, on n'a plus parlé de l'application de la méthode des ſéries à ce genre de problèmes, que pour avertir de la mépriſe dans laquelle Newton étoit tombé, & faire ſentir la néceſſité d'avoir égard à l'obſervation de Nicolas Bernoulli. (Voyez l'Encyclopédie aux articles *Différentiel*, *Force.*). Mais nous ferons voir que cette mépriſe ne vient point du fond de la méthode, mais ſimplement de ce que Newton n'a pas tenu compte de tous les termes auxquels il fallcit avoir égard, & nous rectifierons de cette manière ſa première ſolution dont aucun des commentateurs des Principes n'a fait mention."

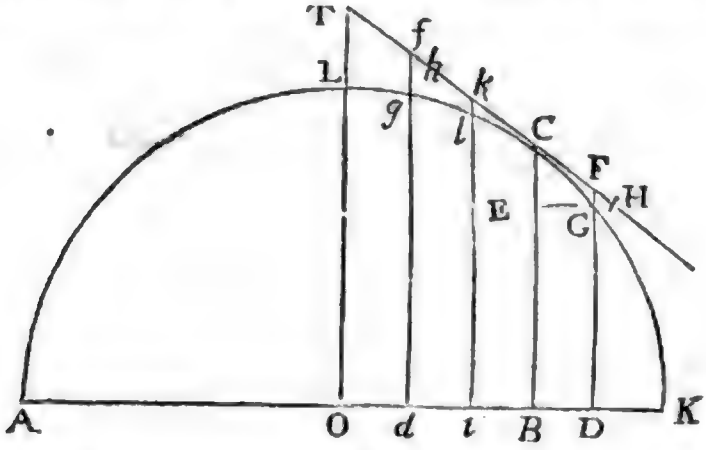
M. de la Grange donne cette discuſſion p. 244-250, & la termine par ces mots.

„Comme Newton n'eſt parvenu à ce dernier réſultat, (le vrai réſultat) qu'en ſuivant une marche analogue à celle du calcul différentiel, nous avons cru qu'il n'étoit pas inutile de faire voir comment la méthode des ſéries pouvoit y conduire, & qu'on nous ſauroit gré d'éclaircir, en même temps, un point d'analyſe ſur lequel les plus grands géomètres ſe ſont trompés, & qui peut intéreſſer l'hiſtoire de la naiſſance des nouveaux calculs."

La lecture de l'Analyſe de M. de la Grange ayant excité des doutes dans mon eſprit, j'ai étudié avec ſoin les deux ſolutions de Newton, & j'ai cru voir que la critique de M. de la Grange n'eſt pas légitime, que l'erreur de Newton eſt réellement dûe à la cauſe qu'avoit aſſignée Nicolas Bernoulli, & par conſéquent que M. d'Alembert avoit eu raiſon d'en parler ſur ce ton dans l'Encyclopédie. Je ſuis revenu plus d'une fois ſur cet objet, ſachant avec quelle circonſpection doit procéder un ſimple amateur des mathématiques, lorsqu'il s'agit d'attaquer la déciſion d'un homme tel que M. de la Grange. Mais ſi l'autorité d'un grand géomètre m'effrayoit, j'étois raſſuré par l'autorité de deux grands géomètres, & je diſois avec Ovide: *ſæpe premente Deo, fert Deus alter opem.* Quoi qu'il en ſoit, comme la vérité doit être le ſeul objet de

nos recherches, & que ſi je me trompe, il ſera fort aiſé de me redreſſer, j'ai cru devoir expoſer ici mes doutes.

§. 1. Voici d'abord l'énoncé du problème que ſe propoſe Newton. „*Tendat uniformis vis gravitatis directe ad planum horiſontis, ſitque reſiſtentia ut medii denſitas et quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii denſitas in locis ſingulis quæ faciat ut corpus in data quavis linea moveatur, tum corporis velocitas et medii reſiſtentia in iisdem locis.*" La Fig. 1. repréſente la figure de la première ſolution de Newton,

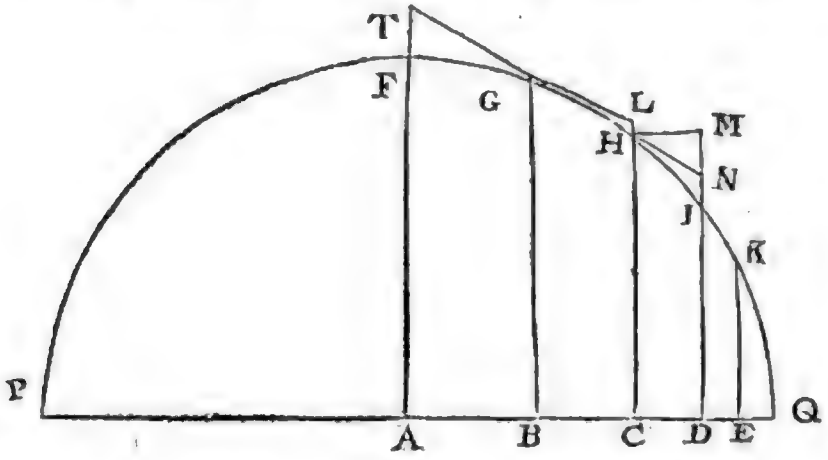


ALK eſt un plan perpendiculaire au plan du papier, ACK une ligne courbe, C le corps qui ſe meut ſur cette ligne, FCf une tangente en C; CG, Cg des arcs très-petits parcourus par le corps; CH, Ch, de petites lignes droites égales que le corps auroit parcouru pendant deux inſtans conſécutifs, s'il n'y avoit eu ni gravité ni réſiſtance du milieu. Des points G, g, abaiſſons les perpendiculaires GD, gd, qui rencontrent la tangente en F & f; la réſiſtance du milieu fait que le corps au lieu de décrire CH, décrit ſeulement CF, & la force de la gravité transporte le corps de F en G; HF eſt donc proportionelle à la réſiſtance & FG à la gravité; appelant donc R la réſiſtance & g la gravité on a $\frac{R}{g} = \frac{HF}{FG}$. C'eſt la première formule que donne Newton. Sans nous arrêter à la manière un peu forcée dont Newton parvient à ce réſultat, en ſuppoſant un mouvement d'abord direct, puis

rétrograde, nous nous contenterons de remarquer que cette formule eſt conforme à ce que les géomètres modernes ont donné là-deſſus. Voyez entre autres le Mémoire de M. de Borda (Mém. de Paris 1769). Car on a $FH = R\,dt^2$, $FG = g\,dt^2$, en appelant dt l'élément du temps, ce qui donne $\frac{R}{g} = \frac{FH}{FG}$. Or Newton ſuppoſe $Cf - CF = fk = 2fh = 2FH$, parce qu'il prend $HF = fh$. Appelant dt le temps que met le corps à parcourir CF ou Ck, il auroit parcouru CH dans le temps $dt + ddt$, & Cf dans le temps $dt + 2ddt$, donc $Cf : CF = dt + 2ddt : dt$, $Cf - CF : CF = 2ddt : dt$, $\frac{Cf - CF}{2} = \frac{CF\,ddt}{dt}$, mais $FG = g\,dt^2$, $\frac{dFG}{FG} = \frac{2\,ddt}{dt}$, $\frac{ddt}{dt} = \frac{dFG}{2FG}$, donc $\frac{Cf - CF}{2} = \frac{CF \cdot dFG}{2FG}$, $\frac{R}{g} = \frac{CF \cdot dFG}{2FG^2}$. Or par les dénominations de Newton, on a $FG = kl = 2\,dFG$, donc $dFG = \frac{FG - kl}{2}$, donc enfin $\frac{R}{g} = \frac{CF(FG - kl)}{4FG^2}$. C'eſt la formule que trouve Newton à la fin du Cor. 2. Le procédé que j'ai ſuivi eſt exactement celui de M. de Borda dans le Mémoire cité, d'où il ſuit que la formule de Newton à laquelle il parvient d'une manière différente, eſt légitime & parfaitement conforme à celle qu'on obtient par les principes du calcul différentiel. Il me ſemble qu'il réſulte de là que M. de la Grange ſe trompe lorsqu'il dit p. 247 que cette formule n'eſt pas légitime, & que c'eſt là qu'il faut chercher l'erreur de Newton.

§. 2. Venons maintenant à la ſeconde ſolution de Newton. Soit PTQ un plan perpendiculaire à celui du papier, $PFHQ$ une ligne courbe qui le rencontre aux points P & Q; G, H, I, K quatre lieux du corps qui ſe meut dans cette courbe de F en Q; GB, HG, ID, KE quatre ordonnées parallèles abaiſſées de ces points ſur l'horizon, & rencontrant la ligne PQ en B, C, D, E; ſoient BC, CD,

DE, les distances des coordonnées égales entre elles. Aux points G & H de la courbe, menez les tangentes GL, HN qui rencontrent en L & N les ordonnées prolongées, & achevez le parallélogramme $HCDM$. Cela posé, Newton qui étoit parti dans la première solution de la formule $\mathrm{d}\,\mathrm{d}s = p\,\mathrm{d}t^2$, s étant l'espace, t le temps, p la force accélératrice, part dans celle-ci de la formule $\mathrm{d}v = p\,\mathrm{d}t$ qui



résulte de la première, v étant la viteſſe. Soit v la viteſſe détruite par la réſiſtance, u la viteſſe dûe à la gravité, on a $\mathrm{d}v = R\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}u = g\,\mathrm{d}t$, donc $\frac{R}{g} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$. Soit maintenant V la viteſſe totale, on a $V = -\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$. Donc $\mathrm{d}U = -\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t^2}$. C'eſt là l'élément total de la viteſſe, lequel provient, dit Newton, de la réſiſtance qui retarde le corps, & de la gravité qui l'accélère dans la deſcente & le retarde dans la montée. Mais ſi $GH = \mathrm{d}s$, on a LH égal à l'eſpace que fait parcourir le gravité. Soit $CH = y$ on a $LH = \mathrm{d}\,\mathrm{d}y$, & $\mathrm{d}\,\mathrm{d}y = g\,\mathrm{d}t^2$, donc $g\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. Cette force $\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ décompoſée dans le ſens de la tangente devient $\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, c'eſt la partie de $\mathrm{d}V$ qui eſt dûe à l'action de la gravité, donc le reſte $\frac{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t^2}$ eſt dû à l'action de la réſiſtance; on aura donc $\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t^2}$ & $\frac{R}{g} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$

=

$= \frac{ds\,ddt}{ds\,ddy} = \frac{ds\,d^3y}{2\,ddy^2}$ (en mettant pour $\frac{ddt}{dt}$ ſa valeur $\frac{d^3y}{2\,ddy}$ que nous avons obtenue dans le § préc. où nous avons appelé FG ce que nous appelons ici ddy). Ainſi la formule générale que trouve Newton $\frac{R}{\varepsilon} = \frac{\frac{t}{T}GH - HI + \frac{2MI\,.\,NI}{HI}}{2NI}$ eſt bonne, car on a $GH = ds$, $HI = ds + dds$, $MI = dy$, $2NI = ddy$, $\frac{t}{T} = \frac{dt + ddt}{dt} = 1 + \frac{ddt}{dt} = 1 + \frac{d^3y}{2\,ddy}$. Donc $\frac{R}{\varepsilon} = \frac{\left(1 + \frac{d^3y}{2\,ddy}\right)ds - ds - dds + \frac{dy\,ddy}{ds + dds}}{ddy} =$ (à cauſe de $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $ds\,dds = dy\,ddy$ parce qu'on fait dx conſtant) $\frac{ds\,d^3y}{2\,ddy^2}$, comme ci-deſſus. D'où vient donc que Newton trouve un réſultat différent? C'eſt qu'au lieu de faire $\frac{ddt}{dt} = \frac{d^3y}{2\,ddy}$ il fait $\frac{ddt}{dt} = \frac{d^3y}{3\,ddy}$, comme nous le verrons bientôt. Il me ſuffit d'avoir montré qu'en conſervant la même valeur de $\frac{ddt}{dt}$, les deux ſolutions reviennent au même.

§ 3. Voyons maintenant quelles transformations Newton fait ſubir aux formules générales qu'il a trouvées. Dans la première ſolution, Newton fait $Ok = n$, $OB = a$, $BC = e$. Nous avons fait ici $a = x$, $e = y$. Il fait enſuite $DG = y - Qo - Roo - So^3$ &c. o étant une quantité très-petite qui correſpond à dx. Il fait de plus, $FG + kl = 2Roo$, $FG - kl = 2So^3$, ce qui donne $FG = Roo + So^2$, $kl = Roo - So^2$. Donc $kl : FG = Roo - So^3 : Roo + So^3 = 1 : \frac{Roo + So^3}{Roo - So^3} = 1 : 1 + \frac{2So^3}{Roo} = Roo : Roo + 2So^3$. Or $\sqrt{kl} : \sqrt{FG} = dt - ddt : dt = dt : dt + ddt = 1 : 1 + \frac{ddt}{dt} = 1 : \sqrt{\left(1 + \frac{2So^3}{Roo}\right)}$

$= 1 : 1 + \frac{So^3}{Roo}$. Donc $\frac{ddt}{dt} = \frac{So^3}{Roo}$, ou $\frac{ddt + dt}{dt} = \frac{t}{T}$ $= \frac{Roo + So^3}{Roo} = \frac{R + So}{R}$. Telle eſt la valeur de $\frac{t}{T}$ tirée de la première ſolution de Newton. Subſtituons-la dans la formule de la ſeconde ſolution, laquelle eſt $\frac{R}{g} = \frac{\frac{t}{T} GH - HI + \frac{2MI.NI}{HI}}{2NI}$, en obſervant que dans la ſeconde ſolution Newton fait $GH = oV(1 + QQ) - \frac{QRoo}{V(1+QQ)}$, $HI = oV(1 + QQ) + \frac{QRoo}{V(1+QQ)}$, $MI = Qo + Roo$ &c. $NI = Roo + So^3$ &c. On aura en ſubſtituant toutes ces valeurs, $\frac{R}{g} =$

$$\frac{\left(1 + \frac{So}{R}\right)\left(oV(1+QQ) - \frac{QRoo}{V(1+QQ)}\right) - oV(1+QQ) - \frac{QRoo}{V(1+QQ)} + \frac{2QRo^3}{oV(1+QQ)}}{2Roo}$$

$=$ (en négligeant les o^3) $\frac{SV(1+QQ)}{2R^2}$, comme le trouve Newton dans ſa première ſolution, & comme nous l'avons trouvé ci-deſſus.

§. 4. Dans la ſeconde ſolution Newton fait $LH : NI = T^2 : t^2 = Roo : Roo + 3So^3$. Donc $T : t = Roo : Roo + \frac{3}{2} So^3$. On aura donc en ſubſtituant, $\frac{R}{g} =$

$$\frac{\left(1 + \frac{3So}{2R}\right)\left(oV(1+QQ) - \frac{QRoo}{V(1+QQ)}\right) - oV(1+QQ) - \frac{QRoo}{V(1+QQ)} + \frac{2Qo.Roo}{oV(1+QQ)}}{2Roo}$$

$= \frac{3SV(1+QQ)}{4R^2}$, comme le trouve Newton dans ſa ſeconde ſolution. Il eſt donc évident que la différence des deux formules transformées vient uniquement de la différente valeur que Newton donne à $\frac{t}{T}$ ou à $\frac{V(kl)}{V(FG)}$ ou à $\frac{V(LH)}{V(NI)}$ dans les deux ſolutions. Dans la première ſolution on a $kl : FG = Roo - So^3 : Roo + So^3$, & dans la ſe-

conde on a $LH : NI = Roo - 2So^3 : Roo + So^3$. Cherchons l'origine de cette différence.

§ 5. Reprenons la formule de la seconde ſolution de Newton laquelle eſt $\frac{\left(1+\frac{ddz}{dz}\right)GH-HI+\frac{2MI.NI}{HI}}{2NI} = \frac{R}{g} = \frac{GH-HI+\frac{2MI.NI}{HI}}{2NI} - \frac{\frac{ddz}{dz}.GH}{2NI}$. Or ſoit $GH = ds$, $HI = ds + dds$, $MI = dy$, $2NI = ddy$, on aura $\frac{2MI.NI}{HI} = \frac{dy\,ddy}{ds} = dds$ (en négligeant les quantités du troiſième ordre). Donc $GH - HI = dds$, & $GH - HI + \frac{2MI.NI}{HI} = o$. Donc $\frac{R}{g} = -\frac{ddz\,ds}{dz\,ddy}$, ce qui eſt préciſément la formule trouvée plus haut par la première ſolution au ſigne près, ce qui vient de ce qu'ici ds eſt négatif. Or en vertu de la première ſolution, l'eſpace parcouru dans la direction de la tangente eſt $CH - FH = CF$, donc l'eſpace parcouru dans la direction de l'axe des x eſt $\frac{CF.dx}{ds}$, & dans la direction de l'axe des y eſt $\frac{CF.dy}{ds} - FG$. Faiſant donc $\frac{CF.dx}{ds}$ égal à la lettre o, on aura $CF\frac{dy}{ds} - FG = Qo - Ro^2 - So^3$ &c. ou en faiſant $CF = ds$, on aura $dx = o$, $dy - FG = Q\,dx - Ro^2 - So^3$ &c. Donc $Q = \frac{dy}{dx}$ & $FG = Ro^2 + So^3$ &c. Si l'on prend maintenant o ou dx négatif, on a $kl = Ro^2 - So^3$, comme le dit Newton, & comme nous l'avons trouvé ci-deſſus. Donc $kl : FG = Ro^2 - So^3 : Ro^2 + So^3 = Ro^2 : Ro^2 + 2So^3$. Ce procédé eſt, comme l'on voit tout-à-fait dans les principes du calcul différentiel. Si, comme le fait Newton dans ſa ſeconde ſolution, on prend quatre ordonnées équidiſtantes

on aura

$$\begin{array}{l|l|l}
x+o & y+Qo-Ro^2-So^3=y' & \\
x & y \quad\quad =y' & y'-y''=Qo-Ro^2-So^3 \\
x-o & y-Qo-Ro^2+So^3=y'' & y''-y'''=Qo+Ro^2-So^3 \quad y'-2y''+y'''=-2Ro \\
x-2o & y-2Qo-4Ro^2+8So^3=y''' & y'''-y^{iv}=Qo+3Ro^2-7So^3 \quad y''-2y'''+y^{iv}=-2Ro^2+6So^3
\end{array}$$

Donc $y'' - \frac{(y'+y''')}{2} = Ro^2$, $y''' - \frac{(y''+y^{iv})}{2} = Ro^3 - 3So^3$, en adoptant la manière de calculer les flèches de la seconde solution de Newton. Donc $kl : FG = Ro^3 - 3So^3 : Ro^2 = Ro^2 : Ro^2 + 3So^3$, comme le trouve Newton. La différence des deux solutions dérive donc uniquement de la manière de calculer les secondes différences ou d'après les principes du calcul différentiel, ou d'après ceux de la théorie des suites. Donc la formule principale ayant été dans la seconde solution transformée d'après les principes de la théorie des suites, il est clair qu'en faisant dans les exemples, des substitutions conformes à cette théorie des suites, on doit trouver un résultat juste, au lieu que dans la première solution, Newton ayant transformé la formule principale d'après les principes du calcul différentiel, il est clair qu'en faisant dans les exemples des substitutions à la théorie des suites, on doit trouver un résultat faux, & pour que ce résultat devienne juste, il faut y faire des substitutions conformes aux principes du calcul différentiel. M. de la Grange dit p. 246 qu'il est remarquable qu'en faisant ces dernières substitutions on obtient un résultat exact. Ce que je viens de dire fait voir qu'il n'y a rien là de singulier, & que c'est une suite nécessaire de la méthode qu'avoit employée Newton.

§ 6. Il paroît que Newton avoit cru avoir déterminé *kl* & *FG* dans sa première solution d'une manière conforme à la méthode des suites, puisque lorsque Jean Bernoulli eut découvert que les résultats des exemples étoient faux, au lieu de changer la substitution, & de la faire d'une manière analogue aux principes du calcul différentiel, il changea la détermination des lignes *kl* & *FG*, & la rendit conforme à la méthode des suites. Loin donc d'abandonner la méthode des suites dans sa seconde solution, & de se rapprocher des principes du calcul

différentiel, il a au contraire abandonné la marche du calcul différentiel pour ſe conformer entièrement à la méthode des ſuites. En effet, il y avoit deux manières de corriger la ſolution, ou en adaptant la ſubſtitution à la formule, & c'eſt ce qu'a fait Nicolas Bernoulli, ou en adaptant la formule à la ſubſtitution, & c'eſt ce qu'a fait Newton dans ſa ſeconde ſolution.

§ 7. Ce qui prouve clairement que Newton, en corrigeant ſa ſolution, ne prétendoit point abandonner la méthode des ſuites, c'eſt qu'il laiſſe ſubſiſter en entier dans ſa ſeconde ſolution le Cor. 111 de la première, lequel corollaire contient le principe de la méthode des ſuites. „*Et hinc ſi curva linea definiatur per relationem inter baſem ſeu abſciſſam et ordinatam applicatam* (*ut moris eſt*) *et valor applicatæ reſolvatur in ſeriem convergentem, Problema per primos ſeriei terminos expedite ſolvetur.*" Si Newton, comme le dit M. de la Grange, eut entièrement abandonné ſa première méthode dans la ſeconde ſolution, il n'auroit pas répété ce corollaire en autant de termes, & auroit averti que les termes de la ſuite devoient être diſtingués des différentielles dont ils n'étoient que des ſoumultiples.

§ 8. Ce qui confirme ceci, c'eſt que l'explication que Newton donne des différens termes de la ſuite qu'il emploie eſt la même dans les deux ſolutions. Il réduit en ſérie le radical $\sqrt{(ee - 2ao + oo)}$ $=$ (en obſervant que $nn = ee + aa$) $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{annno^3}{2e^5}$ &c. & voici ce qu'il ajoute." *Hujusmodi ſeries diſtinguo in terminos ſucceſſivos in hunc modum. Terminum primum appello in quo quantitas infinite parva* o *non extat; ſecundum in quo quantitas illa extat unius dimenſionis; tertium in quo extat duarum; quartum in quo trium eſt, et ſic in infinitum. Et primus terminus qui hic eſt* e *denotabit ſemper longitudinem ordinatæ inſiſtentis ad indefinitæ quantitatis initium; ſecundus terminus qui hic eſt* $\frac{ao}{e}$ *poſitionem tangentis ſemper determinat;*

terminus tertius qui hic eſt $\frac{nnoo}{2e^3}$ *determinat lineolam quæ jacet inter tangentem et curvam, adeoque determinat angulum contactus, ſeu curvaturam quam habet curva linea. Si lineola illa finitæ eſt magnitudinis, deſignabitur per terminum tertium una cum ſubſequentibus in infinitum. Et ſi lineola illa minuatur in infinitum, termini ſubſequentes evadent infinite minores tertio, ideoque negligi poſſunt. Terminus quartus qui hic eſt* $\frac{anno^3}{2e^5}$ *exhibet variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, et ſic deinceps. Unde obiter patet uſus non contemnendus harum ſerierum quæ pendent a tangentibus et curvatura curvarum.*" Toute cette explication eſt la même, de mot à mot, dans les deux ſolutions, ce qui prouve que l'uſage que prétendoit faire Newton de la doctrine des féries étoit le même. Et cette explication eſt abſolument contraire aux principes du calcul différentiel; Newton fait la petite ligne qui eſt entre la tangente & la courbe $FG = \frac{nnoo}{2e^3}$, tandis que dans les principes du calcul différentiel on a $FG = \frac{nnoo}{e^3}$, c'eſt-à-dire double. Il dit enſuite que le quatrième terme lequel eſt $\frac{anno^3}{2e^5}$ donne la variation de la courbure; or FG exprimant la courbure, on a d . $FG = \frac{anno^3}{2e^5}$, tandis que par le calcul différentiel on a d . $FG = \frac{3anno^3}{e^5}$ c'eſt-à-dire ſextuple. On obſervera que dans tout cet article Newton ne parle pas de proportionalité, & dit ſimplement: *Terminus quartus determinat variationem curvaturæ.* Tout ceci paroît confirmer ce que j'ai dit plus haut.

§ 9. On voit en même temps par là, que Newton a réellement opéré dans ſa ſeconde ſolution la correction que M. de la Grange a cherché à faire d'une manière différente, c'eſt-à-dire qu'il a rendu conforme à la méthode des ſuites la formule qui n'y étoit pas conforme, & il l'a fait en calculant les petites flèches d'après les coordon-

nées équidistantes, comme je l'ai montré en détail. Ainsi Newton a réellement fait ce qu'il restoit à faire suivant M. de la Grange, & il l'a fait sans aucune supposition arbitraire, & d'une manière différente de celle de M. de la Grange. Car au lieu que dans la première solution il fait $kl : FG = Roo - So^3 : Roo + So^3 = Roo : Roo + 2So^3$ il fait dans la seconde $LH : NI = Roo : Roo + 3So^3$. La différence entre les deux solutions de Newton vient donc uniquement du coëfficient numérique de o^3, qui est 2 dans l'une & 3 dans l'autre; & non pas, comme le veut M. de la Grange, de ce qu'on a négligé les θ^3 dans l'une & non pas dans l'autre. En effet, l'on voit qu'il n'est point question ici de dt^3, mais seulement de dx^3 que Newton appelle o^3. Comment pourroit-il être question de calculer des suites d'après dt, dt^2, dt^3, comme le fait M. de la Grange, puisque ce n'est pas dt qui est constant, mais dx. Il faut donc que les séries procèdent suivant les puissances de dx, comme le fait Newton, & non suivant les puissances de dt, comme le fait M. de la Grange. D'ailleurs la supposition d'après laquelle M. de la Grange corrige la solution de Newton paroît bien difficile à admettre. La supposition fondamentale étant que la résistance est proportionelle aux carrés des vitesses, ou, en supposant les espaces égaux, inversement proportionelle aux carrés des temps, c'est contredire la supposition que d'introduire dans le calcul le cube de ces mêmes temps.

§ 10. L'analyse que je viens de donner de ces deux solutions de Newton fait voir combien cette méthode qu'on appelle quelquefois synthétique, dont Newton conservoit la forme avec tant de soin, & que l'on a assimilée à l'Analyse des anciens, l'on voit, dis-je, combien cette méthode diffère peu dans la réalité de l'Analyse moderne, puisque Newton ne fait que représenter par des lignes ce que l'on représente par des quantités algébriques, mais les principes qui donnent les rapports ou les équations sont précisément les mêmes. On voit de plus, que cette lumière que l'on prétend accompagner toujours la première méthode, & dans laquelle on fait consister sa supériorité, n'est pas tou-

jours auſſi grande qu'on le prétend. Car la queſtion que nous venons d'examiner eſt, pour ainſi dire, la clef de la théorie de la réſiſtance des milieux, elle donne l'équation fondamentale du problème baliſtique. L'ouvrage de Newton a paru depuis plus d'un ſiècle, & l'on n'eſt pas encore d'accord ſur la marche qu'a ſuivie Newton, & ſur la différence eſſentielle de ſes deux ſolutions. Cette élégance dans la méthode nuit donc quelquefois à la clarté, & n'eſt pas à l'abri des paralogismes, puisque le grand Newton s'eſt trompé en ſuivant cette marche. Je reviendrai ailleurs ſur la marche de l'Analyſe des anciens, qui demande à être expoſée avec plus de détail qu'on ne l'a fait jusqu'ici ſi l'on veut donner des idées exactes de cette partie intéreſſante de l'hiſtoire des mathématiques.

§ 11. Je remarquerai, avant de finir, que la formule $\frac{R}{g} = -\frac{ds\,d^2y}{2\,dd\,y^2}$ que trouve M. de Borda dans le Mémoire cité, & qui eſt, comme nous l'avons fait voir, parfaitement conforme à la formule de Newton, que cette formule, dis-je, ne paroît pas pouvoir s'appliquer, comme le veut M. de Borda, à toute loi de réſiſtance, mais ſeulement à celle du carré des viteſſes que ce grand géomètre adopte enſuite, ainſi que Newton. En effet, M. de Borda appelant Gk l'effet de la réſiſtance, fait $Gk = R\,dt^2$, c'eſt-à-dire $R = \frac{dd\,s}{dt^2}$, s étant l'eſpace parcouru. Mais cette formule ſuppoſe que les eſpaces parcourus ou les eſpaces que la réſiſtance empêche de parcourir, ſont proportionels aux carrés des temps. Or cela eſt vrai quand il s'agit de la gravité, parce que les expériences de Galilée en ont démontré la vérité. Mais lorsqu'il s'agit d'une force dont la nature eſt abſolument inconnue, il ne nous eſt pas permis d'employer une pareille formule, parce qu'elle ne repoſeroit pas ſur l'expérience, & c'eſt-là cependant le cas du problème où l'on ſuppoſe inconnue la loi de la réſiſtance, puisque dans cette ſuppoſition l'on ignore ſi cette force priſe en ſens contraire, c'eſt-à-dire produiſant le mouvement au lieu de le détruire, feroit décrire

crire des eſpaces proportionels aux carrés ou à une puiſſance n du temps, & par conſéquent ſi au lieu de $\mathrm{d}\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}t^2$, il ne faudroit pas mettre $\mathrm{d}\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}t^n$. M. de la Grange dans l'ouvrage cité § 224, lorsqu'il traite du mouvement où les eſpaces ſont proportionels aux carrés des temps, fonde uniquement la poſſibilité de ce mouvement ſur l'expérience. „L'obſervation & l'expérience, dit-il, nous préſentent journellement ce mouvement dans les corps qui tombent par leur peſanteur, en faiſant abſtraction de la réſiſtance de l'air, & de toute autre cauſe étrangère d'altération." Ce grand géomètre admet par la même raiſon le mouvement où l'eſpace eſt ſuppoſé proportionel au temps. „L'obſervation & l'expérience, dit-il p. 223, nous font voir qu'un corps mis en mouvement d'une manière quelconque, ſi on écarte toutes les cauſes d'altération qui peuvent agir ſur lui, continue à ſe mouvoir de lui-même d'un mouvement rectiligne & uniforme." Il s'abſtient de la conſidération du mouvement où les eſpaces parcourus feroient proportionels aux cubes des temps, c'eſt-à-dire où l'on auroit $\mathrm{d}^3 s = p\,\mathrm{d}t^3$. La nature, dit-il, ne nous offre aucun mouvement ſimple de cette eſpèce, & nous ignorons ce que le coëfficient p pourroit repréſenter, en le conſidérant d'une manière abſolue & indépendante des viteſſes & des forces."

§ 12. Il ſuit de là que la formule $\mathrm{d}\mathrm{d}s = p\,\mathrm{d}t^2$ doit être conſidérée comme repoſant uniquement ſur l'expérience, & c'eſt à cela que revient l'opinion que M. Daniel Bernoulli a ſoutenue contre M. Euler. Et en effet les démonſtrations *a priori* qu'on pourroit citer, ſuppoſent toutes le fait en queſtion. La propoſition que les eſpaces parcourus ſont proportionels aux carrés des temps, paroît ſous une forme ſynthétique dans le Lemme 10. du Liv. 1. des Principes de Newton. Voici ce lemme. „*Spatia quæ corpus, urgente quacumque vi finita deſcribit, ſive vis illa determinata et immutabilis ſit, ſive eadem continuo augeatur, vel continuo diminuatur, ſunt ipſo motus initio in duplicata ratione temporum.*" La démonſtration de ce lemme eſt fondée ſur ce que les temps étant repréſentés par les abſciſſes d'une courbe, & les

viteſſes par les ordonnées de cette même courbe, les eſpaces ſeront repréſentés par les aires de la courbe, ce qui revient à la formule $ds = v\,dt$, qui donne $s = Sv\,dt$. Lorsque les temps ſont infiniment petits, c'eſt-à-dire au commencement du mouvement, ces eſpaces ſe confondent avec des triangles ſemblables, lesquels étant entre eux comme les carrés des côtés homologues, les eſpaces ſeront proportionels aux carrés des temps. Mais la ſuppoſition des triangles ſemblables emporte que les côtés homologues ſont proportionels, c'eſt-à-dire que les viteſſes ſont proportionelles aux temps, & la viteſſe étant repréſentée par le quotient de l'eſpace diviſé par le temps, dire que les viteſſes ſont proportionelles aux temps, c'eſt dire que les eſpaces diviſés par les temps ſont proportionels aux temps, c'eſt-à-dire que les eſpaces ſont proportionels aux carrés des temps, ce qui eſt préciſément la propoſition qu'il s'agiſſoit de prouver. Il ne ſeroit pas difficile de faire voir que les autres démonſtrations qu'on a eſſayé de donner de cette propoſition, ſuppoſent toujours le fait prouvé par Galilée, mais cela nous entraîneroit trop loin.

§ 13. Quand on veut faire uſage de la formule $dds = p\,dt^2$ dans les mouvemens variés, on forge une définition de nom, on appelle force accélératrice le quotient de l'eſpace diviſé par le temps, & l'on cherche une autre expreſſion de la force tirée des circonſtances du problème, mais comme on ne peut connoître une force que par ſes effets, on prend toujours pour ſon expreſſion l'eſpace diviſé par le carré du temps. Lorsque Newton a voulu prouver par le moyen mouvement de la Lune que la force de la gravité ſuivoit la loi inverſe du carré des diſtances, il a cherché l'eſpace que la gravité feroit parcourir à la Lune dans un certain temps, & l'eſpace qu'elle fait parcourir à un corps qui tombe ſur la Terre dans un certain temps. Or il a prouvé que la Lune parcouroit 15 pieds dans une minute ou 60 ſecondes (je prends des nombres ronds parce qu'il ne s'agit que d'un exemple) & qu'un corps qui tombe ſur la Terre parcourt 15 pieds dans une ſeconde. Soit maintenant L la force de la gravité à la diſtance de la Lune, T

la force de la gravité à la ſurface de la Terre, on aura, puiſqu'on exprime la force par l'eſpace diviſé par le carré du temps, $L : T = \frac{1}{60^2} : \frac{1}{1^2}$. Mais la diſtance de la Lune au centre de la Terre eſt égale à 60 rayons de la Terre, ou à 60 fois la diſtance d'un corps terreſtre au centre de la Terre. Soit donc D la diſtance de la Lune au centre de la Terre, d la diſtance d'un corps terreſtre à ce même centre, on aura $L : T = \frac{1}{D^2} : \frac{1}{d^2}$, c'eſt-à-dire que la gravité ſuit la loi inverſe du carré des diſtances. On voit donc qu'on ne cherche pas ce qu'eſt la force en elle-même, mais uniquement quelle eſt la valeur du quotient de l'eſpace diviſé par le carré du temps, quotient qui eſt conſtant lorsque la force eſt conſtante. Si les expériences de Galilée avoient prouvé que les eſpaces parcourus ſont comme les cubes des temps, on auroit appelé force le quotient de l'eſpace diviſé par le cube du temps. Cette théorie des forces ne ſuppoſe donc aucune connoiſſance métaphyſique de leur nature, mais uniquement le calcul déduit de l'obſervation des phénomènes, & l'on pourroit ſe paſſer du mot de force dans ces recherches, comme on peut ſe paſſer du mot d'infini dans le calcul différentiel, le mot de force n'étant ici qu'une expreſſion abrégée qui ne ſuppoſe point qu'on connoiſſe la nature de la cauſe qui fait qu'un corps parcourt un certain eſpace dans un certain temps. On peut appliquer ces conſidérations, *mutatis mutandis*, à toutes les forces dont il eſt queſtion en phyſique, à celles qui produiſent l'élaſticité, la cohéſion, la fluidité &c. Je reviendrai ailleurs ſur ce ſujet.

OBSERVATIONS SUR L'ANALYSE DE DIOPHANTE.

PAR M. JEAN TREMBLEY *).

Je ne rappellerai point ici les travaux des géomètres sur l'Analyse de Diophante. On sait que cette partie importante des mathématiques a fait dans ce siècle des progrès qui sont principalement dûs à MM. Euler & de la Grange. En dernier lieu M. le Gendre vient de l'enrichir de très-belles recherches, dignes du génie original de ce modeste & profond géomètre. Je n'ai point la prétention de dire des choses neuves après que de si grands maîtres ont parlé. Mais cette matière étant fort abstraite, & exigeant des efforts pénibles d'attention, j'ai cru qu'il ne seroit pas inutile de chercher à rendre la marche plus facile. Voici les réflexions qui se sont présentées à moi, & auxquelles je n'attache pas plus d'importance qu'elles ne méritent. Je traiterai d'abord de la manière de rendre rationelle la formule $\sqrt{(Bu^{(1)2} + 1)}$, B étant un nombre donné non carré, & $u^{(1)}$ étant un nombre entier. La route que j'ai suivie, m'a conduit aux fractions continues dont M. de la Grange, qui le premier a résolu ce problème, a fait un si bel usage.

§ 1. Soit l'équation $Bu^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$. Je fais $u^{(1)} = \frac{a^{(1)}t^{(0)} + \beta u^{(0)}}{M^{(0)}}$, $t^{(1)} = \frac{a^{(1)}t^{(0)} + bu^{(0)}}{M^{(0)}}$, $a^{(1)}$, β, $a^{(1)}$, b, $M^{(2)}$ étant

*) Lu à l'Académie le 6 décembre 1798.

des quantités conſtantes indéterminées, $u^{(2)}$, $t^{(2)}$ étant de nouvelles inconnues. Je ſubſtitue ces valeurs dans l'équation, & j'ai $(B\alpha^{(1)2} - a^{(1)2})\, t^{(2)2} + (2B\alpha^{(1)}\beta - 2a^{(1)}b)\, t^{(2)}u^{(2)} + (B\beta^2 - b^2)\, u^{(2)2} + M^{(2)2} = 0$. Pour faire évanouir le ſecond terme, je fais $B\alpha^{(1)}\beta = a^{(1)}b$, & l'équation devient $(B\beta^2 - b^2)\, u^{(2)2} + M^{(2)2} = (a^{(1)2} - B\alpha^{(1)2})\, t^{(2)2}$. Pour que cette équation ſoit de la forme de la première, il faut que b contienne B; je fais $b = Bc$, & j'ai $(B\beta^2 - B^2c^2)\, u^{(2)2} + M^{(2)2} = (a^{(1)2} - B\alpha^{(1)2})\, t^{(2)2}$, ou $B(\beta^2 - Bc^2)\, u^{(2)2} + M^{(2)2} = (a^{(1)2} - B\alpha^{(1)2})\, t^{(2)2}$. Il faut maintenant que $\beta^2 - Bc^2 = a^{(1)2} - B\alpha^{(1)2}$, & l'équation ſera $Bu^{(2)2} + \frac{M^{(2)2}}{a^{(1)2} - B\alpha^{(1)2}} = t^{(2)2}$. Comme B doit reſter indéterminé, on aura $\beta^2 = a^{(1)2}$, $c^2 = \alpha^{(1)2}$, ce qui donne $\beta = \pm a^{(1)}$, $c = \pm \alpha^{(1)}$, & l'équation $B\alpha^{(1)}\beta = a^{(1)}b$ devient $\pm B\alpha^{(1)}a^{(1)} = \pm B\alpha^{(1)}a^{(1)}$, équation identique pourvu qu'on prenne à la fois les ſignes ſupérieurs ou les ſignes inférieurs dans les valeurs de β & de c. On aura donc $u^{(1)} = \frac{\alpha^{(1)}t^{(2)} \pm a^{(1)}u^{(2)}}{M^{(2)}}$, $t^{(1)} = \frac{a^{(1)}t^{(2)} \pm B\alpha^{(1)}u^{(2)}}{M^{(2)}}$. Dans ces expreſſions il faudra prendre à la fois les ſignes ſupérieurs ou les ſignes inférieurs. Faiſons maintenant $M^{(2)} = a^{(1)2} - B\alpha^{(1)2}$, notre équation ſera $Bu^{(2)2} + M^{(2)} = t^{(2)2}$, & l'on aura $u^{(1)} = \frac{\alpha^{(1)}t^{(2)} \pm a^{(1)}u^{(2)}}{a^{(1)2} - B\alpha^{(1)2}}$, $t^{(1)} = a^{(1)}t^{(2)} \pm \frac{B\alpha^{(1)}u^{(2)}}{a^{(1)2} - B\alpha^{(1)2}}$, d'où l'on tire, $u^{(2)} = \pm (a^{(1)}u^{(1)} - \alpha^{(1)}t^{(1)})$, $t^{(1)} = a^{(1)}t^{(1)} - B\alpha^{(1)}u^{(1)}$.

§ 2. On aura en procédant de même, & faiſant $u^{(2)} = \frac{\alpha^{(2)}t^{(1)} \pm a^{(2)}u^{(1)}}{M^{(1)}}$, $t^{(2)} = \frac{a^{(2)}t^{(1)} \pm B\alpha^{(2)}u^{(1)}}{M^{(1)}}$, l'équation $Bu^{(3)2} + \frac{M^{(1)2}M^{(1)}}{a^{(2)2} - B\alpha^{(2)2}} = t^{(2)2}$, & faiſant $a^{(2)2} - B\alpha^{(2)2} = M^{(3)}M^{(2)}$, on a $Bu^{(3)2} + M^{(3)} = t^{(3)2}$, où $M^{(3)} = \frac{a^{(2)2} - B\alpha^{(2)2}}{M^{(2)}} = \frac{a^{(2)2} - B\alpha^{(2)2}}{a^{(1)2} - B\alpha^{(1)2}}$.

Donc $u^{(3)} = \pm \frac{a^{(2)} u^{(2)} - \alpha^{(2)} t^{(2)}}{M^{(2)}}$, $t^{(3)} = \frac{a^{(2)} t^{(2)} - B\alpha^{(2)} u^{(2)}}{M^{(2)}}$. Je fais enſuite $u^{(3)} = \frac{\alpha^{(1)} t^{(4)} \pm a^{(1)} u^{4}}{M^{(4)}}$, $t^{(3)} = \frac{a^{(1)} t^{(4)} \pm B\alpha^{(1)} u^{(4)}}{M^{(4)}}$, & j'obtiens l'équation, $B u^{(4)2} + \frac{M^{(4)2} M^{(1)}}{a^{(1)2} - B\alpha^{(1)2}} = t^{(4)2}$, & faiſant $a^{(3)2} - B\alpha^{(3)2} = M^{(4)} M^{(3)}$, l'équation deviendra $B u^{(4)2} + M^{(4)} = t^{(4)2}$, où $M^{(4)} = \frac{a^{(1)2} - B\alpha^{(1)2}}{M^{(1)}} = \frac{(a^{(1)2} - B\alpha^{(1)2})(a^{(1)2} - B\alpha^{(1)2})}{a^{(2)2} - B\alpha^{(2)2}}$, & l'on aura $u^{(4)} = \pm \frac{(a^{(1)} u^{(1)} - \alpha^{(1)} t^{(1)})}{M^{(1)}}$, $t^{(4)} = \frac{a^{(1)} t^{(1)} - B\alpha^{(1)} u^{(1)}}{M^{(1)}}$.

§ 3. L'analogie eſt maintenant évidente, & l'on aura la ſuite d'équations,

$$
\begin{array}{l|l}
B u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2} & M^{(2)} = a^{(1)2} - B\alpha^{(1)2} \\
B u^{(2)2} + M^{(2)} = t^{(2)2} & M^{(3)} M^{(2)} = a^{(2)2} - B\alpha^{(2)2} \\
B u^{(3)2} + M^{(3)} = t^{(3)2} & M^{(4)} M^{(3)} = a^{(3)2} - B\alpha^{(3)2} \\
B u^{(4)2} + M^{(4)} = t^{(4)2} & M^{(5)} M^{(4)} = a^{(4)2} - B\alpha^{(4)2} \\
\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\
\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\
B u^{(\varepsilon-3)2} + M^{(\varepsilon-3)} = t^{(\varepsilon-3)2} & M^{(\varepsilon-3)} M^{(\varepsilon-2)} = a^{(\varepsilon-3)2} - B\alpha^{(\varepsilon-3)2} \\
B u^{(\varepsilon-2)2} + M^{(\varepsilon-2)} = t^{(\varepsilon-2)2} & M^{(\varepsilon-2)} M^{(\varepsilon-1)} = a^{(\varepsilon-2)2} - B\alpha^{(\varepsilon-2)2} \\
B u^{(\varepsilon-1)2} + M^{(\varepsilon-1)} = t^{(\varepsilon-1)2} & M^{(\varepsilon-1)} M^{(\varepsilon)} = a^{(\varepsilon-1)2} - B\alpha^{(\varepsilon-1)2} \\
B u^{(\varepsilon)2} + M^{(\varepsilon)} = t^{(\varepsilon)2} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
u^{(2)} = \pm \frac{(a^{(1)} u^{(1)} - \alpha^{(1)} t^{(1)})}{1} & t^{(2)} = \frac{(a^{(1)} t^{(1)} - B\alpha^{(1)} u^{(1)}}{1} \\
u^{(3)} = \pm \frac{(a^{(2)} u^{(2)} - \alpha^{(2)} t^{(2)})}{M^{(2)}} & t^{(3)} = \frac{a^{(2)} t^{(2)} - B\alpha^{(2)} u^{(2)}}{M^{(2)}} \\
u^{(4)} = \pm \frac{(a^{(3)} u^{(3)} - \alpha^{(3)} t^{(3)})}{M^{(1)}} & t^{(4)} = \frac{a^{(1)} t^{(1)} - B\alpha^{(1)} u^{(1)}}{M^{(1)}} \\
\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\
\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}
\end{array}
$$

$$u^{(\varrho-3)} = \pm \frac{(a^{(\varrho-4)} u^{(\varrho-4)} - \alpha^{(\varrho-4)} t^{(\varrho-4)})}{M^{(\varrho-4)}} \quad t^{(\varrho-3)} = \frac{a^{(\varrho-4)} t^{(\varrho-4)} - B\alpha^{(\varrho-4)} u^{(\varrho-4)}}{M^{(\varrho-4)}}$$

$$u^{(\varrho-2)} = \pm \frac{(a^{(\varrho-3)} u^{(\varrho-3)} - \alpha^{(\varrho-3)} t^{(\varrho-3)})}{M^{(\varrho-3)}} \quad t^{(\varrho-2)} = \frac{a^{(\varrho-3)} t^{(\varrho-3)} - B\alpha^{(\varrho-3)} u^{(\varrho-3)}}{M^{(\varrho-3)}}$$

$$u^{(\varrho-1)} = \pm \frac{(a^{(\varrho-2)} u^{(\varrho-2)} - \alpha^{(\varrho-2)} t^{(\varrho-2)})}{M^{(\varrho-2)}} \quad t^{(\varrho-1)} = \frac{a^{(\varrho-2)} t^{(\varrho-2)} - B\alpha^{(\varrho-2)} u^{(\varrho-2)}}{M^{(\varrho-2)}}$$

$$u^{(\varrho)} = \pm \frac{(a^{(\varrho-1)} u^{(\varrho-1)} - \alpha^{(\varrho-1)} t^{(\varrho-1)})}{M^{(\varrho-1)}} \quad t^{(\varrho)} = \frac{a^{(\varrho-1)} t^{(\varrho-1)} - B\alpha^{(\varrho-1)} u^{(\varrho-1)}}{M^{(\varrho-1)}}$$

§ 4. On a en prenant le ſigne ſupérieur de $u^{(2)}$, $\frac{a^{(1)} u^{(1)} - \alpha^{(1)} t^{(1)}}{u^{(2)}}$ $= \frac{a^{(1)} t^{(1)} - B\alpha^{(1)} u^{(1)}}{t^{(2)}}$, ce qui donne $a^{(1)} = \frac{\alpha^{(1)} (t^{(1)} t^{(2)} - B u^{(1)} u^{(2)})}{u^{(1)} t^{(2)} - u^{(2)} t^{(1)}}$. Pour que $a^{(1)}$ ſoit un nombre entier il faut que $u^{(1)} t^{(2)} - u^{(2)} t^{(1)} = \pm 1$. Mettant dans cette équation les valeurs de $u^{(2)}$, $t^{(2)}$, on aura en effaçant ce qui ſe détruit, $\alpha^{(1)} t^{(1)2} - B\alpha^{(1)} u^{(1)2} = \pm 1$. Mais les premières valeurs qui ſatisfont à l'équation $Bu^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$ ſont $t^{(1)} = 1$, $u^{(1)} = u$, ce qui donne $u^{(2)} = -\alpha^{(1)}$, $t^{(2)} = a^{(1)} t^{(1)}$. L'équation que nous venons de trouver donne $B\alpha^{(1)} u^{(1)2} \pm 1 = \alpha^{(1)} t^{(1)2}$. Pour que cette équation coïncide avec l'équation $Bu^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$, il faut faire $\alpha^{(1)} = \pm 1$. Faiſons $\alpha^{(1)} = -1$, l'équation ſera $-Bu^{(1)2} \pm 1 = -\alpha^{(1)} t^{(1)2}$, ou en prenant le ſigne $-$, $Bu^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$. On a donc $u^{(1)} t^{(2)} - u^{(2)} t^{(1)} = -1$, donc $\frac{\alpha^{(1)}}{u^{(1)} t^{(2)} - u^{(2)} t^{(1)}} = 1$, & par conſéquent $a^{(1)} = t^{(1)} t^{(2)} - Bu^{(1)} u^{(2)}$. On a de plus $u^{(2)} = a^{(1)} u^{(1)} + t^{(1)}$, $t^{(2)} = a^{(1)} t^{(1)} + Bu^{(1)}$. On a enſuite, en prenant le ſigne ſupérieur de $u^{(3)}$, $\frac{a^{(2)} u^{(2)} - \alpha^{(2)} t^{(2)}}{u^{(2)}} = \frac{a^{(2)} t^{(2)} - B\alpha^{(2)} u^{(2)}}{t^{(2)}}$, ce qui donne $a^{(2)} = \frac{\alpha^{(2)} (t^{(2)} t^{(2)} - Bu^{(2)} u^{(2)})}{u^{(2)} t^{(2)} - u^{(2)} t^{(2)}}$. Pour que $a^{(2)}$ ſoit un nombre entier il faut que $u^{(2)} t^{(1)} - u^{(3)} t^{(2)} = \pm 1$. Subſtituant dans cette équation les valeurs de $u^{(3)}$ & de $t^{(3)}$, & effaçant ce qui ſe détruit,

on a $\frac{a^{(2)}t^{(2)2} - B\alpha^{(2)}u^{(2)2}}{M^{(2)}} = \pm 1$. Or $M^{(2)} = a^{(1)2} - B\alpha^{(1)2} = a^{(1)2} - B$. Si l'on prend pour $a^{(1)2}$ le carré qui eſt immédiatement au deſſous de B, on a $M^{(2)}$ négatif. Or on a en faiſant $u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$, $u^{(2)} = 1$, $t^{(2)} = a^{(1)}$, ce qui donne $u^{(3)} = \frac{a^{(2)} - \alpha^{(2)}a^{(1)}}{M^{(2)}}$, $t^{(3)} = \frac{a^{(2)}a^{(1)} - B\alpha^{(2)}}{M^{(2)}}$. Donc $t^{(2)}t^{(3)} - Bu^{(2)}u^{(3)} = a^{(1)}t^{(3)} - Bu^{(3)} = \frac{a^{(2)}a^{(1)2} - Ba^{(2)}}{M^{(2)}} = \frac{a^{(2)}(a^{(1)2} - B)}{a^{(1)2} - B}$ $= a^{(2)}$. Donc $a^{(2)} = \frac{\alpha^{(2)}a^{(2)}}{u^{(2)}t^{(1)} - u^{(1)}t^{(2)}}$, ou $1 = \frac{\alpha^{(2)}}{u^{(2)}t^{(1)} - u^{(1)}t^{(2)}}$, ou $1 = \pm\alpha^{(2)}$. Faiſons $\alpha^{(2)} = -1$, nous aurons $u^{(2)}t^{(3)} - u^{(3)}t^{(2)} = -1$, $u^{(3)} = \frac{a^{(2)}u^{(2)} + t^{(2)}}{M^{(2)}}$, $t^{(3)} = \frac{a^{(2)}t^{(2)} + Bu^{(2)}}{M^{(2)}}$, $M^{(3)} = \frac{a^{(2)2} - B}{M^{(2)}}$. Si l'on prend $a^{(2)2} < B$, $a^{(2)2} - B$ eſt négatif, & $M^{(2)}$ étant négatif, $M^{(3)}$ ſera poſitif. Au reſte il eſt évident qu'on peut prendre les valeurs de u, t indifféremment en plus & en moins, puiſque leurs carrés ſeuls entrent dans l'équation, mais il faut avoir égard à leurs ſignes pour les équations du genre de $u^{(2)}t^{(3)} - u^{(3)}t^{(2)} = -1$. Dans ce cas-ci, puiſque $u^{(2)}$ & $t^{(2)}$ ſont poſitifs, & que $M^{(2)}$ eſt négatif, $u^{(3)}$ & $t^{(3)}$ ſont négatifs. Si on les prenoit poſitifs, il faudroit prendre l'équation $u^{(3)}t^{(2)} - u^{(2)}t^{(3)} = 1$. On a après cela en prenant le ſigne ſupérieur de $u^{(4)}$, $\frac{a^{(3)}u^{(3)} - \alpha^{(3)}t^{(3)}}{u^{(4)}} = \frac{a^{(3)}t^{(3)} - B\alpha^{(3)}u^{(3)}}{t^{(4)}}$ ce qui donne $a^{(3)} = \frac{\alpha^{(3)}(t^{(3)}t^{(4)} - Bu^{(3)}u^{(4)})}{u^{(3)}t^{(4)} - u^{(4)}t^{(3)}}$. Pour que $a^{(3)}$ ſoit un nombre entier, il faut que $u^{(3)}t^{(4)} - u^{(4)}t^{(3)} = \pm 1$. Subſtituant dans cette équation les valeurs de $u^{(4)}$ & de $t^{(4)}$ & effaçant ce qui ſe détruit, on a $\frac{\alpha^{(3)}t^{(3)2} - B\alpha^{(3)}u^{(3)2}}{M^{(3)}} = \pm 1$. On a maintenant $u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$, $u^{(2)} = 1$, $t^{(2)} = a^{(1)}$, $u^{(3)} = \frac{a^{(2)} + a^{(1)}}{M^{(2)}}$, $t^{(3)} = \frac{a^{(2)}a^{(1)} + B}{M^{(2)}}$.

Donc

Donc $u^{(4)} = \frac{a^{(3)} u^{(3)} - \alpha^{(3)} t^{(3)}}{M^{(3)}} = \frac{a^{(3)} a^{(2)} + a^{(3)} a^{(1)} - \alpha^{(3)} a^{(2)} a^{(1)} - \alpha^{(3)} B}{M^{(2)} M^{(3)}}$,

$t^{(4)} = \frac{a^{(3)} t^{(3)} - B \alpha^{(3)} u^{(3)}}{M^{(3)}} = \frac{a^{(3)} a^{(2)} a^{(1)} + a^{(3)} B - \alpha^{(3)} a^{(2)} B - \alpha^{(3)} a^{(1)} B}{M^{(2)} M^{(3)}}$.

Donc $t^{(3)} t^{(4)} - B u^{(3)} u^{(4)} = \frac{a^{(3)} (a^{(2)2} - B) (a^{(1)2} - B)}{M^{(2)2} M^{(3)}}$ (en effaçant ce qui ſe détruit) $= a^{(3)}$. Donc $1 = \frac{\alpha^{(3)}}{u^{(3)} t^{(4)} - u^{(4)} t^{(3)}}$. Faiſons $\alpha^{(3)} = -1$, nous aurons $u^{(3)} t^{(4)} - u^{(4)} t^{(3)} = -1$, $u^{(4)} = \frac{a^{(3)} u^{(3)} + t^{(3)}}{M^{(3)}}$, $t^{(4)} = \frac{a^{(3)} t^{(3)} + B u^{(3)}}{M^{(3)}}$, $M^{(4)} = \frac{a^{(3)2} - B}{M^{(3)}}$. Si l'on prend $a^{(3)2} < B$, $a^{(3)2} - B$ ſera négatif, & $M^{(3)}$ étant poſitif, $M^{(4)}$ ſera négatif. On procèdera de la même manière pour les quantités ſuivantes, en faiſant $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \alpha^{(3)} = \alpha^{(4)}$ &c. $= -1$, ce qui donnera $M^{(2)}$, $M^{(4)}$, $M^{(6)}$ &c. négatives, $M^{(3)}$, $M^{(5)}$, $M^{(7)}$ &c. poſitives, en faiſant $\varepsilon = 2n + 1$

$$
\begin{array}{l|l}
u^{(1)} t^{(2)} - u^{(2)} t^{(1)} = -1 & B u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2} \\
u^{(2)} t^{(3)} - u^{(3)} t^{(2)} = +1 & B u^{(2)2} + M^{(2)} = t^{(2)2} \\
u^{(3)} t^{(4)} - u^{(4)} t^{(3)} = -1 & B u^{(3)2} + M^{(3)} = t^{(3)2} \\
u^{(4)} t^{(5)} - u^{(5)} t^{(4)} = +1 & B u^{(4)2} + M^{(4)} = t^{(4)2} \\
\quad - \quad - \quad - & \quad - \quad - \quad - \\
\quad - \quad - \quad - & \quad - \quad - \quad - \\
 & B u^{(2n-2)2} + M^{(2n-2)} = t^{(2n-2)2} \\
u^{(2n-1)} t^{(2n)} - u^{(2n)} t^{(2n-1)} = -1 & B u^{(2n-1)2} + M^{(2n-1)} = t^{(2n-1)2} \\
u^{(2n)} t^{(2n+1)} - u^{(2n+1)} t^{(2n)} = +1 & B u^{(2n)2} + M^{(2n)} = t^{(2n)2} \\
 & B u^{(2n+1)2} + M^{(2n+1)} = t^{(2n+1)2}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
M^{(2)} = a^{(1)2} - B \\
M^{(3)} M^{(2)} = a^{(2)2} - B \\
M^{(4)} M^{(3)} = a^{(3)2} - B \\
M^{(5)} M^{(4)} = a^{(4)2} - B \\
\quad - \quad - \quad - \\
\quad - \quad - \quad - \\
M^{(2n-2)} M^{(2n-1)} = a^{(2n-2)2} - B \\
M^{(2n-1)} M^{(2n)} = a^{(2n-1)2} - B \\
M^{(2n)} M^{(2n+1)} = a^{(2n)2} - B.
\end{array}
$$

$$u^{(2)} = a^{(1)} u^{(1)} + t^{(1)} \qquad t^{(2)} = a^{(1)} t^{(1)} + Bu^{(1)}$$

$$u^{(3)} = -\left(\frac{a^{(2)} u^{(2)} + t^{(2)}}{M^{(2)}}\right) \qquad t^{(3)} = -\left(\frac{a^{(2)} t^{(2)} + Bu^{(2)}}{M^{(2)}}\right)$$

$$u^{(4)} = \frac{a^{(3)} u^{(3)} + t^{(3)}}{M^{(3)}} \qquad t^{(4)} = \frac{a^{(3)} t^{(3)} + Bu^{(3)}}{M^{(3)}}$$

$$u^{(5)} = -\left(\frac{a^{(4)} u^{(4)} + t^{(4)}}{M^{(4)}}\right) \qquad t^{(5)} = -\left(\frac{a^{(4)} t^{(4)} + Bu^{(4)}}{M^{(4)}}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} - & - & - \\ - & - & - \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} - & - & - \\ - & - & - \end{array}$$

$$u^{(2n-2)} = \frac{a^{(2n-3)} u^{(2n-3)} + t^{(2n-3)}}{M^{(2n-2)}} \qquad t^{(2n-2)} = \frac{a^{(2n-3)} t^{(2n-3)} + Bu^{(2n-3)}}{M^{(2n-3)}}$$

$$u^{(2n-1)} = -\left(\frac{a^{(2n-2)} u^{(2n-2)} + t^{(2n-2)}}{M^{(2n-2)}}\right) \qquad t^{(2n-1)} = -\left(\frac{a^{(2n-2)} t^{(2n-2)} + Bu^{(2n-2)}}{M^{(2n-2)}}\right)$$

$$u^{(2n)} = \frac{a^{(2n-1)} u^{(2n-1)} + t^{(2n-1)}}{M^{(2n-1)}} \qquad t^{(2n)} = \frac{a^{(2n-1)} t^{(2n-1)} + Bu^{(2n-1)}}{M^{(2n-1)}}$$

$$u^{(2n+1)} = -\left(\frac{a^{(2n)} u^{(2n)} + t^{(2n)}}{M^{(2n)}}\right) \qquad t^{(2n+1)} = -\left(\frac{a^{(2n)} t^{(2n)} + Bu^{(2n)}}{M^{(2n)}}\right).$$

J'ai fait uſage dans cette table de la remarque faite plus haut, qu'on peut rendre $u^{(3)}$ & $t^{(3)}$ poſitifs en prenant $u^{(2)} t^{(3)} - u^{(3)} t^{(2)} = +1$. On trouvera de même $u^{(5)}$ & $t^{(5)}$ poſitifs en prenant $u^{(4)} t^{(5)} - u^{(5)} t^{(4)} = +1$, & en général $u^{(2n+1)}$, $t^{(2n+1)}$ poſitifs, en prenant $u^{(2n)} t^{(2n+1)} - u^{(2n+1)} t^{(2n)} = +1$. Les quantités $u^{(2n)}$, $t^{(2n)}$ reſtent poſitives, en laiſſant $u^{(2n-1)} t^{(2n)} - u^{(2n)} t^{(2n-1)} = -1$. Au moyen de cela, toutes les quantités u & t ſont poſitives, elles ont dans la table le ſigne $-$ là où les quantités M ſont négatives, & le ſigne $+$ là où les quantités M ſont poſitives.

§ 5. Ces valeurs donnent $-\frac{a^{(2)} u^{(2)} - t^{(2)}}{M^{(2)}} = -\frac{(a^{(2)} a^{(1)} + B) u^{(1)} - (a^{(2)} + a^{(1)}) t^{(1)}}{M^{(2)}}$.

Faiſons $-\frac{(a^{(2)} + a^{(1)})}{M^{(2)}} = \mu^{(1)}$ ($\mu^{(1)}$ étant un nombre entier poſitif) on aura $-a^{(2)} = \mu^{(1)} M^{(2)} + a^{(1)}$, $-\frac{a^{(2)} a^{(1)} + B}{M^{(2)}} = \frac{\mu^{(1)} a^{(1)} M^{(2)} + a^{(1)2} - B}{M^{(2)}} = \mu^{(1)} a^{(1)} + 1$; donc $u^{(3)} = (\mu^{(1)} a^{(1)}$

$+ 1) u^{(1)} + \mu^{(1)} t^{(1)} = \mu^{(1)} (a^{(1)} u^{(1)} + t^{(1)}) + u^{(1)} = \mu^{(1)} u^{(1)} + u^{(1)}$. Nous aurons de même $t^{(3)} = - \frac{a^{(2)} t^{(2)} - B u^{(2)}}{M^{(2)}}$ $= - \frac{(a^{(2)} a^{(1)} + B) t^{(1)} - B (a^{(2)} + a^{(1)}) u^{(1)}}{M^{(2)}} = (\mu^{(1)} a^{(1)} + 1) t^{(1)}$ $+ B \mu^{(1)} u^{(1)} = \mu^{(1)} (a^{(1)} t^{(1)} + B u^{(1)}) + t^{(1)} = \mu^{(1)} t^{(2)} + t^{(1)}$. On aura maintenant $u^{(4)} = \frac{a^{(3)} u^{(3)} + t^{(3)}}{M^{(3)}} = - \frac{(a^{(3)} a^{(2)} + B) u^{(2)} - (a^{(3)} + a^{(2)}) t^{(2)}}{M^{(2)} M^{(3)}}$.

Faiſons $\frac{a^{(3)} + a^{(2)}}{M^{(3)}} = \mu^{(2)}$, ($\mu^{(2)}$ étant un nombre entier poſitif), on a $a^{(3)} = \mu^{(2)} M^{(3)} - a^{(2)}$, $\frac{a^{(3)} a^{(2)} + B}{M^{(2)} M^{(3)}} = \frac{\mu^{(2)} a^{(2)} M^{(3)} - a^{(2)2} + B}{M^{(2)} M^{(3)}}$ $= \frac{\mu^{(2)} a^{(2)}}{M^{(2)}} - 1$. Donc $u^{(4)} = - \frac{\mu^{(2)} (a^{(2)} u^{(2)} + t^{(2)})}{M^{(2)}} + u^{(2)} = \mu^{(2)} u^{(3)} + u^{(2)}$. On aura de même $t^{(4)} = \mu^{(2)} t^{(3)} + t^{(2)}$, & ainſi de ſuite, ce qui donne la Table ſuivante:

$$\mu^{(1)} = - \frac{(a^{(1)} + a^{(2)})}{M^{(2)}} \qquad - a^{(2)} = \mu^{(1)} M^{(2)} + a^{(1)}$$

$$\mu^{(2)} = \frac{a^{(2)} + a^{(3)}}{M^{(3)}} \qquad a^{(3)} = \mu^{(2)} M^{(3)} - a^{(2)}$$

$$\mu^{(3)} = - \frac{(a^{(3)} + a^{(4)})}{M^{(4)}} \qquad - a^{(4)} = \mu^{(3)} M^{(4)} + a^{(3)}$$

$$\mu^{(4)} = \frac{a^{(4)} + a^{(5)}}{M^{(5)}} \qquad a^{(5)} = \mu^{(4)} M^{(5)} - a^{(4)}$$

$$\mu^{(2n-3)} = - \frac{(a^{(2n-3)} + a^{(2n-2)})}{M^{(2n-2)}} \qquad - a^{(2n-2)} = \mu^{(2n-3)} M^{(2n-2)} + a^{(2n-3)}$$

$$\mu^{(2n-2)} = \frac{a^{(2n-2)} + a^{(2n-1)}}{M^{(2n-1)}} \qquad a^{(2n-1)} = \mu^{(2n-2)} M^{(2n-1)} - a^{(2n-2)}$$

$$\mu^{(2n-1)} = - \frac{(a^{(2n-1)} + a^{(2n)})}{M^{(2n)}} \qquad - a^{(2n)} = \mu^{(2n-1)} M^{(2n)} + a^{(2n-1)}$$

$$
\begin{array}{l|l}
u^{(2)} = a^{(1)} u^{(1)} + \varepsilon^{(1)} & \varepsilon^{(2)} = a^{(1)} \varepsilon^{(1)} + B u^{(1)} \\
u^{(3)} = \mu^{(1)} u^{(2)} + u^{(1)} & \varepsilon^{(3)} = \mu^{(1)} \varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(1)} \\
u^{(4)} = \mu^{(2)} u^{(3)} + u^{(2)} & \varepsilon^{(4)} = \mu^{(2)} \varepsilon^{(3)} + \varepsilon^{(2)} \\
u^{(5)} = \mu^{(3)} u^{(4)} + u^{(3)} & \varepsilon^{(5)} = \mu^{(3)} \varepsilon^{(4)} + \varepsilon^{(3)} \\
\text{— — —} & \text{— — —} \\
u^{(2n-2)} = \mu^{(2n-4)} u^{(2n-3)} + u^{(2n-4)} & \varepsilon^{(2n-2)} = \mu^{(2n-4)} \varepsilon^{(2n-3)} + \varepsilon^{(2n-4)} \\
u^{(2n-1)} = \mu^{(2n-3)} u^{(2n-2)} + u^{(2n-3)} & \varepsilon^{(2n-1)} = \mu^{(2n-3)} \varepsilon^{(2n-2)} + \varepsilon^{(2n-3)} \\
u^{(2n)} = \mu^{(2n-2)} u^{(2n-1)} + u^{(2n-2)} & \varepsilon^{(2n)} = \mu^{(2n-2)} \varepsilon^{(2n-1)} + \varepsilon^{(2n-2)} \\
u^{(2n+1)} = \mu^{(2n-1)} u^{(2n)} + u^{(2n-1)} & \varepsilon^{(2n+1)} = \mu^{(2n-1)} \varepsilon^{(2n)} + \varepsilon^{(2n-1)}
\end{array}
$$

§ 6. Faiſons maintenant $M^{(2n+1)} = 1$, $a^{(2n)} = a^{(1)}$, les équations $M^{(2)} = a^{(1)2} - B$, $M^{(2n)} M^{(2n+1)} = a^{(2n)2} - B$ donneront $M^{(2n)} = M^{(2)}$. Maintenant les équations $-a^{(2)} = \mu^{(1)} M^{(2)} + a^{(1)}$, $-a^{(2n)} = \mu^{(2n-1)} M^{(2n)} + a^{(2n-1)}$ donneront $-a^{(2)} = \mu^{(1)} M^{(2)} + a^{(1)}$, $-a^{(1)} = \mu^{(2n-1)} M^{(2)} + a^{(2n-1)}$. Donc $-a^{(1)} = a^{(2)} + \mu^{(1)} M^{(2)} = \mu^{(2n-1)} M^{(2)} + a^{(2n-1)}$, donc $M^{(2)} (\mu^{(1)} - \mu^{(2n-1)}) = a^{(2)} - a^{(2n-1)}$; donc $\mu^{(1)} = \mu^{(2n-1)}$, $a^{(2)} = a^{(2n-1)}$. Enſuite les équations $M^{(3)} M^{(2)} = a^{(2)2} - B$, $M^{(2n-1)} M^{(2n)} = a^{(2n-1)2} - B$ deviennent $M^{(3)} M^{(2)} = a^{(2)2} - B$, $M^{(2n-1)} M^{(2n)} = a^{(2)2} - B$, donc $M^{(3)} = M^{(2n-1)}$. Et les équations $a^{(3)} = \mu^{(2)} M^{(3)} - a^{(2)}$; $a^{(2n-1)} = \mu^{(2n-2)} M^{(2n-1)} - a^{(2n-2)}$ deviennent $a^{(3)} = \mu^{(2)} M^{(3)} - a^{(2)}$, $a^{(2)} = \mu^{(2n-2)} M^{(3)} - a^{(2n-2)}$. Donc $a^{(2)} = \mu^{(2)} M^{(3)} - a^{(3)} = \mu^{(2n-2)} M^{(3)} - a^{(2n-2)}$. Donc $M^{(3)} (\mu^{(2)} - \mu^{(2n-2)}) = a^{(3)} - a^{(2n-2)}$. Donc $\mu^{(2)} = \mu^{(2n-2)}$, $a^{(3)} = a^{(2n-2)}$. Procédant toujours de la même manière, on aura les Tables ſuivantes:

$$
\begin{array}{l|l|l}
\mu^{(1)} = \mu^{(2n-1)} & a^{(1)} = a^{(2n)} & M^{(2n+1)} = 1 \\
\mu^{(2)} = \mu^{(2n-2)} & a^{(2)} = a^{(2n-1)} & M^{(2n)} = M^{(2)} \\
\mu^{(3)} = \mu^{(2n-3)} & a^{(3)} = a^{(2n-2)} & M^{(2n-1)} = M^{(3)} \\
\text{— —} & \text{— —} & \text{— —} \\
\text{— —} & \text{— —} & \text{— —}
\end{array}
$$

$$\mu^{(n-3)} = \mu^{(n+3)}$$
$$\mu^{(n-2)} = \mu^{(n+2)}$$
$$\mu^{(n-1)} = \mu^{(n+1)}$$
$$\mu^{(n)} = \mu^{(n)}$$

$$a^{(n-3)} = a^{(n+4)}$$
$$a^{(n-2)} = a^{(n+3)}$$
$$a^{(n-1)} = a^{(n+2)}$$
$$a^{(n)} = a^{(n+1)}$$

$$M^{(n+5)} = M^{(n-3)}$$
$$M^{(n+4)} = M^{(n-2)}$$
$$M^{(n+3)} = M^{(n-1)}$$
$$M^{(n+2)} = M^{(n)}$$
$$M^{(n+1)} = M^{(n+1)}$$

Donc

$$Bu^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$$
$$Bu^{(2)2} + M^{(2)} = t^{(2)2}$$
$$Bu^{(3)2} + M^{(3)} = t^{(3)2}$$
$$Bu^{(4)2} + M^{(4)} = t^{(4)2}$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$Bu^{(n-2)2} + M^{(n-2)} = t^{(n-2)2}$$
$$Bu^{(n-1)2} + M^{(n-1)} = t^{(n-1)2}$$
$$Bu^{(n)2} + M^{(n)} = t^{(n)2}$$
$$Bu^{(n+1)2} + M^{(n+1)} = t^{(n+1)2}$$
$$Bu^{(n+2)2} + M^{(n)} = t^{(n+2)2}$$
$$Bu^{(n+3)2} + M^{(n-1)} = t^{(n+3)2}$$
$$Bu^{(n+4)2} + M^{(n-2)} = t^{(n+4)2}$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$Bu^{(2n-2)2} + M^{(4)} = t^{(2n-2)2}$$
$$Bu^{(2n-1)2} + M^{(3)} = t^{(2n-1)2}$$
$$Bu^{(2n)2} + M^{(2)} = t^{(2n)2}$$
$$Bu^{(2n+1)2} + 1 = t^{(2n+1)2}$$

$$-a^{(2)} = \mu^{(1)} M^{(2)} + a^{(1)}$$
$$a^{(3)} = \mu^{(2)} M^{(3)} - a^{(2)}$$
$$-a^{(4)} = \mu^{(3)} M^{(4)} + a^{(3)}$$
$$a^{(5)} = \mu^{(4)} M^{(5)} - a^{(4)}$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$a^{(4)} = \mu^{(4)} M^{(5)} - a^{(5)}$$
$$-a^{(3)} = \mu^{(3)} M^{(4)} + a^{(4)}$$
$$a^{(2)} = \mu^{(2)} M^{(3)} - a^{(3)}$$
$$-a^{(1)} = \mu^{(1)} M^{(2)} + a^{(2)}$$

$$M^{(2)} = a^{(1)2} - B$$
$$M^{(3)} M^{(2)} = a^{(2)2} - B$$
$$M^{(4)} M^{(3)} = a^{(3)2} - B$$
$$M^{(5)} M^{(4)} = a^{(4)2} - B$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$M^{(5)} M^{(4)} = a^{(4)2} - B$$
$$M^{(4)} M^{(3)} = a^{(3)2} - B$$
$$M^{(3)} M^{(2)} = a^{(2)2} - B$$
$$M^{(2)} = a^{(1)2} - B$$

$$u^{(2)} = a^{(1)} u^{(1)} + t^{(1)}$$
$$u^{(3)} = \mu^{(1)} u^{(2)} + u^{(1)}$$
$$u^{(4)} = \mu^{(2)} u^{(3)} + u^{(2)}$$
$$u^{(5)} = \mu^{(3)} u^{(4)} + u^{(3)}$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$t^{(2)} = a^{(1)} t^{(1)} + Bu^{(1)}$$
$$t^{(3)} = \mu^{(1)} t^{(2)} + t^{(1)}$$
$$t^{(4)} = \mu^{(2)} t^{(3)} + t^{(2)}$$
$$t^{(5)} = \mu^{(3)} t^{(4)} + t^{(3)}$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$u^{(n-2)} = \mu^{(n-4)} u^{(n-3)} + u^{(n-4)} \qquad t^{(n-2)} = \mu^{(n-4)} t^{(n-3)} + t^{(n-4)}$$
$$u^{(n-1)} = \mu^{(n-3)} u^{(n-2)} + u^{(n-3)} \qquad t^{(n-1)} = \mu^{(n-3)} t^{(n-2)} + t^{(n-3)}$$
$$u^{(n)} = \mu^{(n-2)} u^{(n-1)} + u^{(n-2)} \qquad t^{(n)} = \mu^{(n-2)} t^{(n-1)} + t^{(n-2)}$$
$$u^{(n+1)} = \mu^{(n-1)} u^{(n)} + u^{(n-1)} \qquad t^{(n+1)} = \mu^{(n-1)} t^{(n)} + t^{(n-1)}$$
$$u^{(n+2)} = \mu^{(n)} u^{(n+1)} + u^{(n)} \qquad t^{(n+2)} = \mu^{(n)} t^{(n+1)} + t^{(n)}$$
$$u^{(n+3)} = \mu^{(n-1)} u^{(n+2)} + u^{(n+1)} \qquad t^{(n+3)} = \mu^{(n-1)} t^{(n+2)} + t^{(n+1)}$$
$$= \quad = \quad = \qquad = \quad = \quad =$$
$$= \quad = \quad = \qquad = \quad = \quad =$$
$$u^{(2n-2)} = \mu^{(4)} u^{(2n-3)} + u^{(2n-4)} \qquad t^{(2n-2)} = \mu^{(4)} t^{(2n-3)} + t^{(2n-4)}$$
$$u^{(2n-1)} = \mu^{(3)} u^{(2n-2)} + u^{(2n-3)} \qquad t^{(2n-1)} = \mu^{(3)} t^{(2n-2)} + t^{(2n-3)}$$
$$u^{(2n)} = \mu^{(2)} u^{(2n-1)} + u^{(2n-2)} \qquad t^{(2n)} = \mu^{(2)} t^{(2n-1)} + t^{(2n-2)}$$
$$u^{(2n+1)} = \mu^{(1)} u^{(2n)} + u^{(2n-1)} \qquad t^{(2n+1)} = \mu^{(1)} t^{(2n)} + t^{(2n-1)}$$

§ 7. Nous tirons de là $a^{(2)2} = M^{(3)} M^{(2)} + B = (\mu^{(1)} M^{(2)} + a^{(1)})^2 = \mu^{(1)2} M^{(2)2} + 2\mu^{(1)} a^{(1)} M^{(2)} + a^{(1)2}$. Donc $M^{(3)} = \frac{a^{(1)2} - B + 2\mu^{(1)} a^{(1)} M^{(2)} + \mu^{(1)2} M^{(2)2}}{M^{(2)}} = 1 + 2\mu^{(1)} a^{(1)} + \mu^{(1)2} M^{(2)}$. On aura de même $a^{(3)2} = M^{(4)} M^{(3)} + B = (\mu^{(2)} M^{(3)} - a^{(2)})^2 = \mu^{(2)2} M^{(3)2} - 2\mu^{(2)} a^{(2)} M^{(3)} + a^{(2)2}$, donc $M^{(4)} = \frac{a^{(2)2} - B - 2\mu^{(2)} a^{(2)} M^{(3)} + \mu^{(2)2} M^{(3)2}}{M^{(3)}} = M^{(2)} - 2\mu^{(2)} a^{(2)} + \mu^{(2)2} M^{(3)}$. On a enfuite $a^{(4)2} = M^{(5)} M^{(4)} + B = (\mu^{(3)} M^{(4)} + a^{(3)})^2 = \mu^{(3)2} M^{(4)2} + 2\mu^{(3)} a^{(3)} M^{(4)} + a^{(3)2}$. Donc $M^{(5)} = \frac{a^{(3)2} - B + 2\mu^{(3)} M^{(4)} a^{(3)} + \mu^{(3)2} M^{(4)2}}{M^{(4)}} = M^{(3)} + 2\mu^{(3)} a^{(3)} + \mu^{(3)2} M^{(4)}$. L'analogie eſt évidente, & l'on aura la table ſuivante:

$$M^{(2)} = a^{(1)2} - B$$
$$M^{(3)} = 1 + 2\mu^{(1)} a^{(1)} + \mu^{(1)2} M^{(2)}$$

$$M^{(4)} = M^{(2)} - 2\mu^{(2)} a^{(2)} + \mu^{(2)2} M^{(3)}$$
$$M^{(5} = M^{(3)} + 2\mu^{(3)} a^{(3)} + \mu^{(3)2} M^{(4)}$$
$$- \quad - \quad - \quad -$$
$$M^{(2n-2)} = M^{(2n-4)} - 2\mu^{(2n-4)} a^{(2n-4)} + \mu^{(2n-4)2} M^{(2n-3)}$$
$$M^{(2n-1)} = M^{(2n-3)} + 2\mu^{(2n-3)} a^{(2n-3)} + \mu^{(2n-3)2} M^{(2n-2)}$$
$$M^{(2n)} = M^{(2n-2)} - 2\mu^{(2n-2)} a^{(2n-2)} + \mu^{(2n-2)2} M^{(2n-1)}$$
$$M^{(2n+1)} = M^{(2n-1)} + 2\mu^{(2n-1)} a^{(2n-1)} + \mu^{(2n-1)2} M^{(2n)}$$

laquelle ſe réduit à celle-ci,

$$M^{(2)} = a^{(1)2} - B$$
$$M^{(3)} = 1 + 2\mu^{(1)} a^{(1)} + \mu^{(1)2} M^{(2)}$$
$$M^{(4)} = M^{(2)} - 2\mu^{(2)} a^{(2)} + \mu^{(2)2} M^{(3)}$$
$$M^{(5)} = M^{(3)} + 2\mu^{(3)} a^{(3)} + \mu^{(3)2} M^{(4)}$$
$$- \quad - \quad - \quad -$$
$$M^{(4)} = M^{(6)} - 2\mu^{(4)} a^{(5)} + \mu^{(4)2} M^{(5)}$$
$$M^{(3)} = M^{(5)} + 2\mu^{(3)} a^{(4)} + \mu^{(3)2} M^{(4)}$$
$$M^{(2)} = M^{(4)} - 2\mu^{(2)} a^{(3)} + \mu^{(2)2} M^{(3)}$$
$$1 = M^{(3)} + 2\mu^{(1)} a^{(2)} + \mu^{(1)2} M^{(2)}.$$

§ 8. Prenons maintenant le cas le plus ſimple, où $n = 1$; la table n'a que trois équations

$Bu^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$ | on fera $M^{(3)} = 1$, on a donc $M^{(2)} = a^{(1)2} - B$, $1 = 1 + 2\mu^{(1)} a^{(1)} + \mu^{(1)2} M^{(2)}$, ou $0 = 2a^{(1)} + \mu^{(1)} M^{(2)}$, ou $M^{(2)} = -\frac{2a^{(1)}}{\mu^{(1)}}$. Donc $-\frac{2a^{(1)}}{\mu^{(1)}} = a^{(1)2} - B$, ou $\frac{2a^{(1)}}{\mu^{(1)}} = B - a^{(1)2} = (\sqrt{B} + a^{(1)})(\sqrt{B} - a^{(1)})$. Donc $\sqrt{B} - a^{(1)} = \frac{2a^{(1)}}{\mu^{(1)}(\sqrt{B} + a^{(1)})} = \frac{\sqrt{B} + a^{(1)} - (\sqrt{B} - a^{(1)})}{\mu^{(1)}(\sqrt{B} + a^{(1)})} = \frac{1}{\frac{\mu^{(1)}(\sqrt{B} + a^{(1)})}{\sqrt{B} + a^{(1)} - (\sqrt{B} - a^{(1)})}}$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{\mu^{(1)}(\sqrt{B} - a^{(1)})}{\sqrt{B} + a^{(1)} - (\sqrt{B} - a^{(1)})}} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{\mu^{(1)}(\sqrt{B} - a^{(1)})}{2a^{(1)}}} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{\mu^{(1)}(B - a^{(1)2})}{2a^{(1)}(\sqrt{B} + a^{(1)})}}$$

$= \frac{1}{\mu^{(1)} - \frac{\mu^{(1)} M^{(2)}}{2a^{(1)}(\sqrt{B}+a^{(1)})}} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\sqrt{B}+a^{(1)}}}$. Donc $\sqrt{B} = a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\sqrt{B}+a^{(1)}}$

$= a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{2a^{(1)} + \sqrt{B} - a^{(1)}}$ $= a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{2a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\sqrt{B}+a^{(1)}}} =$

$a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{2a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{2a^{(1)} + \sqrt{B} - a^{(1)}}}$ $= a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{2a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{2a^{(1)}}}$ &c.

Il ſuffit donc de réduire $\sqrt{B}$ en fraction continue pour trouver les valeurs de $a^{(1)}$ & $\mu^{(1)}$, ce qui donnera la valeur de $M^{(2)}$. On aura enſuite,

$u^{(2)} = a^{(1)} u^{(1)} + t^{(1)} \mid t^{(2)} = a^{(1)} t^{(1)} + B u^{(1)}$
$u^{(3)} = \mu^{(1)} u^{(2)} + u^{(1)} \mid t^{(3)} = \mu^{(1)} t^{(2)} + t^{(1)}$.

On tirera de là, $u^{(3)} = (\mu^{(1)} a^{(1)} + 1) u^{(1)} + \mu^{(1)} t^{(1)}$, $t^{(3)} = (\mu^{(1)} a^{(1)} + 1) t^{(1)} + B \mu^{(1)} u^{(1)}$. Or on connoît toujours pour la première équation une valeur de $u^{(1)}$ & une de $t^{(1)}$, ſavoir $u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$. Subſtituant ces valeurs on aura $u^{(3)} = \mu^{(1)}$, $t^{(3)} = \mu^{(1)} a^{(1)} + 1$. Faiſant maintenant $u^{(1)} = \mu^{(1)}$, $t^{(1)} = \mu^{(1)} a^{(1)} + 1$, & ſubſtituant de nouveau ces valeurs, on aura $u^{(3)} = 2\mu^{(1)}(\mu^{(1)} a^{(1)} + 1)$, $t^{(3)} = (\mu^{(1)} a^{(1)} + 1)^2 + B\mu^{(1)2}$. Prenant ces nouvelles valeurs pour $u^{(1)}$ & $t^{(1)}$, & ainſi de ſuite, on trouvera ſucceſſivement, $u^{(3)} = 3\mu^{(1)}(\mu^{(1)} a^{(1)} + 1)^2 + B\mu^{(1)3}$, $t^{(3)} = (\mu^{(1)} a^{(1)} + 1)^3 + 3B(\mu^{(1)} a^{(1)} + 1)\mu^{(1)2}$, $u^{(3)} = 4\mu^{(1)}(\mu^{(1)} a^{(1)} + 1)^3 + 4B\mu^{(1)3}(\mu^{(1)} a^{(1)} + 1)$, $t^{(3)} = (\mu^{(1)} a^{(1)} + 1)^4 + 6B(\mu^{(1)} a^{(1)} + 1)^2 \mu^{(1)2} + B^2 \mu^{(1)4}$. L'analogie eſt évidente, & l'on aura en général,

$u^{(3)} =$

$$u^{(3)} = \frac{((\mu^{(1)} a^{(1)} + 1) + \mu^{(1)} VB)^2 - ((\mu^{(1)} a^{(1)} + 1) - \mu^{(1)} VB)^2}{2 VB}$$

$$t^{(3)} = \frac{((\mu^{(1)} a^{(1)} + 1) + \mu^{(1)} VB)^2 + ((\mu^{(1)} a^{(1)} + 1) - \mu^{(1)} VB)^2}{2}.$$

§ 9. Paſſons au cas où $n = 2$, la Table a cinq équations,

$$Bu^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$$
$$Bu^{(2)2} + M^{(2)} = t^{(2)2}$$
$$Bu^{(3)2} + M^{(3)} = t^{(3)2}$$
$$Bu^{(4)2} + M^{(2)} = t^{(4)2}$$
$$Bu^{(5)2} + 1 = t^{(5)2}$$

On a $M^{(3)} = 1$, $M^{(4)} = M^{(2)}$, $\mu^{(1)} = \mu^{(3)}$, $a^{(2)} = a^{(3)}$, ce qui donne les équations ſuivantes, $M^{(2)} = a^{(1)2} - B$, $M^{(3)} = 1 + 2\mu^{(1)} a^{(1)} + \mu^{(1)2} M^{(2)}$, $M^{(2)} = M^{(2)} - 2\mu^{(2)} a^{(2)} + \mu^{(2)2}$, $1 = M^{(3)} + 2\mu^{(1)} a^{(2)} + \mu^{(1)2} M^{(2)}$. On tire de là, $M^{(3)} = 1 + 2\mu^{(1)} a^{(1)} + \mu^{(1)2} M^{(2)} = \frac{2a^{(2)}}{\mu^{(2)}} = 1 - 2\mu^{(1)} a^{(2)} - \mu^{(1)2} M^{(2)}$. Ajoutant la première & la troiſième valeurs, on a $2M^{(3)} = 2 + 2\mu^{(1)}(a^{(1)} - a^{(2)})$. On a auſſi en les retranchant l'une de l'autre $M^{(2)} = -\frac{(a^{(1)} + a^{(2)})}{\mu^{(1)}}$. Donc $\frac{2a^{(2)}}{\mu^{(2)}} = 1 + \mu^{(1)}(a^{(1)} - a^{(2)})$, ou $a^{(2)} = \frac{\mu^{(2)} + \mu^{(1)}\mu^{(2)}(a^{(1)} - a^{(2)})}{2}$, ou $a^{(2)} = \frac{\mu^{(2)} + \mu^{(1)}\mu^{(2)} a^{(1)}}{2 + \mu^{(1)}\mu^{(2)}}$. Donc $M^{(2)} = -\frac{(\mu^{(2)} + 2\mu^{(1)}\mu^{(2)} a^{(1)} + 2a^{(1)})}{\mu^{(1)}(\mu^{(1)}\mu^{(2)} + 2)}$. Donc $B - a^{(1)2} = -M^{(2)} = (\sqrt{B} + a^{(1)})(\sqrt{B} - a^{(1)}) = \frac{\mu^{(2)} + 2\mu^{(1)}\mu^{(2)} a^{(1)} - 2a^{(1)}}{\mu^{(1)}(2 + \mu^{(1)}\mu^{(2)})}$. Donc $\sqrt{B} = \frac{a^{(1)} + 2a^{(1)}(\mu^{(2)}\mu^{(1)} + 1) + \mu^{(2)}}{(2\mu^{(1)} + \mu^{(1)2}\mu^{(2)})(\sqrt{B} + a^{(1)})} = a^{(1)} + \frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})(\mu^{(2)}\mu^{(1)} + 1) - (\sqrt{B} - a^{(1)})(\mu^{(2)}\mu^{(1)} + 1) + \mu^{(2)}}{(\mu^{(2)}\mu^{(1)2} + 2\mu^{(1)})(\sqrt{B} + a^{(1)})} = a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{\mu^{(1)}(\sqrt{B} + a^{(1)}) + \mu^{(1)}(\sqrt{B} - a^{(1)})(\mu^{(2)}\mu^{(1)} + 1) - \mu^{(1)}\mu^{(2)}}{(\mu^{(2)}\mu^{(1)} + 1)(\sqrt{B} + a^{(1)}) - (\mu^{(2)}\mu^{(1)} + 1)(\sqrt{B} - a^{(1)}) + \mu^{(2)}} = a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{\mu^{(1)}\mu^{(2)2} + \mu^{(2)} - (\mu^{(2)}\mu^{(1)} + 1)(\sqrt{B} - a^{(1)}) - ((\mu^{(2)2}\mu^{(1)2} + \mu^{(2)}\mu^{(1)})(\sqrt{B} - a^{(1)}) + \sqrt{B} + a^{(1)}}{\mu^{(1)}(\sqrt{B} + a^{(1)}) + (\mu^{(2)}\mu^{(1)2} + \mu^{(1)})(\sqrt{B} - a^{(1)}) - \mu^{(1)}\mu^{(2)}}$

$$= a^{(1)} + \cfrac{1}{\mu^{(1)} + \cfrac{1}{\mu^{(2)} + \cfrac{1}{\mu^{(1)} + \cfrac{\mu^{(1)}(\mu^{(2)}\mu^{(1)} + 1)(\mu^{(2)}\mu^{(1)} + 2)(\sqrt{B} - a^{(1)}) - 2\mu^{(2)}\mu^{(1)} - \mu^{(2)2}\mu^{(1)2}}{\sqrt{B} + a^{(1)} - (\mu^{(2)}\mu^{(1)} + 1)^2(\sqrt{B} - a^{(1)}) + \mu^{(1)}(\mu^{(2)}\mu^{(1)} + 1)}}}} =$$

$$a^{(1)} + \cfrac{1}{\mu^{(1)} + \cfrac{1}{\mu^{(2)} + \cfrac{1}{\mu^{(1)} + \cfrac{1}{\sqrt{B} + a^{(1)}}}}} = a^{(1)} + \cfrac{1}{\mu^{(1)} + \cfrac{1}{\mu^{(2)} + \cfrac{1}{\mu^{(1)} + \cfrac{1}{2a^{(1)} + \sqrt{B} - a^{(1)}}}}} =$$

$$a^{(1)} + \cfrac{1}{\mu^{(1)} + \cfrac{1}{\mu^{(2)} + \cfrac{1}{\mu^{(1)} + \cfrac{1}{2a^{(1)} + \cfrac{1}{\mu^{(2)} + \cfrac{1}{\mu^{(2)} + \cfrac{1}{\mu^{(1)} + \cfrac{1}{\sqrt{B} + a^{(1)}}}}}}}}} = a^{(1)} + \cfrac{1}{\mu^{(1)} + \cfrac{1}{\mu^{(2)} + \cfrac{1}{\mu^{(1)} + \cfrac{1}{2a^{(1)} + \cfrac{1}{\mu^{(2)} + \cfrac{1}{\mu^{(2)} + \cfrac{1}{\mu^{(1)} + \cfrac{1}{2a^{(1)}}}}}}}}} \text{ \&c.}$$

En réduiſant donc $\sqrt{B}$ en fraction continue, on aura les valeurs de $a^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, & par conſéquent $M^{(2)}$, $a^{(2)}$, $M^{(3)}$. On aura enſuite,

$$\begin{array}{l|l} u^{(2)} = a^{(1)} u^{(1)} + t^{(1)} & t^{(2)} = a^{(1)} t^{(1)} + B u^{(1)} \\ u^{(3)} = \mu^{(1)} u^{(2)} + u^{(1)} & t^{(3)} = \mu^{(1)} t^{(2)} + t^{(1)} \\ u^{(4)} = \mu^{(2)} u^{(3)} + u^{(2)} & t^{(4)} = \mu^{(2)} t^{(3)} + t^{(2)} \\ u^{(5)} = \mu^{(1)} u^{(4)} + u^{(3)} & t^{(5)} = \mu^{(1)} t^{(4)} + t^{(3)}. \end{array}$$

On ſait qu'on peut ſatisfaire à l'équation en faiſant $u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$, ce qui réduit ces formules aux ſuivantes; $u^{(2)} = 1$, $u^{(3)} = \mu^{(1)}$, $u^{(4)} = \mu^{(2)} u^{(3)} + u^{(2)} = \mu^{(2)} u^{(1)} + 1$, $u^{(5)} = \mu^{(1)} u^{(4)} + u^{(3)} = (\mu^{(2)} \mu^{(1)} + 1)\, \mu^{(1)} + \mu^{(1)} = \mu^{(1)} (\mu^{(2)} \mu^{(1)} + 2)$; $t^{(2)} = a^{(1)}$, $t^{(3)} = \mu^{(1)} a^{(1)} + 1$, $t^{(4)} = \mu^{(2)} t^{(3)} + t^{(2)} = \mu^{(2)} (\mu^{(1)} a^{(1)} + 1) + a^{(1)} = a^{(1)} (\mu^{(2)} \mu^{(1)} + 1) + \mu^{(2)}$; $t^{(5)} = \mu^{(1)} t^{(4)} + t^{(3)} = \mu^{(1)} \mu^{(2)} (\mu^{(2)} a^{(1)} + 1) + 2\mu^{(1)} a^{(1)} + 1$.

Cela poſé, il réſulte de la théorie des fractions continues que $\frac{t^{(2)}}{u^{(2)}}$, $\frac{t^{(3)}}{u^{(3)}}$, $\frac{t^{(4)}}{u^{(4)}}$, $\frac{t^{(5)}}{u^{(5)}}$ &c., expriment les valeurs ſucceſſives de $\sqrt{B}$ développée en fraction continue, en ſorte qu'on trouvera les valeurs cherchées $u^{(5)}$

& $t^{(s)}$ par les méthodes connues. Dès que nous aurons ainſi une valeur de $u^{(s)}$ & $t^{(s)}$, nous en aurons une infinité. Car il eſt évident par la nature de nos formules qu'on arrivera toujours à des expreſſions de cette forme $u^{(s)} = Au^{(1)} + Ct^{(1)}$, $t^{(s)} = At^{(1)} + BCu^{(1)}$. Faiſant donc $u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$, on aura $u^{(s)} = C$, $t^{(s)} = A$. Prenons ces nouvelles valeurs pour $u^{(1)}$ & $t^{(1)}$, on aura $u^{(s)} = 2AC$, $t^{(s)} = A^2 + BC^2$. Prenant ces nouvelles valeurs pour $u^{(1)}$ & $t^{(1)}$, on aura $u^{(s)} = 3A^2C + BC^3$, $t^{(s)} = A^3 + 3ABC^2$, & ainſi de ſuite, en ſorte qu'on aura en général, $u^{(s)} = \frac{(A+CVB)^p - (A-CVB)^p}{2VB}$, $t^{(s)} = \frac{(A+CVB)^p + (A-CVB)^p}{2}$.

§ 10. Paſſons au cas où $n = 3$. La table a ſept équations. On a $M^{(7)} = 1$, $M^{(6)} = M^{(2)}$, $M^{(5)} = M^{(3)}$, $\mu^{(1)} = \mu^{(5)}$, $\mu^{(2)} = \mu^{(4)}$, $a^{(1)} = a^{(6)}$, $a^{(2)} = a^{(5)}$, $a^{(3)} = a^{(4)}$. Nous aurons les équations ſuivantes; $M^{(2)} = a^{(1)2} - B$; $M^{(3)} = 1 + 2\mu^{(1)}a^{(1)} + \mu^{(1)2}M^{(2)}$; $M^{(4)} = M^{(2)} - 2\mu^{(2)}a^{(2)} + \mu^{(2)2}M^{(3)}$; $M^{(5)} = M^{(3)} + 2\mu^{(3)}a^{(3)} + \mu^{(3)2}M^{(4)}$; $M^{(2)} = M^{(4)} - 2\mu^{(2)}a^{(3)} + \mu^{(2)2}M^{(3)}$; $1 = M^{(3)} + 2\mu^{(1)}a^{(2)} + \mu^{(1)2}M^{(2)}$. On tire de là $M^{(4)} = M^{(2)} - 2\mu^{(2)}a^{(2)} + \mu^{(2)2}M^{(3)} = -\frac{2a^{(1)}}{\mu^{(1)}} = M^{(2)} + 2\mu^{(2)}a^{(3)} - \mu^{(2)2}M^{(5)}$. Retranchant la troiſième équation de la première on a $M^{(3)} = \frac{a^{(2)} + a^{(1)}}{\mu^{(2)}}$. On a auſſi $M^{(3)} = 1 + 2\mu^{(1)}a^{(1)} + \mu^{(1)2}M^{(2)}$, $M^{(3)} = 1 - 2\mu^{(1)}a^{(2)} - \mu^{(1)2}M^{(2)}$. Retranchant la ſeconde de la première on a $M^{(2)} = -\frac{(a^{(1)} + a^{(2)})}{\mu^{(1)}}$. Subſtituant les valeurs de $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, $M^{(4)}$ dans les trois premières équations, on a $-\frac{(a^{(1)} + a^{(2)})}{\mu^{(1)}} = a^{(1)2} - B$, $\frac{a^{(2)} + a^{(1)}}{\mu^{(2)}} = 1 + 2\mu^{(1)}a^{(1)} - \mu^{(1)}(a^{(1)} + a^{(2)}) = 1 + \mu^{(1)}a^{(1)} - \mu^{(1)}a^{(2)}$; $-\frac{2a^{(1)}}{\mu^{(1)}} = -\frac{(a^{(1)} + a^{(2)})}{\mu^{(1)}} - 2\mu^{(2)}a^{(2)} +$

$\mu^{(2)}(a^{(2)} + a^{(3)}) = -\frac{(a^{(1)} + a^{(2)})}{\mu^{(1)}} - \mu^{(2)} a^{(2)} + \mu^{(2)} a^{(3)}$. Éliminant les valeurs de $a^{(2)}$, $a^{(3)}$, on obtient $B - a^{(1)2} = \frac{2a^{(1)}(\mu^{(3)}\mu^{(2)2}\mu^{(1)} + 2\mu^{(2)}\mu^{(1)} + \mu^{(3)}\mu^{(2)} + 1) + \mu^{(3)}\mu^{(2)2} + 2\mu^{(2)}}{\mu^{(3)}\mu^{(2)2}\mu^{(1)2} + 2\mu^{(3)}\mu^{(2)}\mu^{(1)} + 2\mu^{(2)}\mu^{(1)2} + 2\mu^{(3)} + \mu^{(1)}}$. Soient pour abréger, $A = \mu^{(3)}\mu^{(2)2}\mu^{(1)} + 2\mu^{(2)}\mu^{(1)} + \mu^{(3)}\mu^{(2)} + 1$, $\beta = \mu^{(3)}\mu^{(2)2} + 2\mu^{(2)}$, $C = \mu^{(3)}\mu^{(2)2}\mu^{(1)2} + 2\mu^{(3)}\mu^{(2)}\mu^{(1)} + 2\mu^{(2)}\mu^{(1)2} + 2\mu^{(1)} + \mu^{(3)}$, on aura $B - a^{(1)2} = (\sqrt{B} + a^{(1)})(\sqrt{B} - a^{(1)}) = \frac{2a^{(1)}A + \beta}{C} = \frac{(\sqrt{B} + a^{(1)} - (\sqrt{B} - a^{(1)})A + \beta)}{C}$, d'où l'on tire $\sqrt{B} - a^{(1)} = \frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})A + \beta}{(\sqrt{B} + a^{(1)})C + A}$. Or $C = \mu^{(1)}A + D$, $A = \mu^{(1)}\beta + E$, en faisant $D = \mu^{(3)}\mu^{(2)}\mu^{(1)} + \mu^{(3)} + \mu^{(1)}$; $E = \mu^{(3)}\mu^{(2)} + 1$. Donc $\sqrt{B} - a^{(1)} = \frac{1}{\frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})C + A}{(\sqrt{B} + a^{(1)})A + \beta}} = \frac{1}{\frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})(\mu^{(1)}A + D) + \mu^{(1)}\beta + E}{(\sqrt{B} + a^{(1)})A + \beta}}$

$= \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{D(\sqrt{B} + a^{(1)}) + E}{A(\sqrt{B} + a^{(1)}) + \beta}}$. Or $A = \mu^{(2)}D + F$, $\beta = \mu^{(2)}E + G$, en faisant $F = \mu^{(2)}\mu^{(1)} + 1$, $G = \mu^{(2)}$. Donc $\sqrt{B} - a^{(1)} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\frac{A(\sqrt{B} + a^{(1)}) + \beta}{D(\sqrt{B} + a^{(1)}) + E}}} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\frac{(\mu^{(2)}D + F)(\sqrt{B} + a^{(1)}) + \mu^{(2)}E + G}{D(\sqrt{B} + a^{(1)}) + E}}} =$

$\frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{F(\sqrt{B} + a^{(1)}) + G}{D(\sqrt{B} + a^{(1)}) + E}}}$. Or $D = \mu^{(3)}F + H$, $E = \mu^{(3)}G + 1$, en faisant $H = \mu^{(1)}$. Donc $\sqrt{B} - a^{(1)} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\frac{D(\sqrt{B} + a^{(1)}) + E}{F(\sqrt{B} + a^{(1)}) + G}}}}$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\frac{(\mu^{(1)} F + H)(VB + a^{(1)}) + \mu^{(1)} G + 1}{F(VB + a^{(1)}) + G}}}} =$$

$$\frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{H(VB + a^{(1)}) + 1}{F(VB + a^{(1)}) + G}}}}. \quad \text{Or } F = \mu^{(2)} H + 1. \quad \text{Donc}$$

$$VB - a^{(1)} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\frac{F(VB + a^{(1)}) + G}{H(VB + a^{(1)}) + 1}}}}} =$$

$$\frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\frac{(\mu^{(2)} H + 1)(VB + a^{(1)}) + \mu^{(2)}}{H(VB + a^{(1)}) + 1}}}}} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{VB + a^{(1)}}{H(VB + a^{(1)}) + 1}}}}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\frac{\mu^{(1)}(VB + a^{(1)}) + 1}{VB + a^{(1)}}}}}}} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{VB + a^{(1)}}}}}}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{2a^{(1)} + \sqrt{B} - a^{(1)}}}}}}}. \quad \text{On aura donc en}$$

réduiſant $\sqrt{B}$ en fraction continue, $a^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$, $\mu^{(3)}$. On aura enſuite

$$\begin{array}{l|l}
u^{(2)} = a^{(1)}u^{(1)} + t^{(1)} & t^{(2)} = a^{(1)}t^{(1)} + Bu^{(1)} \\
u^{(3)} = \mu^{(1)}u^{(2)} + u^{(1)} & t^{(3)} = \mu^{(1)}t^{(2)} + t^{(1)} \\
u^{(4)} = \mu^{(2)}u^{(3)} + u^{(2)} & t^{(4)} = \mu^{(2)}t^{(3)} + t^{(2)} \\
u^{(5)} = \mu^{(3)}u^{(4)} + u^{(3)} & t^{(5)} = \mu^{(3)}t^{(4)} + t^{(3)} \\
u^{(6)} = \mu^{(2)}u^{(5)} + u^{(4)} & t^{(6)} = \mu^{(2)}t^{(5)} + t^{(4)} \\
u^{(7)} = \mu^{(1)}u^{(6)} + u^{(5)} & t^{(7)} = \mu^{(1)}t^{(6)} + t^{(5)}.
\end{array}$$

Or on peut ſatisfaire à l'équation en faiſant $u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$, ce qui réduit ces formules aux ſuivantes:

$$\begin{array}{l|l}
u^{(2)} = 1 & t^{(2)} = a^{(1)} \\
u^{(3)} = \mu^{(1)} & t^{(3)} = \mu^{(1)}t^{(2)} + 1 \\
u^{(4)} = \mu^{(2)}u^{(3)} + u^{(2)} & t^{(4)} = \mu^{(2)}t^{(3)} + t^{(2)} \\
u^{(5)} = \mu^{(3)}u^{(4)} + u^{(3)} & t^{(5)} = \mu^{(3)}t^{(4)} + t^{(3)} \\
u^{(6)} = \mu^{(2)}u^{(5)} + u^{(4)} & t^{(6)} = \mu^{(2)}t^{(5)} + t^{(4)} \\
u^{(7)} = \mu^{(1)}u^{(6)} + u^{(5)} & t^{(7)} = \mu^{(1)}t^{(6)} + t^{(5)}.
\end{array}$$

Cela poſé, il réſulte de la théorie des fractions continues que $\frac{t^{(2)}}{u^{(2)}}$, $\frac{t^{(3)}}{u^{(3)}}$, $\frac{t^{(4)}}{u^{(4)}}$, $\frac{t^{(5)}}{u^{(5)}}$, $\frac{t^{(6)}}{u^{(6)}}$, $\frac{t^{(7)}}{u^{(7)}}$, expriment les valeurs ſucceſſives de $\sqrt{B}$ développée en fraction continue, en ſorte qu'on trouvera les valeurs cherchées $u^{(7)}$, $t^{(7)}$ par la méthode connue pour la formation des fractions continues. Dès que nous aurons une valeur de $u^{(7)}$ & de $t^{(7)}$, nous en aurons une infinité. Car on prouvera préciſément comme dans le § précédent, qu'arrivant à des expreſſions de cette forme, $u^{(7)} = Au^{(1)} + Ct^{(1)}$, $t^{(7)} = At^{(1)} + BCu^{(1)}$, on aura en général $u^{(7)} = \frac{(A+C\sqrt{B})^p - (A-C\sqrt{B})^p}{2\sqrt{B}}$, $t^{(7)} = \frac{(A+C\sqrt{B})^p + (A-C\sqrt{B})^p}{2}$.

§ 11. Pour traiter maintenant la queſtion en général & ſans paſſer par les cas particuliers, nous reprendrons les formules du § 7, dans leſquelles nous ferons $u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$, & nous aurons les deux tables ſuivantes:

$$
\begin{array}{l|l}
u^{(1)} = 0 & t^{(1)} = 1 \\
u^{(2)} = 1 & t^{(2)} = a^{(1)} \\
u^{(3)} = \mu^{(1)} & t^{(3)} = \mu^{(1)}\, t^{(2)} + 1 \\
u^{(4)} = \mu^{(2)}\, u^{(3)} + 1 & t^{(4)} = \mu^{(2)}\, t^{(3)} + t^{(2)} \\
u^{(5)} = \mu^{(3)}\, u^{(4)} + u^{(3)} & t^{(5)} = \mu^{(3)}\, t^{(4)} + t^{(3)} \\
\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\
u^{(n-2)} = \mu^{(n-4)}\, u^{(n-3)} + u^{(n-4)} & t^{(n-2)} = \mu^{(n-4)}\, t^{(n-3)} + t^{(n-4)} \\
u^{(n-1)} = \mu^{(n-3)}\, u^{(n-2)} + u^{(n-3)} & t^{(n-1)} = \mu^{(n-3)}\, t^{(n-2)} + t^{(n-3)} \\
u^{(n)} = \mu^{(n-2)}\, u^{(n-1)} + u^{(n-2)} & t^{(n)} = \mu^{(n-2)}\, t^{(n-1)} + t^{(n-2)} \\
u^{(n+1)} = \mu^{(n-1)}\, u^{(n)} + u^{(n-1)} & t^{(n+1)} = \mu^{(n-1)}\, t^{(n)} + t^{(n-1)} \\
u^{(n+2)} = \mu^{(n)}\, u^{(n+1)} + u^{(n)} & t^{(n+2)} = \mu^{(n)}\, t^{(n+1)} + t^{(n)} \\
u^{(n+3)} = \mu^{(n-1)}\, u^{(n+2)} + u^{(n+1)} & t^{(n+3)} = \mu^{(n-1)}\, t^{(n+2)} + t^{(n+1)} \\
\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} & \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\
u^{(2n-2)} = \mu^{(1)}\, u^{(2n-3)} + u^{(2n-4)} & t^{(2n-2)} = \mu^{(4)}\, t^{(2n-3)} + t^{(2n-4)} \\
u^{(2n-1)} = \mu^{(3)}\, u^{(2n-2)} + u^{(2n-3)} & t^{(2n-1)} = \mu^{(3)}\, t^{(2n-2)} + t^{(2n-3)} \\
u^{(2n)} = \mu^{(2)}\, u^{(2n-1)} + u^{(2n-2)} & t^{(2n)} = \mu^{(2)}\, t^{(2n-1)} + t^{(2n-2)} \\
u^{(2n+1)} = \mu^{(1)}\, u^{(2n)} + u^{(2n-1)} & t^{(2n+1)} = \mu^{(1)}\, t^{(2n)} + t^{(2n-1)}.
\end{array}
$$

L'on voit par ces tables qu'en ſuppoſant une fraction continue de la forme

$$
a^{(1)} + \cfrac{1}{\mu^{(1)} + \cfrac{1}{\mu^{(2)} + \cfrac{1}{\mu^{(3)} + \cfrac{1}{\mu^{(4)}} \cdots + \cfrac{1}{\mu^{(n-1)} + \cfrac{1}{\mu^{(n)}}}}}} \cdots + \cfrac{1}{\mu^{(3)} + \cfrac{1}{\mu^{(2)} + \cfrac{1}{\mu^{(1)}}}}
$$

on aura $\frac{t^{(2)}}{u^{(2)}} = a^{(1)}$, $\frac{t^{(3)}}{u^{(3)}} = a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}}$, $\frac{t^{(4)}}{u^{(4)}} = a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)}}}$,

$\frac{t^{(5)}}{u^{(5)}} = a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(3)}}}}$ . . . $\frac{t^{(2n+1)}}{u^{(2n+1)}} = a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(2n)}} + \frac{1}{\mu^{(2n+1)}}}}$,

ce qui réfulte immédiatement de la théorie des fractions continues. Maintenant on a, en vertu des mêmes formules, $\frac{u^{(2n)}}{u^{(2n+1)}} = \frac{1}{\frac{u^{(2n+1)}}{u^{(2n)}}}$

$= \frac{1}{\frac{\mu^{(1)} u^{(2n)} + u^{(2n-1)}}{u^{(2n)}}} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{u^{(2n-1)}}{u^{(2n)}}} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\frac{u^{(2n)}}{u^{(2n-1)}}}} =$

$\frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\frac{\mu^{(2)} u^{(2n-1)} + u^{(2n-2)}}{u^{(2n-1)}}}} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{u^{(2n-2)}}{u^{(2n-1)}}}} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\frac{u^{(2n-1)}}{u^{(2n-2)}}}}}$

$= \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\frac{\mu^{(3)} u^{(2n-2)} + u^{(2n-3)}}{u^{(2n-2)}}}}} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(3)} + \frac{u^{(2n-3)}}{u^{(2n-2)}}}}} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(3)} + \frac{1}{\frac{u^{(2n-2)}}{u^{(2n-3)}}}}}}$

&c. $= \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(3)} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(1)}}}}}}$.

Donc $\frac{t^{(2n+1)}}{u^{(2n+1)}} = a^{(1)} + \frac{u^{(2n)}}{u^{(2n+1)}}$, $t^{(2n+1)} = a^{(1)} u^{(2n+1)} + u^{(2n)}$, $t^{(2n+1)} - a^{(1)} u^{(2n+1)} = u^{(2n)}$, $t^{(2n+1)} =$ (parce que $u^{(2n)} t^{(2n+1)} - u^{(2n+1)} t^{(2n)} = 1$) $\frac{1 + u^{(2n+1)} t^{(2n)}}{u^{(2n)}}$. Donc $u^{(2n)} = \frac{1 + u^{(2n+1)} t^{(2n)}}{u^{(2n)}} - a^{(1)} u^{(2n+1)}$, $t^{(2n)} - a^{(1)} u^{(2n)} = \frac{u^{(2n)2} - 1}{u^{(2n+1)}}$, $\frac{t^{(2n)} - a^{(1)} u^{(2n)}}{u^{(2n)2} - 1} = \frac{1}{u^{(2n+1)}}$; $\frac{t^{(2n)2} - a^{(1)2} u^{(2n)2}}{u^{(2n)2} - 1} = \frac{t^{(2n)} + a^{(1)} u^{(2n)}}{u^{(2n+1)}}$. Or $B u^{(2n)2} - t^{(2n)2} = -M^{(2)} = B - a^{(1)2}$. Donc $B = \frac{t^{(2n)2} - a^{(1)2}}{u^{(2n)2} - 1}$, $B - a^{(1)2} = \frac{t^{(2n)2} - u^{(2n)2} a^{(1)2}}{u^{(2n)2} - 1} = \frac{t^{(2n)} + a^{(1)} u^{(2n)}}{u^{(2n+1)}} = \frac{2 a^{(1)} u^{(2n)} + t^{(2n)} - a^{(1)} u^{(2n)}}{u^{(2n+1)}}$. Donc

$$(\sqrt{B} - a^{(1)})(\sqrt{B} + a^{(1)}) = \frac{(\sqrt{B} + a^{(1)} - (\sqrt{B} - a^{(1)})) u^{(2n)} + t^{(2n)} - a^{(1)} u^{(2n)}}{u^{(2n+1)}},$$

$$\sqrt{B} - a^{(1)} = \frac{(\sqrt{B} + a^{(1)}) u^{(2n)} + t^{(2n)} - a^{(1)} u^{(2n)}}{(\sqrt{B} + a^{(1)}) u^{(2n+1)} + u^{(2n)}}.$$

§ 12. On aura maintenant en vertu des formules du § 7,

$$t^{(2n+1)} - a^{(1)} u^{(2n+1)} = u^{(2n)} = \mu^{(1)} (t^{(2n)} - a^{(1)} u^{(2n)}) + t^{(2n-1)} - a^{(1)} u^{(2n-1)}$$
$$t^{(2n)} - a^{(1)} u^{(2n)} = \mu^{(2)} (t^{(2n-1)} - a^{(1)} u^{(2n-1)}) + t^{(2n-2)} - a^{(1)} u^{(2n-2)}$$
$$t^{(2n-1)} - a^{(1)} u^{(2n-1)} = \mu^{(3)} (t^{(2n-2)} - a^{(1)} u^{(2n-2)}) + t^{(2n-3)} - a^{(1)} u^{(2n-3)}$$
$$\text{— — — — — —}$$
$$\text{— — — — — —}$$
$$t^{(n+3)} - a^{(1)} u^{(n+3)} = u^{(n-1)} (t^{(n+2)} - a^{(1)} u^{(n+2)}) + t^{(n+1)} - a^{(1)} u^{(n+1)}$$
$$t^{(n+2)} - a^{(1)} u^{(n+2)} = \mu^{(n)} (t^{(n+1)} - a^{(1)} u^{(n+1)}) + t^{(n)} - a^{(1)} u^{(n)}$$
$$t^{(n+1)} - a^{(1)} u^{(n+1)} = \mu^{(n-1)} (t^{(n)} - a^{(1)} u^{(n)}) + t^{(n-1)} - a^{(1)} u^{(n-1)},$$
$$\text{— — — — — —}$$
$$\text{— — — — — —}$$
$$t^{(4)} - a^{(1)} u^{(4)} = \mu^{(2)} (t^{(3)} - a^{(1)} u^{(3)}) + t^{(2)} - a^{(1)} u^{(2)}$$
$$t^{(3)} - a^{(1)} u^{(3)} = \mu^{(1)} (t^{(2)} - a^{(1)} u^{(2)}) + t^{(1)} - a^{(1)} u^{(1)}$$
$$t^{(2)} - a^{(1)} u^{(2)} = 0$$
$$t^{(1)} - a^{(1)} u^{(1)} = 1.$$

On a maintenant $\sqrt{B} - a^{(1)} = \frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(2n)} + t^{(2n)} - a^{(1)}\, u^{(2n)}}{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(2n+1)} + u^{(2n)}} =$

$$\frac{1}{\frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})(\mu^{(1)} u^{(2n-1)} + u^{(2n-1)}) + u^{(2n)}}{(\sqrt{B} + a^{(1)}) u^{(2n)} + t^{(2n)} - a^{(1)} u^{(2n)}}} = \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(2n-1)} + u^{(2n)} - \mu^{(1)}(t^{(2n)} - a^{(1)} u^{(2n)})}{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(2n)} + t^{(2n)} - a^{(1)}\, u^{(2n)}}$$

$=$ (à cause de $u^{(2n)} - \mu^{(1)}(t^{(2n)} - a^{(1)} u^{(2n)}) = t^{(2n-1)} - a^{(1)} u^{(2n-1)}$)

$$\frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(2n-1)} + t^{(2n-1)} - a^{(1)}\, u^{(2n-1)}}{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(2n-2)} + t^{(2n-2)} - a^{(1)}\, u^{(2n-2)}}} = \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})(\mu^{(1)} u^{(2n-2)} + u^{(2n-2)}) + t^{(2n-1)} - a^{(1)} u^{(2n-1)}}{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(2n-1)} + t^{(2n-1)} - a^{(1)}\, u^{(2n-1)}}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(2n-2)} + t^{(2n)} - a^{(1)} u^{(2n)} - \mu^{(2)}(t^{(2n-1)} - a^{(1)} u^{(2n-1)})}{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(2n-1)} + t^{(2n-1)} - a^{(1)}\, u^{(2n-1)}} =$$

$$\frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{1}{\frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(2n-1)} + t^{(2n-1)} - a^{(1)}\, u^{(2n-1)}}{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(2n-2)} + t^{(2n-2)} - a^{(1)}\, u^{(2n-2)}}}$$

(à cause de $t^{(2n)} - a^{(1)} u^{(2n)} - \mu^{(2)}(t^{(2n-1)} - a^{(1)} u^{(2n-1)})$
$= t^{(2n-2)} - a^{(1)} u^{(2n-2)}$) $=$

$$\frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{1}{\frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})(\mu^{(1)} u^{(2n-2)} + u^{(2n-3)}) + t^{(2n-1)} - a^{(1)} u^{(2n-1)}}{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(2n-2)} + t^{(2n-2)} - a^{(1)} u^{(2n-2)}}} =$$

$$\frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{1}{\mu^{(3)}} \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-2)}} + \frac{1}{\frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(n+1)} + t^{(n+1)} - a^{(1)} u^{(n+1)}}{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(n)} + t^{(n)} - a^{(1)} u^{(n)}}}$$

$$\frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{1}{\mu^{(3)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-2)}} + \frac{1}{\frac{(VB + a^{(1)})(\mu^{(n+1)} u^{(n+2)} + u^{(n+1)}) + t^{(n+3)} - a^{(1)} u^{(n+3)}}{(VB + a^{(1)}) u^{(n+2)} + t^{(n+2)} - a^{(1)} u^{(n+2)}}} =$$

$$\frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{1}{\mu^{(3)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{\frac{(VB + a^{(1)}) u^{(n+2)} + t^{(n+3)} - a^{(1)} u^{(n+3)} - \mu^{(n-1)}(t^{(n+2)} - a^{(1)} u^{(n+2)})}{(VB + a^{(1)}) u^{(n+2)} + t^{(n+2)} - a^{(1)} u^{(n+2)}}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{\frac{(VB + a^{(1)}) u^{(n+2)} + t^{(n+2)} - a^{(1)} u^{(n+2)}}{(VB + a^{(1)}) u^{(n+1)} + t^{(n+1)} - a^{(1)} u^{(n+1)}}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{\frac{(VB + a^{(1)})(\mu^{(n)} u^{(n+1)} + u^{(n)}) + t^{(n+2)} - a^{(1)} u^{(n+2)}}{(VB + a^{(1)}) u^{(n+1)} + t^{(n+1)} - a^{(1)} u^{(n+1)}}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{\mu^{(n)}} + \frac{(VB + a^{(1)})\,u^{(n)} + \varepsilon^{(n+2)} - a^{(1)}\,u^{(n+2)} - \mu^{(n)}\,(\varepsilon^{(n+1)} - a^{(1)}\,u^{(n+1)})}{(VB + a^{(1)})\,u^{(n+1)} + \varepsilon^{(n+1)} - a^{(1)}\,u^{(n+1)}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{\mu^{(n)}} + \frac{(VB + a^{(1)})\,u^{(n+1)} + \varepsilon^{(n+1)} - a^{(1)}\,u^{(n+1)}}{(VB + a^{(1)})\,u^{(n)} + \varepsilon^{(n)} - a^{(1)}\,u^{(n)}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n)}} + \frac{1}{(VB + a^{(1)})\,(\mu^{(n-1)}\,u^{(n)} + u^{(n-1)}) + \varepsilon^{(n+1)} - a^{(1)}\,u^{(n+1)}}{(VB + a^{(1)})\,u^{(n)} + \varepsilon^{(n)} - a^{(1)}\,u^{(n)}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n)}} + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{(VB + a^{(1)})\,u^{(n)} + \varepsilon^{(n)} - a^{(1)}\,u^{(n)}}{(VB + a^{(1)})\,u^{(n-1)} + \varepsilon^{(n-1)} - a^{(1)}\,u^{(n-1)}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{(VB + a^{(1)})\,u^{(2)} + \varepsilon^{(2)} - a^{(1)}\,u^{(2)}}{(VB + a^{(1)})\,u^{(1)} + \varepsilon^{(1)} - a^{(1)}\,u^{(1)}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} : \ldots : + \frac{1}{\mu^{(n)}} : \ldots : + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{1}{\frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})\,\mu^{(1)} + 1}{\sqrt{B} + a^{(1)}}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} : \ldots + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{\mu^{(n)}} + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} \ldots + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\sqrt{B} + a^{(1)}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \ldots + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{\mu^{(n)}} + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} \ldots + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{2a^{(1)}} + \sqrt{B} - a^{(1)} \text{ &c.}$$

On voit par là que $a^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$ . . . $\mu^{(n)}$ &c. sont les nombres qui réfultent de la réduction de $\sqrt{B}$ en fraction continue, & ces quantités étant ainfi trouvées, on aura $\frac{t^{(2n+1)}}{u^{(2n+1)}}$ par la méthode des fractions continues. Or, ayant trouvé une fois une valeur de $t^{(2n+1)}$ & de $u^{(2n+1)}$, on en trouvera une infinité par le procédé développé

ci-deſſus. En effet, puiſqu'on arrivera à des équations de cette forme $u^{(2n+1)} = Au^{(1)} + Ct^{(1)}$, $t^{(2n+1)} = At^{(1)} + BCu^{(1)}$, on aura en général, $u^{(2n+1)} = \frac{(A + CVB)^n - (A - CVB)^n}{2VB}$, $t^{(2n+1)} = \frac{(A + CVB)^n + (A - CVB)^n}{2}$.

§ 13. On déduit auſſi de là la méthode connue de réduire VB en fraction continue ſans extraire la racine carrée de B. On prend d'abord pour $a^{(1)}$ le nombre dont le carré eſt immédiatement au deſſous de B, ce qui donnera $M^{(2)} = a^{(1)2} - B$. On a enſuite par les formules du § 7, $a^{(2)} = -\mu^{(1)} M^{(2)} - a^{(1)}$; $M^{(2)}$ étant négatif, $-M^{(2)}$ ſera poſitif. Prenant donc $\mu^{(1)}$ entier & poſitif & le plus grand poſſible, pourvu que $a^{(2)}$ ne ſurpaſſe pas $a^{(1)}$, on aura $a^{(2)}$, ce qui donnera $M^{(3)} = \frac{a^{(2)2} - B}{M^{(2)}}$. On a enſuite $a^{(3)} = \mu^{(2)} M^{(3)} - a^{(2)}$; $M^{(3)}$ étant poſitif, on prendra $\mu^{(2)}$ entier & poſitif le plus grand poſſible pourvu que $a^{(3)}$ ne ſurpaſſe pas $a^{(1)}$; on aura $a^{(3)}$, ce qui donnera $M^{(4)} = \frac{a^{(3)2} - B}{M^{(3)}}$. On a enſuite $a^{(4)} = -\mu^{(3)} M^{(4)} - a^{(3)}$; $-M^{(4)}$ étant poſitif, on prendra $\mu^{(3)}$ entier & poſitif le plus grand poſſible pourvu que $a^{(4)}$ ne ſurpaſſe pas $a^{(1)}$; on aura $a^{(4)}$, ce qui donnera $M^{(5)} = \frac{a^{(4)2} - B}{M^{(4)}}$, & ainſi de ſuite.

§ 14. Soit par exemple, propoſé de réduire $V431$ en fraction continue. Je prends $a^{(1)} = 20$ parce que $a^{(1)2} = 400$ eſt le plus grand carré contenu dans 431. J'ai $M^{(2)} = a^{(1)2} - B = 400 - 431 = -31$, donc $a^{(2)} = 31\mu^{(1)} - 20$. Je fais $\mu^{(1)} = 1$, ce qui donne $a^{(2)} = 11$, $M^{(3)} = \frac{a^{(2)2} - B}{M^{(2)}} = \frac{121 - 431}{-31} = 10$, $a^{(3)} = 10\mu^{(2)} - 11$. Je fais $\mu^{(2)} = 3$, ce qui donne $a^{(3)} = 19$, $M^{(4)} = \frac{a^{(3)2} - B}{M^{(3)}} = \frac{361 - 431}{10} = -7$, $a^{(4)} =$

$7\mu^{(3)} - 19$. Je fais $\mu^{(3)} = 5$, ce qui donne $a^{(4)} = 16$, $M^{(5)} = \frac{a^{(4)2} - B}{M^{(4)}} = \frac{256 - 431}{-7} = 25$, $a^{(5)} = 25\mu^{(4)} - 16$. Je fais $\mu^{(4)} = 1$, ce qui donne $a^{(5)} = 9$, $M^{(6)} = \frac{a^{(5)2} - B}{M^{(5)}} = \frac{81 - 431}{25} = -14$, $a^{(6)} = 14\mu^{(5)} - 9$. Je fais $\mu^{(5)} = 2$, ce qui donne $a^{(6)} = 19$, $M^{(7)} = \frac{a^{(6)2} - B}{M^{(6)}} = \frac{361 - 431}{-14} = 5$, $a^{(7)} = 5\mu^{(6)} - 19$. Je prends $\mu^{(6)} = 7$, ce qui donne $a^{(7)} = 16$, $M^{(8)} = \frac{a^{(7)2} - B}{M^{(7)}} = \frac{256 - 431}{5} = -35$, $a^{(8)} = 35\mu^{(7)} - 16$. Je prends $\mu^{(7)} = 1$, ce qui donne $a^{(8)} = 19$, $M^{(9)} = \frac{a^{(8)2} - B}{M^{(8)}} = \frac{361 - 431}{-35} = 2$, $a^{(9)} = 2\mu^{(8)} - 19$. Je prends $\mu^{(8)} = 19$, ce qui donne $a^{(9)} = 19$, $M^{(10)} = \frac{a^{(9)2} - B}{M^{(9)}} = \frac{361 - 431}{2} = -35$. Comme $M^{(10)} = M^{(8)}$, $a^{(9)} = a^{(8)}$ &c. on a $n = 8$ & $\sqrt{B} = \sqrt{431} = 20 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{19 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{40}}}}}}}}}}}}}}}}$ &c.

La recherche des valeurs de μ n'a rien d'indéterminé, puisque μ doit toujours être pris positif & le plus grand possible pourvu que la valeur de a qui en résulte ne surpasse pas $a^{(1)}$. Il suit de ce procédé que les valeurs de μ forment une progression symmétrique telle que les nombres également éloignés des extrêmes sont égaux, & que le milieu de cette progression est le nombre $2a^{(1)}$, $a^{(1)}$ étant le nombre entier qui est immédiatement au dessous de $\sqrt{B}$. Je vais maintenant donner quelques exemples de l'application des formules précédentes au problème résolu par M. de la Grange.

§ 15. Soit proposée l'équation $46u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$, on a $B = 46$, donc $a^{(1)} = 6$ puisque 36 est le plus grand carré qui soit au dessous de 46. Donc $M^{(2)} = a^{(1)2} - B = 36 - 46 = -10$, $a^{(2)} = 10\mu^{(1)} - 6$. Je prends $\mu^{(1)} = 1$, ce qui donne $a^{(2)} = 4$, $M^{(3)} = \frac{a^{(2)2} - B}{M^{(2)}} = \frac{16 - 46}{-10} = 3$, $a^{(3)} = 3\mu^{(2)} - 4$. Je prends $\mu^{(2)} = 3$, ce qui donne $a^{(3)} = 5$, $M^{(4)} = \frac{a^{(3)2} - B}{M^{(3)}} = \frac{25 - 46}{5} = -7$, $a^{(4)} = 7\mu^{(3)} - 5$. Je prends $\mu^{(3)} = 1$, ce qui donne $a^{(4)} = 2$, $M^{(5)} = \frac{a^{(4)2} - B}{M^{(4)}} = \frac{4 - 46}{-7} = 6$, $a^{(5)} = 6\mu^{(4)} - 2$. Je prends $\mu^{(4)} = 1$, ce qui donne $a^{(5)} = 4$, $M^{(6)} = \frac{a^{(5)2} - B}{M^{(5)}} = \frac{16 - 46}{6} = -5$, $a^{(6)} = 5\mu^{(5)} - 4$. Je prends $\mu^{(5)} = 2$, ce qui donne $a^{(6)} = 6$, $M^{(7)} = \frac{a^{(6)2} - B}{M^{(6)}} = \frac{36 - 46}{-5} = 2$, $a^{(7)} = 2\mu^{(6)} - 6$. Je prends $\mu^{(6)} = 6$, ce qui donne $a^{(7)} = 6$, $M^{(8)} = \frac{a^{(7)2} - B}{M^{(7)}} = \frac{36 - 46}{2} = -5$, $a^{(8)} = 5\mu^{(7)} - 6$. Je fais $\mu^{(7)} = 2$, ce qui donne $a^{(8)} = 4$, $M^{(9)} = \frac{a^{(8)2} - B}{M^{(8)}} = \frac{16 - 46}{-5} = 6$, $a^{(9)} = 6\mu^{(8)} - 4$. Je fais $\mu^{(8)} = 1$, ce qui donne $a^{(9)} = 2$, $M^{(10)} = \frac{a^{(9)2} - B}{M^{(9)}} = \frac{4 - 46}{6} = -7$, $a^{(10)} = 7\mu^{(9)} - 2$. Je fais $\mu^{(9)} = 1$,

$= 1$, ce qui donne $a^{(10)} = 5$, $M^{(11)} = \frac{a^{(10)2} - B}{M^{(10)}} = \frac{25 - 46}{-7}$ $= 3$, $a^{(11)} = 3\mu^{(10)} - 5$. Je fais $\mu^{(10)} = 3$, ce qui donne $a^{(11)} = 4$, $M^{(12)} = \frac{a^{(11)2} - B}{M^{(11)}} = \frac{16 - 46}{3} = -10$, $a^{(12)} = 10\mu^{(11)} - 4$. Je fais $\mu^{(11)} = 1$, ce qui donne $a^{(12)} = 6$, $M^{(13)} = \frac{a^{(12)2} - B}{M^{(12)}} = \frac{36 - 46}{-10} = 1$. L'opération eſt finie, & j'ai la table ſuivante:

$$
\begin{array}{llll}
46\,u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}, & a^{(1)} = 6 & & \\
46\,u^{(2)2} - 10 = t^{(2)2}, & a^{(2)} = 4, & \mu^{(1)} = 1 & \\
46\,u^{(3)2} + 3 = t^{(3)2}, & a^{(3)} = 5, & \mu^{(2)} = 3 & \\
46\,u^{(4)2} - 7 = t^{(4)2}, & a^{(4)} = 2, & \mu^{(3)} = 1 & \\
46\,u^{(5)2} + 6 = t^{(5)2}, & a^{(5)} = 4, & \mu^{(4)} = 1 & \\
46\,u^{(6)2} - 5 = t^{(6)2}, & a^{(6)} = 6, & \mu^{(5)} = 2 & \\
46\,u^{(7)2} + 2 = t^{(7)2}, & a^{(7)} = 6, & \mu^{(6)} = 6 & \\
46\,u^{(8)2} - 5 = t^{(8)2}, & a^{(8)} = 4, & \mu^{(7)} = 2 & \\
46\,u^{(9)2} + 6 = t^{(9)2}, & a^{(9)} = 2, & \mu^{(8)} = 1 & \\
46\,u^{(10)2} - 7 = t^{(10)2}, & a^{(10)} = 5, & \mu^{(9)} = 1 & \\
46\,u^{(11)2} + 3 = t^{(11)2}, & a^{(11)} = 4, & \mu^{(10)} = 3 & \\
46\,u^{(12)2} - 10 = t^{(12)2}, & a^{(12)} = 6, & \mu^{(11)} = 1 & \\
46\,u^{(13)2} + 1 = t^{(13)2}. & & &
\end{array}
$$

Je range maintenant les quantités μ, u, t de la manière ſuivante,

$$
\begin{array}{lllllll}
a^{(1)} & \mu^{(1)} & \mu^{(2)} & \mu^{(3)} & \mu^{(4)} & \mu^{(5)} & \mu^{(6)} \text{ \&c.} \\
u^{(1)} & u^{(2)} & u^{(3)} & u^{(4)} & u^{(5)} & u^{(6)} & u^{(7)} \text{ \&c.} \\
t^{(1)} & t^{(2)} & t^{(3)} & t^{(4)} & t^{(5)} & t^{(6)} & t^{(7)} \text{ \&c.}
\end{array}
$$

Comparant cette table avec les formules du § 7, on voit que chaque terme, par exemple $u^{(4)}$, eſt égal au terme précédent $u^{(3)}$ multiplié par le terme ſupérieur $\mu^{(3)}$ plus le terme anteprécédent $u^{(2)}$, & ainſi de ſuite. Il en eſt de même pour les quantités $t^{(4)}$ &c. Nous aurons donc

6 1 3 1 1 2 6 2 1 1 3 1
0 1 1 4 5 9 23 147 317 464 781 2807 3588
1 6 7 27 34 61 156 997 2150 3147 5297 19038 24335.

On a donc $u^{(13)} = 3588$, $t^{(13)} = 24335$, & l'on aura en général

$$u^{(13)} = \frac{(24335 + 3588\sqrt{46})^p - (24335 - 3588\sqrt{46})^p}{2\sqrt{46}}$$

$$t^{(13)} = \frac{(24335 + 3588\sqrt{46})^p + (24335 - 3588\sqrt{46})^p}{2}.$$

§ 16. Soit l'équation $13u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$. On a $B = 13$, on prendra donc $a^{(1)} = 3$. Donc $M^{(2)} = a^{(1)2} - B = 9 - 13 = -4$, $a^{(2)} = 4\mu^{(1)} - 3$. Je fais $\mu^{(1)} = 1$, ce qui donne $a^{(2)} = 1$, $M^{(3)} = \frac{a^{(2)2} - B}{M^{(2)}} = \frac{1 - 13}{-4} = 3$, $a^{(3)} = 3\mu^{(2)} - 1$. Je fais $\mu^{(2)} = 1$, ce qui donne $a^{(3)} = 2$, $M^{(4)} = \frac{a^{(3)2} - B}{M^{(3)}} = \frac{4 - 13}{3} = -3$, $a^{(4)} = 3\mu^{(3)} - 2$. Je fais $\mu^{(3)} = 1$, ce qui donne $a^{(4)} = 1$, $M^{(5)} = \frac{a^{(4)2} - B}{M^{(4)}} = \frac{1 - 13}{-3} = 4$, $a^{(5)} = 4\mu^{(4)} - 1$. Je fais $\mu^{(4)} = 1$, ce qui donne $a^{(5)} = 3$, $M^{(6)} = \frac{a^{(5)2} - B}{M^{(5)}} = \frac{9 - 13}{4} = -1$, $a^{(6)} = \mu^{(5)} - 3$. Je fais $\mu^{(5)} = 6$, ce qui donne $a^{(6)} = 3$, $M^{(7)} = \frac{a^{(6)2} - B}{M^{(6)}} = \frac{9 - 13}{-1} = 4$, $a^{(7)} = 4\mu^{(6)} - 3$. Je fais $\mu^{(6)} = 1$, ce qui donne $a^{(7)} = 1$, $M^{(8)} = \frac{a^{(7)2} - B}{M^{(7)}} = \frac{1 - 13}{4} = -3$, $a^{(8)} = 3\mu^{(7)} - 1$. Je fais $\mu^{(7)} = 1$, ce qui donne $a^{(8)} = 2$, $M^{(9)} = \frac{a^{(8)2} - B}{M^{(8)}} = \frac{4 - 13}{-3} = 3$, $a^{(9)} = 3\mu^{(8)} - 2$. Je fais $\mu^{(8)} = 1$, ce qui donne $a^{(9)} = 1$, $M^{(10)} = \frac{a^{(9)2} - B}{M^{(9)}} = \frac{1 - 13}{3} = -4$, $a^{(10)} = 4\mu^{(9)} - 1$. Je fais $\mu^{(9)} = 1$, ce qui donne $a^{(10)} = 3$, $M^{(11)} = \frac{a^{(10)2} - B}{M^{(10)}} = \frac{9 - 13}{-4} = 1$.

L'opération eſt finie, & j'ai la table ſuivante:

$$
\begin{array}{llll}
13u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}, & a^{(1)} = 3 & & \\
13u^{(2)2} - 4 = t^{(2)2}, & a^{(2)} = 1, & \mu^{(1)} = 1 & \\
13u^{(3)2} + 3 = t^{(3)2}, & a^{(3)} = 2, & \mu^{(2)} = 1 & \\
13u^{(4)2} - 3 = t^{(4)2}, & a^{(4)} = 1, & \mu^{(3)} = 1 & \\
13u^{(5)2} + 4 = t^{(5)2}, & a^{(5)} = 3, & \mu^{(4)} = 1 & \\
13u^{(6)2} - 1 = t^{(6)2}, & a^{(6)} = 3, & \mu^{(5)} = 6 & \\
13u^{(7)2} + 4 = t^{(7)2}, & a^{(7)} = 1, & \mu^{(6)} = 1 & \\
13u^{(8)2} - 3 = t^{(8)2}, & a^{(8)} = 2, & \mu^{(7)} = 1 & \\
13u^{(9)2} + 3 = t^{(9)2}, & a^{(9)} = 1, & \mu^{(8)} = 1 & \\
13u^{(10)2} - 4 = t^{(10)2}, & a^{(10)} = 3, & \mu^{(9)} = 1 & \\
13u^{(11)2} + 1 = t^{(11)2}. & & &
\end{array}
$$

On formera donc, d'après ce que j'ai dit dans le § précédent, les ſuites

3	1	1	1	1	6	1	1	1	1	
0	1	1	2	3	5	33	38	71	109	180
1	3	4	7	11	18	119	137	256	393	649.

On a donc $u^{(11)} = 180$, $t^{(11)} = 649$, & l'on aura en général,

$$u^{(11)} = \frac{(649 + 180\sqrt{13})^p + (649 - 180\sqrt{13})^p}{2\sqrt{13}},$$

$$t^{(11)} = \frac{(649 + 180\sqrt{13})^p + (649 - 180\sqrt{13})^p}{2}.$$

Du reſte, il eſt évident que lorsqu'on eſt une fois arrivé à $M^{(n+1)}$ & qu'on trouve $M^{(n+2)} = M^{(n)}$, $a^{(n-1)} = a^{(n+2)}$, $\mu^{(n-1)} = \mu^{(n+1)}$, on a déjà toutes les valeurs dont on a beſoin, puisque $\mu^{(n+2)} = \mu^{(n-2)}$ &c. ce qui abrège de moitié l'opération.

§ 17. Soit l'équation $59u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$. On a $B = 59$. On prend $a^{(1)2} = 49$, donc $a^{(1)} = 7$, $M^{(2)} = a^{(1)2} - B = 49 - 59 = -10$, $a^{(2)} = 10\mu^{(1)} - 7$. Je prends $\mu^{(1)} = 1$, ce qui donne $a^{(2)} = 3$, $M^{(3)} = \frac{a^{(2)2} - B}{M^{(2)}} = \frac{9 - 59}{-10} = 5$,

$a^{(3)} = 5\mu^{(2)} - 3$. Je prends $\mu^{(2)} = 2$, ce qui donne $a^{(3)} = 7$, $M^{(4)} = \frac{a^{(3)2} - B}{M^{(3)}} = \frac{49 - 59}{5} = -2$, $a^{(4)} = 2\mu^{(1)} - 7$. Je prends $\mu^{(3)} = 7$, ce qui donne $a^{(4)} = 7$, $M^{(5)} = \frac{49 - 59}{-2} = 5$. On a ici $M^{(5)} = M^{(3)}$, $a^{(4)} = a^{(3)}$, donc $n = 3$, & l'on a la table suivante;

$$\begin{array}{llll}
59u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}, & a^{(1)} = 7, & & \\
59u^{(2)2} - 10 = t^{(2)2}, & a^{(2)} = 3, & \mu^{(1)} = 1 & \\
59u^{(3)2} + 5 = t^{(3)2}, & a^{(3)} = 7, & \mu^{(2)} = 2 & \\
59u^{(4)2} - 2 = t^{(4)2}, & a^{(4)} = 7, & \mu^{(3)} = 7 & \\
59u^{(5)2} + 5 = t^{(5)2}, & a^{(5)} = 3, & \mu^{(4)} = 2 & \\
59u^{(6)2} - 10 = t^{(6)2}, & a^{(6)} = 7, & \mu^{(5)} = 1 & \\
59u^{(7)2} + 1 = t^{(7)2}. & & &
\end{array}$$

On forme donc les suites

$$\begin{array}{ccccccc}
7 & 1 & 2 & 7 & 2 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & 3 & 22 & 47 & 69 \\
1 & 7 & 8 & 23 & 169 & 361 & 530.
\end{array}$$

On a donc $u^{(7)} = 69$, $t^{(7)} = 530$, & en général,

$$u^{(7)} = \frac{(530 + 69\sqrt{59})^p - (530 - 69\sqrt{59})^p}{2\sqrt{59}},$$

$$t^{(7)} = \frac{(530 + 69\sqrt{59})^p + (530 - 69\sqrt{59})^p}{2}.$$

§ 18. Soit l'équation $109u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$. On a $B = 109$, on prend $a^{(1)2} = 100$, ce qui donne $a^{(1)} = 10$. Donc $M^{(2)} = a^{(1)2} - B = 100 - 109 = -9$, $a^{(2)} = 9\mu^{(1)} - 10$. Je prends $\mu^{(1)} = 2$, ce qui donne $a^{(2)} = 8$, $M^{(3)} = \frac{a^{(2)2} - B}{M^{(2)}} = \frac{64 - 109}{-9} = 5$, $a^{(3)} = 5\mu^{(2)} - 8$. Je prends $\mu^{(2)} = 3$, ce qui donne $a^{(3)} = 7$, $M^{(4)} = \frac{a^{(3)2} - B}{M^{(3)}} = \frac{49 - 109}{5} = -12$, $a^{(4)} = 12\mu^{(3)} - 7$. Je prends $\mu^{(3)} = 1$, ce qui

donne $a^{(4)} = 5$; $M^{(5)} = \frac{a^{(4)2} - B}{M^{(4)}} = \frac{25 - 109}{-12} = 7$, $a^{(5)} = 7\mu^{(4)} - 5$. Je prends $\mu^{(4)} = 2$, ce qui donne $a^{(5)} = 9$, $M^{(6)} = \frac{a^{(5)2} - B}{M^{(5)}} = \frac{81 - 109}{7} = -4$, $a^{(6)} = 4\mu^{(5)} - 9$. Je prends $\mu^{(5)} = 4$, ce qui donne $a^{(6)} = 7$, $M^{(7)} = \frac{a^{(6)2} - B}{M^{(6)}} = \frac{49 - 109}{-4} = 15$, $a^{(7)} = 15\mu^{(6)} - 7$. Je prends $\mu^{(6)} = 1$, ce qui donne $a^{(7)} = 8$, $M^{(8)} = \frac{a^{(7)2} - B}{M^{(7)}} = \frac{64 - 109}{15} = -3$, $a^{(8)} = 3\mu^{(7)} - 8$. Je prends $\mu^{(7)} = 6$, ce qui donne $a^{(8)} = 10$, $M^{(9)} = \frac{a^{(8)2} - B}{M^{(8)}} = \frac{100 - 109}{-3} = 3$, $a^{(9)} = 3\mu^{(8)} - 10$. Je prends $\mu^{(8)} = 6$, ce qui donne $a^{(9)} = 8$, $M^{(10)} = \frac{a^{(9)2} - B}{M^{(9)}} = \frac{64 - 109}{3} = -15$, $a^{(10)} = 15\mu^{(9)} - 8$. Je prends $\mu^{(9)} = 1$, ce qui donne $a^{(10)} = 7$, $M^{(11)} = \frac{a^{(10)2} - B}{M^{(10)}} = \frac{49 - 109}{-15} = 4$, $a^{(11)} = 4\mu^{(10)} - 7$. Je prends $\mu^{(10)} = 4$, ce qui donne $a^{(11)} = 9$, $M^{(12)} = \frac{a^{(11)2} - B}{M^{(11)}} = \frac{81 - 109}{4} = -7$, $a^{(12)} = 7\mu^{(11)} - 9$. Je prends $\mu^{(11)} = 2$, ce qui donne $a^{(12)} = 5$, $M^{(13)} = \frac{a^{(12)2} - B}{M^{(12)}} = \frac{25 - 109}{-7} = 12$, $a^{(13)} = 12\mu^{(12)} - 5$. Je prends $\mu^{(12)} = 1$, ce qui donne $a^{(13)} = 7$, $M^{(14)} = \frac{a^{(13)2} - B}{M^{(13)}} = \frac{49 - 109}{12} = -5$, $a^{(14)} = 5\mu^{(13)} - 7$. Je prends $\mu^{(13)} = 3$, ce qui donne $a^{(14)} = 8$, $M^{(15)} = \frac{a^{(14)2} - B}{M^{(14)}} = \frac{64 - 109}{-5} = 9$, $a^{(15)} = 9\mu^{(14)} - 8$. Je prends $\mu^{(14)} = 2$, ce qui donne $a^{(15)} = 10$, $M^{(16)} = \frac{a^{(15)2} - B}{M^{(15)}} = \frac{100 - 109}{9} = -1$, $a^{(16)} = \mu^{(15)} - 10$. Je prends $\mu^{(15)} = 20$, ce qui donne $a^{(16)} = 10$, $M^{(17)} = \frac{a^{(16)2} - B}{M^{(16)}} = \frac{100 - 109}{-1} = 9$. On a maintenant $M^{(17)} = M^{(15)}$,

$a^{(16)} = a^{(15)}$, ce qui donne $n = 15$, & l'on a la table suivante, dans laquelle on a pris $M^{(18)} = M^{(14)}$, $a^{(17)} = a^{(14)}$, $\mu^{(16)} = \mu^{(14)}$, & ainsi de suite jusqu'à $M^{(31)} = 1$.

$$109u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2} \quad a^{(1)} = 10$$
$$109u^{(2)2} - 9 = t^{(2)2} \quad a^{(2)} = 8 \quad \mu^{(1)} = 2$$
$$109u^{(3)2} + 5 = t^{(3)2} \quad a^{(3)} = 7 \quad \mu^{(2)} + 3$$
$$109u^{(4)2} - 12 = t^{(4)2} \quad a^{(4)} = 5 \quad \mu^{(3)} = 1$$
$$109u^{(5)2} + 7 = t^{(5)2} \quad a^{(5)} = 9 \quad \mu^{(4)} = 2$$
$$109u^{(6)2} - 4 = t^{(6)2} \quad a^{(6)} = 7 \quad \mu^{(5)} = 4$$
$$109u^{(7)2} + 15 = t^{(7)2} \quad a^{(7)} = 8 \quad \mu^{(6)} = 1$$
$$109u^{(8)2} - 3 = t^{(8)2} \quad a^{(8)} = 10 \quad \mu^{(7)} = 6$$
$$109u^{(9)2} + 3 = t^{(9)2} \quad a^{(9)} = 8 \quad \mu^{(8)} = 6$$
$$109u^{(10)2} - 15 = t^{(10)2} \quad a^{(10)} = 7 \quad \mu^{(9)} = 1$$
$$109u^{(11)2} + 4 = t^{(11)2} \quad a^{(11)} = 9 \quad \mu^{(10)} = 4$$
$$109u^{(12)2} - 7 = t^{(12)2} \quad a^{(12)} = 5 \quad \mu^{(11)} = 2$$
$$109u^{(13)2} + 12 = t^{(13)2} \quad a^{(13)} = 7 \quad \mu^{(12)} = 1$$
$$109u^{(14)2} - 5 = t^{(14)2} \quad a^{(14)} = 8 \quad \mu^{(13)} = 3$$
$$109u^{(15)2} + 9 = t^{(15)2} \quad a^{(15)} = 10 \quad \mu^{(14)} = 2$$
$$109u^{(16)2} - 1 = t^{(16)2} \quad a^{(16)} = 10 \quad \mu^{(15)} = 20$$
$$109u^{(17)2} + 9 = t^{(17)2} \quad a^{(17)} = 8 \quad \mu^{(16)} = 2$$
$$109u^{(18)2} - 5 = t^{(18)2} \quad a^{(18)} = 7 \quad \mu^{(17)} = 3$$
$$109u^{(19)2} + 12 = t^{(19)2} \quad a^{(19)} = 5 \quad \mu^{(18)} = 1$$
$$109u^{(20)2} - 7 = t^{(20)2} \quad a^{(20)} = 9 \quad \mu^{(19)} = 2$$
$$109u^{(21)2} + 4 = t^{(21)2} \quad a^{(21)} = 7 \quad \mu^{(20)} = 4$$
$$109u^{(22)2} - 15 = t^{(22)2} \quad a^{(22)} = 8 \quad \mu^{(21)} = 1$$
$$109u^{(23)2} + 3 = t^{(23)2} \quad a^{(23)} = 10 \quad \mu^{(22)} = 6$$
$$109u^{(24)2} - 3 = t^{(24)2} \quad a^{(24)} = 8 \quad \mu^{(23)} = 6$$
$$109u^{(25)2} + 15 = t^{(25)2} \quad a^{(25)} = 7 \quad \mu^{(24)} = 1$$
$$109u^{(26)2} - 4 = t^{(26)2} \quad a^{(26)} = 9 \quad \mu^{(25)} = 4$$
$$109u^{(27)2} + 7 = t^{(27)2} \quad a^{(27)} = 5 \quad \mu^{(26)} = 2$$
$$109u^{(28)2} - 12 = t^{(28)2} \quad a^{(28)} = 7 \quad \mu^{(27)} = 1$$
$$109u^{(29)2} + 5 = t^{(29)2} \quad a^{(29)} = 8 \quad \mu^{(28)} = 3$$

$109u^{(30)2} - 9 = t^{(30)2}$ $a^{(30)} = 10$ $\mu^{(29)} = 2$
$109u^{(31)2} + 1 = t^{(31)2}$.

Avant d'aller plus loin, je remarque qu'il n'eſt pas beſoin de former une double ſuite, l'une pour les quantités u, l'autre pour les quantités t, car le § 12 nous fourniſſant cette équation $t^{(2n+1)} = a^{(1)}u^{(2n+1)} + u^{(2n)}$, on aura $t^{(2n+1)}$ au moyen de $u^{(2n)}$ & de $u^{(2n+1)}$, il ſuffira de mettre $a^{(1)}$ au deſſus de $u^{(2n+1)}$, & de continuer le procédé. Je remarque de plus que dans le cas où l'on parvient à l'équation $Bu^2 - 1 = t^2$, on n'a pas beſoin d'aller plus loin, parce qu'au moyen des valeurs u & t on parviendra aux valeurs u^{2n+1}, t^{2n+1} de l'équation $Bu^{(2n+1)2} + 1 = t^{(2n+1)2}$. En effet, ſi l'on fait $u^{2n+1} = 2ut$, $t^{2n+1} = t^2 + Bu^2$, l'équation $Bu^{(2n+1)2} + 1 = t^{(2n+1)2}$ deviendra $4Bu^2t^2 + 1 = t^4 + 2Bu^2t^2 + B^2u^4$ ou $1 = t^4 - 2Bu^2t^2 + B^2u^4 = (Bu^2 - t^2)^2$. Donc $Bu^2 - t^2 = 1$, ou $Bu^2 - 1 = t^2$. Ces deux obſervations abrégeront beaucoup le calcul de l'exemple que nous traitons. En vertu de la première je forme la ſuite,

10 2 3 1 2 4 1 6 6 1 4 2 1 3
0 1 2 7 9 25 109 134 913 5612 6525 31712 69949 101661
2 10

374932 851525 8890182. On a donc $u^{(16)} = 851525$, $t^{(16)} = 8890182$. Donc $u^{(31)} = 2u^{(16)} + t^{(16)} = 151404244455100$, $t^{(31)} = t^{(16)2} + Bu^{(16)2} = 1580706719862 49$. On aura donc en général

$$u^{(31)} = \frac{(1580706719862 49 + 151404244551 00\sqrt{109})^p - (1580706719862 49 - 151404244551 00\sqrt{109})^p}{2\sqrt{109}}$$

$$t^{(31)} = \frac{(1580706719862 49 + 151404244551 00\sqrt{109})^p + (1580706719862 49 - 151404244551 00\sqrt{109})^p}{2}.$$

§ 19. Il ſuit de ce que j'ai expoſé jusqu'ici que la queſtion propoſée ſe réduit à celle-ci. Étant donnée une ſolution de l'équation

$Bu^2 + 1 = t^2$ trouver une infinité d'autres ſolutions de la même équation. En effet la nature de cette équation eſt telle qu'elle fournit immédiatement la ſolutiou la plus ſimple, ſavoir $u = 0$, $t = 1$. Voilà pourquoi cette équation eſt toujours réſoluble en nombres entiers, ce qui n'a pas lieu pour l'équation $Bu^2 - 1 = t^2$, parce que celle-ci ne fournit point immédiatement de ſolution poſſible.

§ 20. Nous avons traité jusqu'ici le cas où ϱ eſt impair, traitons maintenant le cas où ϱ eſt pair; faiſons $\varrho = 2n$, nous aurons les équations ſuivantes,

$Bu^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$	$M^{(2)} = a^{(1)2} - B$	$a^{(2)} = -\mu^{(1)} M^{(2)} - a^{(1)}$
$Bu^{(2)2} + M^{(2)} = t^{(2)2}$	$M^{(3)} M^{(2)} = a^{(2)2} - B$	$a^{(3)} = \mu^{(2)} M^{(3)} - a^{(2)}$
— — —	— — —	— — —
— — —	— — —	— — —
$Bu^{(2n-1)2} + M^{(2n-1)} = t^{(2n-1)2}$	$M^{(2n-1)} M^{(2n)} = a^{(2n-1)2} - B$	$a^{(2n-1)} = \mu^{(2n-2)} M^{(2n-1)} - a^{(2n-2)}$
$Bu^{(2n)2} + M^{(2n)} = t^{(2n)2}$		

Si l'on fait $M^{(2n)} = -1$, $a^{(2n-1)} = a^{(1)}$, on aura $-M^{(2n-1)} = a^{(1)2} - B$, donc $M^{(2n-1)} = -M^{(2)}$; $a^{(1)} = -\mu^{(1)} M^{(2)} - a^{(2)} = -\mu^{(2n-2)} M^{(2)} - a^{(2n-2)}$; donc $M^{(2)} (\mu^{(2n-2)} - \mu^{(1)}) = a^{(2)} - a^{(2n-2)}$, donc $\mu^{(2n-2)} = \mu^{(1)}$, $a^{(2n-2)} = a^{(2)}$. En opérant toujours de la même manière, on trouvera

$a^{(2n-1)} = a^{(1)}$	$\mu^{(2n-2)} = \mu^{(1)}$	$M^{(2n)} = -1$
$a^{(2n-2)} = a^{(2)}$	$\mu^{(2n-3)} = \mu^{(2)}$	$M^{(2n-1)} = -M^{(2)}$
$a^{(2n-3)} = a^{(3)}$	$\mu^{(2n-4)} = \mu^{(3)}$	$M^{(2n-2)} = -M^{(3)}$
$a^{(2n-4)} = a^{(4)}$		$M^{(2n-3)} = -M^{(4)}$
— — —	— — —	— — —
— — —	— — —	— — —
$a^{(n+1)} = a^{(n-1)}$	$\mu^{(n+1)} = \mu^{(n+2)}$	$M^{(n+2)} = -M^{(n-1)}$
$a^{(n)} = a^{(n)}$	$\mu^{(n)} = \mu^{(n-1)}$	$M^{(n+1)} = -M^{(n)}$

On a donc $M^{(3)} M^{(2)} = a^{(2)2} - B = (\mu^{(1)} M^{(2)} + a^{(1)})^2 - B = \mu^{(1)2} M^{(2)2} + 2\mu^{(1)} a^{(1)} M^{(2)} + a^{(1)2} - B = \mu^{(1)2} M^{(2)2} + 2\mu^{(1)} a^{(1)} M^{(2)} + M^{(2)}$. Donc $M^{(3)} = 1 + 2\mu^{(1)} a^{(1)} + \mu^{(1)2} M^{(2)}$. On formera en procédant de même la table ſuivante; $M^{(2)} = a^{(1)2} - B$,

$-B$, $M^{(3)} = 1 + 2\mu^{(1)}a^{(1)} + \mu^{(1)2}M^{(2)}$, $M^{(4)} = M^{(2)} - 2\mu^{(2)}a^{(2)} + \mu^{(2)2}M^{(3)}$, $M^{(5)} = M^{(3)} + 2\mu^{(3)}a^{(3)} + \mu^{(3)2}M^{(4)}$, $M^{(6)} = M^{(4)} - 2\mu^{(4)}a^{(4)} + \mu^{(4)2}M^{(5)}$....

§ 21. Maintenant faiſant $u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$, nous aurons la table ſuivante:

$u^{(1)} = 0$	$t^{(1)} = 1$
$u^{(2)} = 1$	$t^{(2)} = a^{(1)}$
$u^{(3)} = \mu^{(1)}$	$t^{(3)} = \mu^{(1)}t^{(2)} + 1$
$u^{(4)} = \mu^{(2)}u^{(3)} + 1$	$t^{(4)} = \mu^{(2)}t^{(3)} + t^{(2)}$
$u^{(5)} = \mu^{(3)}u^{(4)} + u^{(3)}$	$t^{(5)} = \mu^{(3)}t^{(4)} + t^{(3)}$
— — —	— — —
— — —	— — —
$u^{(n-2)} = \mu^{(n-4)}u^{(n-3)} + u^{(n-4)}$	$t^{(n-2)} = \mu^{(n-4)}t^{(n-3)} + t^{(n-4)}$
$u^{(n-1)} = \mu^{(n-3)}u^{(n-2)} + u^{(n-3)}$	$t^{(n-1)} = \mu^{(n-3)}t^{(n-2)} + t^{(n-3)}$
$u^{(n)} = \mu^{(n-2)}u^{(n-1)} + u^{(n-2)}$	$t^{(n)} = \mu^{(n-2)}t^{(n-1)} + t^{(n-2)}$
$u^{(n+1)} = \mu^{(n-1)}u^{(n)} + u^{(n-1)}$	$t^{(n+1)} = \mu^{(n-1)}t^{(n)} + t^{(n-1)}$
$u^{(n+2)} = \mu^{(n-1)}u^{(n+1)} + u^{(n)}$	$t^{(n+2)} = \mu^{(n-1)}t^{(n+1)} + t^{(n)}$
$u^{(n+3)} = \mu^{(n-2)}u^{(n+2)} + u^{(n+1)}$	$t^{(n+3)} = \mu^{(n-2)}t^{(n+2)} + t^{(n+1)}$
— — —	— — —
— — —	— — —
$u^{(2n-2)} = \mu^{(3)}u^{(2n-3)} + u^{(2n-4)}$	$t^{(2n-2)} = \mu^{(3)}t^{(2n-3)} + t^{(2n-4)}$
$u^{(2n-1)} = \mu^{(2)}u^{(2n-2)} + u^{(2n-3)}$	$t^{(2n-1)} = \mu^{(2)}t^{(2n-2)} + t^{(2n-3)}$
$u^{(2n)} = \mu^{(1)}u^{(2n-1)} + u^{(2n-2)}$	$t^{(2n)} = \mu^{(1)}t^{(2n-1)} + t^{(2n-2)}$

On voit par ces tables que ſuppoſant une fraction continue de la forme

$$a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{1}{\mu^{(1)}}$$

on aura

$\frac{t^{(2)}}{u^{(2)}} = a^{(1)}$, $\frac{t^{(3)}}{u^{(3)}} = a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}}$, $\frac{t^{(4)}}{u^{(4)}} = a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}}$ . . . . .

$\frac{t^{(2n)}}{u^{(2n)}} = a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{1}{\mu^{(1)}}$, ce qui réſulte immédiatement de la théorie des fractions continues. Maintenant on a, en vertu des mêmes formules, $\frac{u^{(2n-1)}}{u^{(2n)}} = \frac{1}{\frac{u^{(2n)}}{u^{(2n-1)}}} = \frac{1}{\frac{\mu^{(1)} u^{(2n-1)} + u^{(2n-2)}}{u^{(2n-1)}}} =$

$\frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\frac{u^{(2n-1)}}{u^{(2n-2)}}}} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\frac{\mu^{(2)} u^{(2n-2)} + u^{(2n-3)}}{u^{(2n-2)}}}} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{u^{(2n-3)}}{u^{(2n-2)}}}}$

$= \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\frac{u^{(2n-2)}}{u^{(2n-3)}}}}} = \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)} + \frac{1}{\frac{\mu^{(3)} u^{(2n-3)} + u^{(2n-4)}}{u^{(2n-3)}}}}}$ &c.

$= \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{1}{\mu^{(1)}}}$. Donc $\frac{t^{(2n)}}{u^{(2n)}} = a^{(1)} + \frac{u^{(2n-1)}}{u^{(2n)}}$

$t^{(2n)} = a^{(1)} u^{(2n)} + u^{(2n-1)}$, $t^{(2n)} - a^{(1)} u^{(2n)} = u^{(2n-1)}$.

Or $t^{(2n)} u^{(2n-1)} - t^{(2n-1)} u^{(2n)} = -1$. Donc $t^{(2n)} =$

$\frac{t^{(2n-1)}u^{(2n)} - 1}{u^{(2n-1)}}$, $u^{(2n-1)} = \frac{t^{(2n-1)}u^{(2n)} - 1}{u^{(2n-1)}} - a^{(1)}u^{(2n)}$, $t^{(2n-1)} - a^{(1)}u^{(2n)} = \frac{u^{(2n-1)2} + 1}{u^{(2n)}}$, $\frac{t^{(2n-1)} - a^{(1)}u^{(2n-1)}}{u^{(2n-1)2} + 1} = \frac{1}{u^{(2n)}}$, $\frac{t^{(2n-1)2} - a^{(1)2}u^{(2n-1)2}}{u^{(2n-1)2} + 1} = \frac{t^{(2n-1)} + a^{(1)}u^{(2n-1)}}{u^{(2n)}}$. Or $Bu^{(2n-1)2} - t^{(2n-1)2} = M^{(2)} = a^{(1)2} - B$, donc $B = \frac{t^{(2n-1)2} + a^{(1)2}}{u^{(2n-1)2} + 1}$, $B - a^{(1)2} = \frac{t^{(2n-1)2} - u^{(2n-1)2}a^{(1)2}}{u^{(2n-1)2} + 1} = \frac{t^{(2n-1)} + a^{(1)}u^{(2n-1)}}{u^{(2n)}}$ $= \frac{2a^{(1)}u^{(2n-1)} + t^{(2n-1)} - a^{(1)}u^{(2n-1)}}{u^{(2n)}}$. Donc $(\sqrt{B} - a^{(1)})(\sqrt{B} + a^{(1)})$ $= \frac{(\sqrt{B} + a^{(1)} - (\sqrt{B} - a^{(1)}))u^{(2n-1)} + t^{(2n-1)} - a^{(1)}u^{(2n-1)}}{u^{(2n)}}$, $\sqrt{B} - a^{(1)}$ $= \frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})u^{(2n-1)} + t^{(2n-1)} - a^{(1)}u^{(2n-1)}}{(\sqrt{B} + a^{(1)})u^{(2n)} + u^{(2n-1)}}$.

§ 22. On aura maintenant toujours en vertu des mêmes formules,

$$
\begin{aligned}
t^{(2n)} - a^{(1)}u^{(2n)} = u^{(2n-1)} &= \mu^{(1)}(t^{(2n-1)} - a^{(1)}u^{(2n-2)}) + t^{(2n-2)} - a^{(1)}u^{(2n-2)}\\
t^{(2n-1)} - a^{(1)}u^{(2n-1)} &= \mu^{(2)}(t^{(2n-2)} - a^{(1)}u^{(2n-3)}) + t^{(2n-3)} - a^{(1)}u^{(2n-3)}\\
t^{(2n-2)} - a^{(1)}u^{(2n-2)} &= \mu^{(3)}(t^{(2n-3)} - a^{(1)}u^{(2n-3)}) + t^{(2n-4)} - a^{(1)}u^{(2n-4)}\\
&\quad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\\
&\quad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\\
t^{(n+3)} - a^{(1)}u^{(n+3)} &= \mu^{(n-2)}(t^{(n+2)} - a^{(1)}u^{(n+2)}) + t^{(n+1)} - a^{(1)}u^{(n+1)}\\
t^{(n+2)} - a^{(1)}u^{(n+2)} &= \mu^{(n-1)}(t^{(n+1)} - a^{(1)}u^{(n+1)}) + t^{(n)} - a^{(1)}u^{(n)}\\
t^{(n+1)} - a^{(1)}u^{(n+1)} &= \mu^{(n-2)}(t^{(n)} - a^{(1)}u^{(n)}) + t^{(n-1)} - a^{(1)}u^{(n-1)}\\
&\quad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\\
&\quad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\qquad\qquad\text{—}\\
t^{(4)} - a^{(1)}u^{(4)} &= \mu^{(2)}(t^{(3)} - a^{(1)}u^{(3)}) + t^{(2)} - a^{(1)}u^{(2)}\\
t^{(3)} - a^{(1)}u^{(3)} &= \mu^{(1)}(t^{(2)} - a^{(1)}u^{(2)}) + t^{(1)} - a^{(1)}u^{(1)}\\
t^{(2)} - a^{(1)}u^{(2)} &= 0\\
t^{(1)} - a^{(1)}u^{(1)} &= 1.
\end{aligned}
$$

§ 23. On a maintenant $\sqrt{B} - a^{(1)} = \frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})u^{(2n-1)} + t^{(2n-1)} - a^{(1)}u^{(2n-1)}}{(\sqrt{B} + a^{(1)})u^{(2n)} + u^{(2n-1)}} = \frac{1}{\frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})(\mu^{(1)}u^{(2n-1)} + u^{(2n-2)}) + u^{(2n-1)}}{(\sqrt{B} + a^{(1)})u^{(2n-1)} + t^{(2n-1)} - a^{(1)}u^{(2n-1)}}}$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{(VB + a^{(1)})\,u^{(2n-2)} + u^{(2n-1)} - \mu^{(1)}\,t^{(2n-1)} - a^{(1)}\,u^{(2n-1)}}{(VB + a^{(1)})\,u^{(2n-1)} + t^{(2n-1)} - a^{(1)}\,u^{(2n-1)}} =$$

(à cauſe de $u^{(2n-1)} - \mu^{(1)}\,(t^{(2n-1)} - a^{(1)}u^{(2n-1)}) = t^{(2n-2)} - a^{(1)}\,u^{(2n-2)}$)

$$\frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\dfrac{(VB + a^{(1)})\,u^{(2n-1)} + t^{(2n-1)} - a^{(1)}\,u^{(2n-1)}}{(VB + a^{(1)})\,u^{(2n-2)} + t^{(2n-2)} - a^{(1)}\,u^{(2n-2)}}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\dfrac{(VB + a^{(1)})\,(\mu^{(2)}\,u^{(2n-2)} + u^{(2n-1)}) + t^{(2n-1)} - a^{(1)}\,u^{(2n-1)}}{(VB + a^{(1)})\,u^{(2n-2)} + t^{(2n-2)} - a^{(1)}\,u^{(2n-2)}}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{(VB + a^{(1)})\,u^{(2n-1)} + t^{(2n-1)} - a^{(1)}\,u^{(2n-1)} - \mu^{(2)}\,(t^{(2n-2)} - a^{(1)}\,u^{(2n-2)})}{(VB + a^{(1)})\,u^{(2n-2)} + t^{(2n-2)} - a^{(1)}\,u^{(2n-2)}} =$$

$$\frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{1}{\dfrac{(VB + a^{(1)})\,u^{(2n-1)} + t^{(2n-1)} - a^{(1)}\,u^{(2n-1)}}{(VB + a^{(1)})\,u^{(2n-2)} + t^{(2n-2)} - a^{(1)}\,u^{(2n-2)}}}$$

(à cauſe de $t^{(2n)} - a^{(1)}\,u^{(2n)} - \mu^{(2)}\,(t^{(2n-1)} - a^{(1)}\,u^{(2n-1)}) = t^{(2n-2)} - a^{(1)}\,u^{(2n-2)}$) =

$$\frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \ddots + \frac{1}{\mu^{(n-2)}} + \frac{1}{\dfrac{(VB + a^{(1)})\,u^{(n+2)} + t^{(n+2)} - a^{(1)}\,u^{(n+2)}}{(VB + a^{(1)})\,u^{(n+1)} + t^{(n+1)} - a^{(1)}\,u^{(n+1)}}} =$$

$$\frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-2)}} + \frac{1}{\dfrac{(VB + a^{(1)})\,\mu^{(n-1)}\,a^{(n+1)} + u^{(n)}) + \varepsilon^{(n+2)} - a^{(1)}\,u^{(n+2)}}{(VB + a^{(1)})\,u^{(n+1)} + \varepsilon^{(n+1)} - a^{(1)}\,u^{(n+1)}}} =$$

$$\frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-2)}} + \frac{1}{\dfrac{(VB + a^{(1)})\,u^{(n+1)} + \varepsilon^{(n+2)} - a^{(1)}\,u^{(n+2)} - \mu^{(n-1)}(\varepsilon^{(n+1)} - a^{(1)}u^{n+1})}{(VB + a^{(1)})\,u^{(n+1)} + \varepsilon^{(n+1)} - a^{(1)}\,u^{(n+1)}}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{\dfrac{(VB + a^{(1)})\,u^{(n+1)} + \varepsilon^{(n+1)} - a^{(1)}\,u^{(n+1)}}{(VB + a^{(1)})\,u^{(n)} + \varepsilon^{(n)} - a^{(1)}\,u^{(n)}}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{\dfrac{(VB + a^{(1)})\,(\mu^{(n-1)}\,u^{(n)} + u^{(n-1)}) + \varepsilon^{(n+1)} - a^{(1)}\,u^{(n+1)}}{(VB + a^{(1)})\,u^{(n)} + \varepsilon^{(n)} - a^{(1)}\,u^{(n)}}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{(VB + a^{(1)})\,u^{(n-1)} + \varepsilon^{(n+1)} - a^{(1)}\,u^{(n+1)} - \mu^{(n-1)}\,(\varepsilon^{(n)} - a^{(1)}\,u^{(n)})}{(VB + a^{(1)})\,u^{(n)} + \varepsilon^{(n)} - a^{(1)}\,u^{(n)}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(n-1)} + t^{(n)} - a^{(1)} u^{(n)}}{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(n-1)} + t^{(n-1)} - a^{(1)} u^{(n-1)}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{\frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})(\mu^{(n-2)} u^{(n-1)} + u^{(n-2)}) + t^{(n)} - a^{(1)} u^{(n)}}{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(n-1)} + t^{(n-1)} - a^{(1)} u^{(n-1)}}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} + \frac{1}{\mu^{(n-2)}} + \frac{1}{\frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(n-1)} + t^{(n-1)} - a^{(1)} u^{(n-1)}}{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(n-2)} + t^{(n-2)} - a^{(1)} u^{(n-2)}}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdot + \frac{1}{\mu^{(n-2)}} + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} : \cdot + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(2)} + t^{(2)} - a^{(1)} u^{(2)}}{(\sqrt{B} + a^{(1)})\, u^{(1)} + t^{(1)} - a^{(1)} u^{(1)}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdots + \frac{1}{\mu^{(n-1)} + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} \cdot \cdots + \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{\sqrt{B} + a^{(1)}}{1}}}}$$

$$= \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)}} \cdot \cdots + \frac{1}{\mu^{(n-1)} + \frac{1}{\mu^{(n-1)}} \cdot \cdots + \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{2a^{(1)} + \sqrt{B} - a^{(1)}}}}}}.$$

§ 24. Il ſuit de là que $a^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$ ſont les nombres qui réſultent de la réduction de $\sqrt{B}$ en fraction continue, & que par conſéquent on aura les valeurs cherchées $u^{(2n)}$, $t^{(2n)}$ dès qu'on connoît une valeur de $u^{(1)}$ & $t^{(1)}$.

§ 25. On voit donc que lorsque le nombre des équations $Bu^2 + 1 = t^2$ eſt impair, les quantités μ ſont égales deux à deux à l'exception de celle du milieu qui eſt unique, & que l'on revient à une équation de même forme. Lorsque le nombre de ces équations eſt pair, on arrive à une équation de la forme $Bu^2 - 1 = t^2$. Mais nous avons vu § 18 que cette dernière équation ramène néceſſairement à l'équation $Bu^2 + 1 = t^2$. Donc dans tous les cas l'équation eſt réſoluble comme l'a démontré M. de la Grange. Quant à l'équation $Bu^2 - 1 = t^2$, elle n'eſt réſoluble que lorsque les quantités μ provenant de la réduction de $\sqrt{B}$ en fraction continue ſont égales deux à deux. Dans ce cas chaque valeur de l'équation $Bu^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$ en donnera une de l'équation $Bu^{(1)2} - 1 = t^{(1)2}$; ainſi cette équation aura une infinité de valeurs, ou n'en aura aucune. M. Euler dans ſes *Opuscula Analytica* T. 1. p. 311 a démontré fort ſimplement la relation qui exiſte entre ces deux eſpèces d'équations.

§ 26. Les obſervations précédentes conduiſent naturellement à la ſolution de l'équation $Bu^{(t)2} + M^{(t)2} = t^{(t)2}$ que M. de la Grange

a réſolue le premier, & ſur laquelle M. le Gendre a donné de très-belles recherches dans ſa théorie des nombres. Je reprends les formules des § 4 & 5, & je remets la quantité ϱ au lieu de $2n+1$, ce qui donne

$$
\begin{aligned}
M^{(2)} &= a^{(1)2} - B \\
M^{(2)} M^{(3)} &= a^{(2)2} - B \\
M^{(3)} M^{(4)} &= a^{(3)2} - B \\
M^{(4)} M^{(5)} &= a^{(4)2} - B \\
&\text{---} \\
M^{(\varrho-3)} M^{(\varrho-2)} &= a^{(\varrho-3)2} - B \\
M^{(\varrho-2)} M^{(\varrho-1)} &= a^{(\varrho-2)2} - B \\
M^{(\varrho-1)} M^{(\varrho)} &= a^{(\varrho-1)2} - B \\
&\text{---}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
a^{(2)} &= \mu^{(1)} M^{(2)} - a^{(1)} \\
a^{(3)} &= \mu^{(2)} M^{(3)} - a^{(2)} \\
a^{(4)} &= \mu^{(3)} M^{(4)} - a^{(3)} \\
a^{(5)} &= \mu^{(4)} M^{(5)} - a^{(4)} \\
&\text{---} \\
a^{(\varrho-3)} &= \mu^{(\varrho-4)} M^{(\varrho-3)} - a^{(\varrho-4)} \\
a^{(\varrho-2)} &= \mu^{(\varrho-3)} M^{(\varrho-2)} - a^{(\varrho-3)} \\
a^{(\varrho-1)} &= \mu^{(\varrho-2)} M^{(\varrho-1)} - a^{(\varrho-2)} \\
&\text{---}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u^{(1)} &= 0 \\
u^{(2)} &= 1 \\
u^{(3)} &= \mu^{(1)} \\
u^{(4)} &= \mu^{(2)} u^{(3)} + 1 \\
u^{(5)} &= \mu^{(3)} u^{(4)} + u^{(3)} \\
u^{(6)} &= \mu^{(4)} u^{(5)} + u^{(4)} \\
&\text{---} \\
u^{(\varrho-3)} &= \mu^{(\varrho-5)} u^{(\varrho-4)} + u^{(\varrho-5)} \\
u^{(\varrho-2)} &= \mu^{(\varrho-4)} u^{(\varrho-3)} + u^{(\varrho-4)} \\
u^{(\varrho-1)} &= \mu^{(\varrho-3)} u^{(\varrho-2)} + u^{(\varrho-3)} \\
u^{(\varrho)} &= \mu^{(\varrho-2)} u^{(\varrho-1)} + u^{(\varrho-2)}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
t^{(1)} &= 1 \\
t^{(2)} &= a^{(1)} \\
t^{(3)} &= \mu^{(1)} t^{(2)} + 1 \\
t^{(4)} &= \mu^{(2)} t^{(3)} + t^{(2)} \\
t^{(5)} &= \mu^{(3)} t^{(4)} + t^{(3)} \\
t^{(6)} &= \mu^{(4)} t^{(5)} + t^{(4)} \\
&\text{---} \\
t^{(\varrho-3)} &= \mu^{(\varrho-5)} t^{(\varrho-4)} + t^{(\varrho-5)} \\
t^{(\varrho-2)} &= \mu^{(\varrho-4)} t^{(\varrho-3)} + t^{(\varrho-4)} \\
t^{(\varrho-1)} &= \mu^{(\varrho-3)} t^{(\varrho-2)} + t^{(\varrho-3)} \\
t^{(\varrho)} &= \mu^{(\varrho-2)} t^{(\varrho-1)} + t^{(\varrho-2)}
\end{aligned}
$$

§ 27. On tire de là $\frac{t^{(2)}}{u^{(2)}} = \frac{a^{(1)}}{1}$, $\frac{t^{(3)}}{u^{(3)}} = \frac{\mu^{(1)} t^{(2)} + 1}{\mu^{(1)}} = a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}}$, $\frac{t^{(4)}}{u^{(4)}} = \frac{\mu^{(2)} t^{(3)} + t^{(2)}}{\mu^{(2)} u^{(3)} + 1} = \frac{\mu^{(2)} \mu^{(1)} a^{(1)} + \mu^{(2)} + a^{(1)}}{\mu^{(2)} \mu^{(1)} + 1} = a^{(1)} + \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(2)} \mu^{(1)} + 1} = a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(2)}}}$, $\frac{t^{(5)}}{u^{(5)}} = \frac{\mu^{(3)} t^{(4)} + t^{(3)}}{\mu^{(3)} u^{(4)} + u^{(3)}} =$

$\mu^{(2)}$

$$\frac{\mu^{(1)}\mu^{(2)}+1)\varepsilon^{(1)}+\mu^{(1)}\varepsilon^{(-1)}}{(\mu^{(1)}\mu^{(2)}+1)a^{(1)}+\mu^{(1)}} = a^{(1)} + \frac{1}{\dfrac{\mu^{(1)}+(\mu^{(1)}\mu^{(2)}+1)a^{(1)}}{(\mu^{(1)}\mu^{(2)}+1)(\varepsilon^{(1)}-a^{(1)}\varepsilon^{(2)})}} =$$

$$a^{(1)} + \frac{1}{\dfrac{(\mu^{(1)}\mu^{(-1)}+1)\mu^{(1)}+\mu^{(1)}}{\mu^{(1)}\mu^{(2)}+1}} = a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\dfrac{\mu^{(1)}\mu^{(2)}+1}{\mu^{(1)}}}$$

$$= a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{1}{\mu^{(1)}} \quad ; \quad \frac{\varepsilon^{(2)}}{a^{(2)}} = \frac{(\mu^{(2)}\mu^{(3)}+1)(\mu^{(3)}\varepsilon^{(3)}+a^{(3)})+\mu^{(2)}\varepsilon^{(3)}}{(\mu^{(2)}\mu^{(3)}+1)(\mu^{(3)}\mu^{(4)}+1)+\mu^{(2)}\mu^{(4)}}$$

$$= \frac{(\mu^{(2)}\mu^{(3)}+1)a^{(3)}+(\mu^{(2)}\mu^{(3)}\mu^{(4)}+\mu^{(2)}+\mu^{(4)})\varepsilon^{(3)}}{\mu^{(2)}\mu^{(3)}+1+(\mu^{(2)}\mu^{(3)}\mu^{(4)}+\mu^{(2)}+\mu^{(4)})a^{(3)}} = a^{(2)} +$$

$$\frac{1}{\dfrac{\mu^{(2)}\mu^{(3)}+(\mu^{(2)}\mu^{(3)}\mu^{(4)}+\mu^{(2)}+\mu^{(4)})a^{(3)}}{\mu^{(2)}\mu^{(3)}\mu^{(4)}+\mu^{(2)}+\mu^{(4)}}} = a^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(3)}} + \frac{1}{\dfrac{\mu^{(2)}\mu^{(3)}\mu^{(4)}+\mu^{(2)}+\mu^{(4)}}{\mu^{(2)}\mu^{(3)}+1}}$$

$$= a^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(3)}} + \frac{1}{\mu^{(4)}} + \frac{1}{\dfrac{\mu^{(2)}\mu^{(3)}+1}{\mu^{(4)}}} \qquad = a^{(2)} + \frac{1}{\mu^{(3)}} + \frac{1}{\mu^{(4)}} + \frac{1}{\mu^{(3)}} + \frac{1}{\mu^{(4)}}.$$

L'analogie eſt maintenant évidente, & l'on a $\frac{\varepsilon^{(\varrho)}}{a^{(\varrho)}} = a^{(1)} + \frac{1}{\mu^{(1)}} + \frac{1}{\mu^{(2)}} + \frac{1}{\mu^{(3)}} + \ldots + \frac{1}{\mu^{(\varrho-2)}}$. Au reſte, il faut remarquer que dans le § précédent j'ai pris les valeurs de M ſans égard à leurs ſignes que j'ai ſuppoſées tous poſitifs. Cette forme eſt plus commode pour ce que j'ai à dire dans la ſuite.

§ 28. Nous avons vu en traitant de l'équation $Bu^2 + 1 = t^2$ que ce qui avoit mis en état de la réſoudre, c'eſt qu'on en connoiſſoit immédiatement une ſolution particulière, $u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$. Nous ſuppoſerons ici qu'on connoiſſe une ſolution particulière de l'équation $Bu^{(\prime)2} + M^{(\prime)} = t^{(\prime)2}$, on aura donc une valeur de la fraction $\frac{t^{(\prime)}}{u^{(\prime)}}$, on réduira cette fraction en fraction continue, ce qui donnera $a^{(1)}$, $\mu^{(1)}$, $\mu^{(2)}$ .... $\mu^{(\prime-2)}$, & par le moyen des formules du § 26. $t^{(2)}$, $t^{(3)}$ .... $t^{(\prime-2)}$, $t^{(\prime-1)}$; $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ .... $u^{(\prime-2)}$, $u^{(\prime-1)}$. On aura donc deux équations entre $t^{(\prime)}$, $u^{(\prime)}$, $t^{(1)}$, $u^{(1)}$. Mais nous avons vu ci-deſſus que $t^{(1)}$, $u^{(1)}$ ont toujours une infinité de valeurs. On aura donc auſſi une infinité de valeurs pour $t^{(\prime)}$, $u^{(\prime)}$. Soient $u^{(\prime)} = \alpha u^{(1)} + \beta t^{(1)}$, $t^{(\prime)} = \gamma t^{(1)} + \varepsilon u^{(1)}$, on aura en ſubſtituant ces valeurs dans l'équation $Bu^{(\prime)2} + M^{(\prime)} = t^{(\prime)2}$, $B\alpha^2 u^{(1)2} + 2\alpha B\beta u^{(1)} t^{(1)} + B\beta^2 t^{(1)2} + M^{(\prime)} = \gamma^2 t^{(1)2} + 2\gamma\varepsilon u^{(1)} t^{(1)} + \varepsilon u^{(1)2}$. Je fais $2\alpha B\beta = 2\gamma\varepsilon$, ce qui donne $\gamma = \alpha$, $\varepsilon = B\beta$, & l'équation devient $B\beta^2 (t^{(1)2} - Bu^{(1)2}) + M^{(\prime)} = \alpha^2 (t^{(1)2} - Bu^{(1)2})$ ou $B\beta^2 + M^{(\prime)} = \alpha^2$, donc $\beta = u^{(\prime)}$, $\alpha = t^{(\prime)}$, donc on a en général $u^{(\prime)} = t^{(\prime)} u^{(1)} \pm u^{(\prime)} t^{(1)}$, $t^{(\prime)} = t^{(\prime)} t^{(1)} \pm Bu^{(\prime)} u^{(1)}$. Il ſuit de là que ſi l'équation $Bu^{(\prime)2} + M^{(\prime)} = t^{(\prime)2}$ eſt poſſible, elle peut conduire à l'équation $Bu^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$ ou directement ou indirectement par le moyen des équations qui réſultent du développement de cette dernière formule & que nous avons expoſées ci-deſſus.

§ 29. Il s'agit donc de trouver une ſolution particulière de l'équation $Bu^{(\prime)2} + M^{(\prime)} = t^{(\prime)2}$. Pour cela, je prends dans le § 26 l'équation $M^{(\prime-1)} M^{(\prime)} = a^{(\prime-1)2} - B$, d'où l'on tire $M^{(\prime-1)} = \frac{a^{(\prime-1)2} - B}{M^{(\prime)}}$ équation fondamentale que M. de la Grange a enſeigné à réſoudre lorsque cela eſt poſſible. La réſolution de cette équation donne les valeurs $a^{(\prime-1)}$, $M^{(\prime-1)}$. J'ai maintenant § 26. $a^{(\prime-2)} = \mu^{(\prime-2)} M^{(\prime-1)} - a^{(\prime-1)}$. Comme il eſt indifférent que

cette équation donne $a^{(\iota-2)}$ positif ou négatif, puisque l'on n'emploie que le carré de cette quantité, on peut toujours prendre $\mu^{(\iota-2)}$ tel que $a^{(\iota-2)} < \frac{1}{2} a^{(\iota-1)}$, & l'on satisfait par là à l'équation $M^{(\iota-2)} = \frac{a^{(\iota-2)2} - B}{M^{(\iota-1)}}$, ce qui donne $M^{(\iota-2)} < \frac{M^{(\iota-1)}}{4}$ ou $< \frac{M^{(\iota-1)}}{4} + 1$ comme nous le verrons plus bas. On a ensuite $a^{(\iota-3)} = \mu^{(\iota-3)} M^{(\iota-2)} - a^{(\iota-2)}$ où l'on peut toujours prendre $\mu^{(\iota-3)}$ tel que $a^{(\iota-3)} < \frac{a^{(\iota-2)}}{2}$, & l'on satisfait par là à l'équation $M^{(\iota-3)} = \frac{a^{(\iota-2)2} - B}{M^{(\iota-2)}}$, ce qui donne $M^{(\iota-3)} < \frac{M^{(\iota-2)}}{4}$ ou $< \frac{M^{(\iota-2)}}{4} + 1$. L'on procédera de cette manière jusqu'à ce qu'on parvienne à une valeur de $M = 1$, ou à une valeur de M comprise dans le développement de l'équation $Bu^2 + 1 = t^2$, ce qui est nécessaire, puisque nous avons vu § 28 que l'équation $Bu^{(\iota)} + M^{(\iota)} = t^{(\iota)2}$ ne pouvoit être réfoluble fans conduire directement ou indirectement à l'équation $Bu^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$. Les quantités $\mu^{(\iota-2)}$, $\mu^{(\iota-3)}$ étant trouvées, on aura par les formules du § 26 les valeurs de u & t, où l'on conservera l'ambiguité des signes parce que les valeurs de $M^{(\iota)}$, $M^{(\iota-1)}$, $M^{(\iota-2)}$ &c. n'étant pas de nécessité alternativement positives & négatives, comme dans le développement de la formule $Bu^2 + 1 = t^2$, il faudra déterminer les signes d'après ceux des valeurs M.

§ 30. Tout se réduit donc à la résolution de l'équation $M^{(\iota-1)} = \frac{a^{(\iota-1)2} - B}{M^{(\iota)}}$, comme l'a fait voir M. de la Grange, qui en même temps a donné de très-belles recherches sur cette équation. Ce grand géomètre a fait voir d'abord qu'on peut toujours supposer $B < M^{(\iota)}$, car si $B > M^{(\iota)}$, on fera $B = mM^{(\iota)} + c$, c étant nécessairement $< M^{(\iota)}$, ce qui donne $M^{(\iota-1)} = \frac{a^{(\iota-1)} - mM^{(\iota)} - c}{M^{(\iota)}} = -m + \frac{a^{(\iota-1)2} - c}{M^{(\iota)}}$, & il s'agira uniquement de faire en sorte que

$\frac{a^{(t-1)2} - c}{M^{(t)}}$ ſoit un nombre entier. Suppoſant donc $B < M^{(t)}$ on fera $a^{(t-1)} = \mu M^{(t)} \pm b$, il eſt clair qu'à cauſe de l'ambiguité du ſigne, M pourra toujours être ſuppoſé $< \frac{M^{(t)}}{2}$, nous aurons donc $M^{(t-1)} = \frac{\mu^2 M^{(t)2} \pm 2\mu b M^{(t)} + b^2 - B}{M^{(t)}} = \mu^2 M^{(t)} \pm 2\mu b + \frac{b^2 - B}{M^{(t)}}$. Il s'agit donc uniquement de réduire à un nombre entier la formule $\frac{b^2 - B}{M^{(t)}}$ dans laquelle $b < \frac{M^{(t)}}{2}$ & prenant $\mu = 0$, on aura $M^{(t-1)} = \frac{b^2 - B}{M^{(t)}}$, donc $M^{(t-1)} < \frac{\frac{M^{(t)2}}{4} - B}{M^{(t)}}$, & à plus forte raiſon on aura $M^{(t-1)} < \frac{M^{(t)}}{4}$. Telle eſt la démonſtration de M. de la Grange. Ainſi dans l'équation $Bu^{(t-1)2} + M^{(t-1)} = t^{(t-1)2}$, $M^{(t-1)}$ eſt abaiſſé au deſſous de $\frac{M^{(t)}}{4}$. Si B étoit négatif on auroit $M^{(t-1)} < \frac{\frac{M^{(t)2}}{4} + B}{M^{(t)}}$ ou $< \frac{M^{(t)}}{4} + 1$, puiſqu'on a $B < M^{(t)}$.

§ 31. Ce procédé de M. de la Grange a donc réduit la difficulté à la ſolution d'une équation de cette forme $M' = \frac{a^2 - B}{M}$, dans laquelle B & M ſont donnés, & où $a < \frac{1}{2} M$, $M' < \frac{1}{4} M$. Il fait voir enſuite que ſi M eſt un nombre premier on ne peut trouver qu'une valeur primitive de a. Car ſi l'on a trouvé une valeur ſatisfaiſante de a que j'appellerai a', toutes les quantités $a' \pm \mu M$ (μ étant un nombre entier) ſatisferont auſſi. Suppoſons donc deux valeurs de a, a', a'' qui ſoient toutes deux au deſſous de $\frac{1}{2} M$, en ſorte qu'on ait les équations $M' = \frac{a'^2 - B}{M}$, $M'' = \frac{a''^2 - B}{M}$, on aura $B = a'^2 - MM' = a''^2 - MM''$. Donc $a'^2 - a''^2 = (a' + a'')(a' - a')$

$= M(M' - M'')$. Donc M étant un nombre premier diviſera néceſſairement la formule $\alpha' \pm \alpha''$. Donc $\alpha' \pm \alpha'' = eM$, e étant un nombre entier. Donc $\alpha'' = eM \pm \alpha'$, c'eſt-à-dire que α'' ſera une valeur dérivée de α', & ne pourra pas être au deſſous de $\frac{1}{2}M$ ſi α' l'eſt déjà. On ne peut donc, comme l'a fait voir M. de la Grange, trouver qu'une valeur primitive de α, ſi M eſt un nombre premier.

§ 32. Maintenant ſi M eſt un nombre compoſé, il eſt clair que ſi θ eſt un de ſes facteurs premiers, en ſorte que $M = \theta N$, & que l'on ait réſolu l'équation $MM' = \alpha'^2 - B$, on pourra auſſi réſoudre l'équation $\theta M'' = \alpha''^2 - B$, car l'équation $MM' = \alpha'^2 - B$ pouvant ſe réduire à cette forme $\theta NM' = \alpha'^2 - B$, on peut toujours prendre $N = NM'$. Donc ſi $\frac{a^2 - B}{M}$ eſt un nombre entier, $\frac{a^2 - B}{\theta}$ ſera auſſi un nombre entier, θ étant un quelconque des facteurs premiers de M. Soit donc $V(\alpha N\theta + B) = a'$, on aura par ce qui précède $V(aN\theta + B) = a' + nN\theta$, & par conſéquent $V(aN\theta + B) = a' + m\theta$. Soit enſuite $V(\alpha\theta + B) = b$, on aura auſſi $V(\alpha\theta + B) = b + p\theta$. On a donc $aN\theta + B = a'^2 + 2a'm\theta + m^2\theta^2$, $\alpha\theta + B = b^2 + 2bp\theta + p^2\theta^2$. Retranchant la ſeconde équation de la première, on a $\theta(aN - \alpha) = a'^2 - b^2 + 2\theta(a'm - bp) + \theta^2(m^2 - p^2)$. On voit donc que θ eſt un diviſeur de $a' \pm b$, donc $a' \pm b = e\theta$, e étant un nombre entier. Donc $a = e\theta \pm b$, donc $V(aN\theta + B) = V(aM + B) = b \pm (m \pm e)\theta = b \pm p'\theta$, en faiſant $p' = m \pm e$. Lors donc qu'on a trouvé une valeur $b = V(\alpha\theta + B$, on pourra faire $V(aM + B) = b \pm p'\theta$, & l'on aura autant de valeurs ſemblables qu'il y a de facteurs premiers dans M.

§ 33. Soit donc $M = \theta'\theta''\theta''' \ldots \theta^{(\nu)}$, θ', θ'', θ''', $\ldots$ $\theta^{(\nu)}$ étant des nombres premiers, & ſuppoſons qu'on ait trouvé $V(a'\theta' + B) = b'$, $V(a''\theta'' + B) = b''$, $V(a'''\theta''' + B) = b'''$ ..... $V(a^{(\nu)}\theta^{(\nu)} + B) = b^{(\nu)}$, b', b'', b''' $\ldots$ $b^{(\nu)}$ étant des nombres en-

tiers, ſans quoi l'équation ne ſeroit pas réſoluble, on aura par le § précédent $V(aM + B) = m'\beta' \pm b' = m''\beta'' \pm b'' = m'''\beta''' \pm b''' \ldots = m^{(\nu)}\beta^{(\nu)} \pm b^{(\nu)}$. C'eſt un problème indéterminé que celui qui conſiſte à trouver des formules qui ſatisfaſſent à ces différentes valeurs. Mais les combinaiſons étant nombreuſes à cauſe de l'ambiguité des ſignes, il ſera plus ſimple de calculer pour les différentes formules des ſuites correſpondantes, en prenant ſucceſſivement pour m', m'', m''', $\ldots$ $m^{(\nu)}$ tous les nombres naturels & en s'arrêtant à $\frac{M}{2}$. Les nombres qui ſe trouvent à la fois dans toutes les ſuites donneront autant de valeurs de a qui ſatisferont à l'équation. La difficulté ſe réduit donc à réſoudre l'équation $M' = \frac{a^2 - B}{M}$, en ſuppoſant que M eſt un nombre premier. On peut conſulter là deſſus les belles recherches de MM. de la Grange & le Gendre. J'en dirai quelque choſe dans le Mémoire ſuivant. Je paſſe aux exemples.

§ 34. Soit l'équation $46u^{(\epsilon)2} + 210 = t^{(\epsilon)2}$ qui a été traitée d'abord par M. de la Grange & enſuite par M. le Gendre. On a ici $M^{(\epsilon)} = 210$, $B = 46$, ce qui donne l'équation $M^{(\epsilon-1)} = \frac{a^{(\epsilon-1)2} - 46}{210}$. Or $210 = 2.3.5.7$, ce qui fournit les quatre formules ſuivantes: I. $\frac{a^2 - 46}{2}$. II. $\frac{a^2 - 46}{3}$. III. $\frac{a^2 - 46}{5}$. IV. $\frac{a^2 - 46}{7}$. Je prends la première $\frac{a^2 - 46}{2} = \frac{a^2}{2} - 23$. Il eſt évident que je puis prendre pour a tous les nombres pairs, & qu'en faiſant $a = 0$, ce qui eſt le plus petit nombre poſſible, on a -23. Donc par le §. 32, $V(210M^{(\epsilon-1)} + 46) = 2n'$. Je prends la ſeconde formule $\frac{a^2 - 46}{3} = \frac{a^2 - 1}{3} - 15$. Elle donne le réſultat -15 ſi l'on prend $a = 1$. Donc $V(210M^{(\epsilon-1)} + 46) = 3n'' \pm 1$. Je prends la troiſième formule $\frac{a^2 - 46}{5} = \frac{a^2 - 1}{5}$

-9. Elle donne le réſultat -9 en faiſant $a = 1$, donc $V(210M^{(\epsilon-1)} + 46) = 5n''' \pm 1$. Je prends la quatrième formule $\frac{a^2-46}{7} = \frac{a^2-4}{7} - 6$, elle donne -6 en faiſant $a = 2$. Donc $V(210M^{(\epsilon-1)} + 46) = 7n^{IV} \pm 2$. Il ſuffit maintenant de développer ces quatre formules en ſuites, en ne prenant que les nombres plus petits que $\frac{210}{2}$ ou 105. Comme la première ſuite $2n$ comprend tous les nombres pairs, je m'abſtiendrai de l'écrire, & je ne prendrai dans les autres ſuites que les nombres pairs, puisque les nombres qui doivent donner la ſolution de l'équation propoſée doivent être communs aux quatre ſuites. J'aurai donc en ayant égard à l'ambiguité des ſignes,

$3n'' \pm 1 =$ 4, 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52, 58, 64, 70, 76, 82, 88, 94, 100
2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 68, 74, 80, 86, 92, 98

$5n''' \pm 1 =$ 6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96
4, 14, 24, 34, 44, 54, 64, 74, 84, 94, 104

$7n^{IV} \pm 2 =$ 2, 16, 30, 44, 58, 72, 86, 100
12, 26, 40, 54, 68, 82, 96

L'on voit que les nombres communs aux trois ſuites ſe réduiſent à ces quatre 16, 26, 44, 86, ce ſont là les quatre valeurs de $a^{(\epsilon-1)}$ auxquelles répondent les valeurs de $M^{(\epsilon-1)}$, 1, 3, 9, 35.

§ 35. Prenant les premières valeurs $a^{(\epsilon-1)} = 16$, $M^{(\epsilon-1)} = 1$, j'ai la table

$46u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$, $a^{(1)} = 16$. J'aurai donc par la table du § 26.
$46u^{(2)2} + 210 = t^{(2)2}$ Ayant ainſi une ſolution parti-
$u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$ culière de l'équation, j'ai par les formu-
$u^{(2)} = 1$, $t^{(2)} = 16$ les du § 28, $u^{(\epsilon)} = 16u^{(1)} \pm t^{(1)}$,
$t^{(\epsilon)} = 16t^{(1)} \pm 46u^{(1)}$. Maintenant les valeurs $u^{(13)}$ & $t^{(13)}$ du § 15, me donnent pour ce cas-ci les valeurs de $u^{(1)}$ & $t^{(1)}$. Je les ſubſtitue dans les valeurs précédentes de $u^{(\epsilon)}$ & $t^{(\epsilon)}$ & j'ai les valeurs générales,

$$u^{(e)} = \frac{(16 \pm V46)(24335 + 3588 V46)^e - (16 \mp V46)(24335 - 3588 V46)^e}{2 V46}$$

$$t^{(e)} = \frac{(16 \pm V46)(24335 + 3588 V46)^e + (16 \mp V46)(24335 - 3588 V46)^e}{2}.$$

§ 36. Prenant les secondes valeurs $a^{(e-1)} = 26$, $M^{(e-1)} = 3$, j'ai l'équation $46 u^{(e-1)2} + 3 = t^{(e-1)2}$. Comme il n'y a point de nombre entier qui soit plus petit que le quart de 3, je cherche si cette équation est contenue dans le développement de la formule $46 u^{(i)2} + 1 = t^{(i)2}$ du § 16, & je vois qu'elle y est contenue deux fois, ce qui me donne deux solutions différentes. J'ai d'abord

$$\begin{array}{llll} 46 u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2} & a^{(1)} = 6 & & \\ 46 u^{(2)2} - 10 = t^{(2)2} & a^{(2)} = 4 & \mu^{(1)} = 1 & \\ 46 u^{(3)2} + 3 = t^{(3)2} & a^{(3)} = 26 & \mu^{(2)} = 10 & \\ 46 u^{(4)2} + 210 = t^{(4)2}. & & & \end{array}$$

Tout est déterminé d'avance dans cette table à l'exception de $\mu^{(2)}$ que je détermine par l'équation $3\mu^{(2)} \pm 4 = 26$, ce qui donne $\mu^{(2)} = 10$. J'ai maintenant $u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$

$u^{(2)} = 1$, $t^{(2)} = 6$

$u^{(3)} = 1$, $t^{(3)} = 7$

$u^{(4)} = 11$, $t^{(4)} = 76$ par les formules du § 26.

Ayant ainsi une solution particulière, j'ai par les formules du § 28, $u^{(e)} = 76 u^{(1)} \pm 11 t^{(1)}$, $t^{(e)} = 76 t^{(1)} \pm 46 \cdot 11 u^{(1)}$. Substituant pour $u^{(1)}$ & $t^{(1)}$ les valeurs $u^{(13)}$ & $t^{(13)}$ citées ci-dessus j'ai les valeurs générales

$$u^{(e)} = \frac{(76 \pm 11 V46)(24335 + 3588 V46)^e - (76 \mp 11 V46)(24335 - 3588 V46)^e}{2 V46}$$

$$t^{(e)} = \frac{(76 \pm 11 V46)(24335 + 3588 V46)^e + (76 \mp 11 V46)(24335 - 3588 V46)^e}{2}.$$

J'ai

J'ai enſuite

$46u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$	$a^{(1)} = 6$			$u^{(1)} = 0,$	$t^{(1)} = 1$
$46u^{(2)2} - 10 = t^{(2)2}$	$a^{(2)} = 4$	$\mu^{(1)} = 1$		$u^{(2)} = 1,$	$t^{(2)} = 6$
$46u^{(3)2} + 3 = t^{(3)2}$	$a^{(3)} = 5$	$\mu^{(2)} = 3$		$u^{(3)} = 1,$	$t^{(3)} = 7$
$46u^{(4)2} - 7 = t^{(4)2}$	$a^{(4)} = 2$	$\mu^{(3)} = 1$		$u^{(4)} = 4,$	$t^{(4)} = 27$
$46u^{(5)2} + 6 = t^{(5)2}$	$a^{(5)} = 4$	$\mu^{(4)} = 1$		$u^{(5)} = 5,$	$t^{(5)} = 34$
$46u^{(6)2} - 5 = t^{(6)2}$	$a^{(6)} = 6$	$\mu^{(5)} = 2$		$u^{(6)} = 9,$	$t^{(6)} = 61$
$46u^{(7)2} + 2 = t^{(7)2}$	$a^{(7)} = 6$	$\mu^{(6)} = 6$		$u^{(7)} = 23,$	$t^{(7)} = 156$
$46u^{(8)2} - 5 = t^{(8)2}$	$a^{(8)} = 4$	$\mu^{(7)} = 2$		$u^{(8)} = 147,$	$t^{(8)} = 997$
$46u^{(9)2} + 6 = t^{(9)2}$	$a^{(9)} = 2$	$\mu^{(8)} = 1$		$u^{(9)} = 317,$	$t^{(9)} = 2150$
$46u^{(10)2} - 7 = t^{(10)2}$	$a^{(10)} = 5$	$\mu^{(9)} = 1$		$u^{(10)} = 464,$	$t^{(10)} = 3147$
$46u^{(11)2} + 3 = t^{(11)2}$	$a^{(11)} = 26$	$\mu^{10} = 7$		$u^{(11)} = 781,$	$t^{(11)} = 5297$
$46u^{(12)2} + 210 = t^{(12)2}$				$u^{(12)} = 5003,$	$t^{(12)} = 33932$

Tout eſt déterminé ici à l'exception de μ^{10} que je détermine par l'équation $3\mu^{(10)} \pm 5 = 26$. Ici le ſigne inférieur ne donneroit rien; je prends le ſigne ſupérieur, & j'ai $\mu^{(10)} = 7$. Comme j'ai pris $a^{(10)}$ négatif, ce qui eſt permis, puiſque nous avons vu ci-deſſus que a n'étant employé qu'à la ſeconde puiſſance peut être indifféremment pris poſitif ou négatif, j'ai pris auſſi les formules $u^{12} = \mu^{(10)} u^{11} - u^{10}$, $t^{(12)} = \mu^{(10)} t^{(11)} - t^{(10)}$. Maintenant j'ai par les formules du § 28, $u^{(e)} = 33932\, u^{(1)} \pm 5003\, t^{(1)}$; $t^{(e)} = 33932\, t^{(1)} \pm 46.5003\, u^{(1)}$. Donc ſubſtituant pour $u^{(1)}$ & $t^{(1)}$ les valeurs de $u^{(13)}$ & $t^{(13)}$ citées ci-deſſus, j'ai

$$u^{(e)} = \frac{(33932 \pm 5003\sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^e - (33932 \mp 5003\sqrt{46})(24335 - 3588\sqrt{46})^e}{2\sqrt{46}}$$

$$t^{(e)} = \frac{(33932 \pm 5003\sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^e + (33932 \mp 5003\sqrt{46})(24335 - 3588\sqrt{46})^e}{2}.$$

§ 37. Prenant les troiſièmes valeurs, $a^{(e-1)} = 44$, $M^{(e-1)} = 9$, j'ai l'équation $46u^{(e-1)2} + 9 = t^{(e-1)2}$, d'où je tire $a^{(e-2)} = 9\mu^{(e-2)} - 44$, je fais $\mu^{(e-2)} = 5$, & j'ai $a^{(e-2)}$

$= 1$, ce qui donne $M^{(e-2)} = \frac{1-46}{9} = -5$. J'ai donc l'équation $46u^{(e-2)2} - 5 = t^{(e-2)}$. L'équation ſuivante $a^{(e-3)} = -5\mu^{(e-3)} - 1$ ne me donneroit point de valeur de $M^{(e-3)}$ plus petite. Je m'arrête donc là, & je vois que cette équation eſt contenue deux fois dans le développement de l'équation $46u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$. J'ai d'abord

$46u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$	$a^{(1)} = 6$		$u^{(1)} = 0,$	$t^{(1)} = 1$
$46u^{(2)2} - 10 = t^{(2)2}$	$a^{(2)} = 4$	$\mu^{(1)} = 1$	$u^{(2)} = 1,$	$t^{(2)} = 6$
$46u^{(3)2} + 3 = t^{(3)2}$	$a^{(3)} = 5$	$\mu^{(2)} = 3$	$u^{(3)} = 1,$	$t^{(3)} = 7$
$46u^{(4)2} - 7 = t^{(4)2}$	$a^{(4)} = 2$	$\mu^{(3)} = 1$	$u^{(4)} = 4,$	$t^{(4)} = 27$
$46u^{(5)2} + 6 = t^{(5)2}$	$a^{(5)} = 4$	$\mu^{(4)} = 1$	$u^{(5)} = 5,$	$t^{(5)} = 34$
$46u^{(6)2} - 5 = t^{(6)2}$	$a^{(6)} = 1$	$\mu^{(5)} = 1$	$u^{(6)} = 9,$	$t^{(6)} = 61$
$46u^{(7)2} + 9 = t^{(7)2}$	$a^{(7)} = 44$	$\mu^{(6)} = 5$	$u^{(7)} = 14,$	$t^{(7)} = 95$
$46u^{(8)2} + 210 = t^{(8)2}$			$u^{(8)} = 79,$	$t^{(8)} = 536$

J'ai déterminé la valeur $\mu^{(5)}$ par les équations $5\mu^{(5)} - 4 = 1$. J'ai donc § 28, $u^{(e)} = 536u^{(1)} \pm 79t^{(1)}$, $t^{(e)} = 536t^{(1)} \pm 46.79u^{(1)}$; & en ſubſtituant les valeurs générales de $u^{(1)}$ & $t^{(1)}$,

$$u^{(e)} = \frac{(536 \pm 79\sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^e - (536 \mp 79\sqrt{46})(24335 - 3588\sqrt{46})^e}{2\sqrt{46}}$$

$$t^{(e)} = \frac{(536 \pm 79\sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^e + (536 \mp 79\sqrt{46})(24335 - 3588\sqrt{46})^e}{2}.$$

J'ai enſuite

$46u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$	$a^{(1)} = 6$		$u^{(1)} = 0,$	$t^{(1)} = 1$
$46u^{(2)2} - 10 = t^{(2)2}$	$a^{(2)} = 4$	$\mu^{(1)} = 1$	$u^{(2)} = 1,$	$t^{(2)} = 6$
$46u^{(3)2} + 3 = t^{(3)2}$	$a^{(3)} = 5$	$\mu^{(2)} = 3$	$u^{(3)} = 1,$	$t^{(3)} = 7$
$46u^{(4)2} - 7 = t^{(4)2}$	$a^{(4)} = 2$	$\mu^{(3)} = 1$	$u^{(4)} = 4,$	$t^{(4)} = 27$
$46u^{(5)2} + 6 = t^{(5)2}$	$a^{(5)} = 4$	$\mu^{(4)} = 1$	$u^{(5)} = 5,$	$t^{(5)} = 34$
$46u^{(6)2} - 5 = t^{(6)2}$	$a^{(6)} = 6$	$\mu^{(5)} = 2$	$u^{(6)} = 9,$	$t^{(6)} = 61$
$46u^{(7)2} + 2 = t^{(7)2}$	$a^{(7)} = 6$	$\mu^{(6)} = 6$	$u^{(7)} = 23,$	$t^{(7)} = 156$

$46u^{(8)2} - 5 = t^{(8)2}$ $a^{(8)} = 1$ $\mu^{(7)} = 1$ $u^{(8)} = 147$, $t^{(8)} = 997$
$46u^{(9)2} + 9 = t^{(9)2}$ $a^{(9)} = 44$ $\mu^{(8)} = 5$ $u^{(9)} = 170$, $t^{(9)} = 1153$
$46u^{(10)2} + 210 = t^{(10)2}$ $u^{(10)} = 703$, $t^{(10)} = 4768$.

J'ai déterminé la valeur $\mu^{(7)}$ par l'équation $5\mu^{(7)} + 6 = 1$. J'ai trouvé $u^{(10)}$ & $t^{(10)}$ par les formules $u^{(10)} = \mu^{(8)} u^{(9)} - u^{(8)}$, $t^{(10)} = \mu^{(8)} t^{(9)} - t^{(8)}$. J'ai donc § 28, $u^{(e)} = 4768\, u^{(1)} \pm 703\, t^{(1)}$, $t^{(e)} = 4768\, t^{(1)} \pm 46.703\, u^{(1)}$, & d'après cela

$$u^{(e)} = \frac{(4768 \pm 703\sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^e - (4768 \mp 703\sqrt{46})(24335 - 3588\sqrt{46})^e}{2\sqrt{46}}$$

$$t^{(e)} = \frac{(4768 \pm 703\sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^e + (4768 \mp 703\sqrt{46})(24335 - 3588\sqrt{46})^e}{2}.$$

§ 38. Prenant les quatrièmes valeurs $a^{(e-1)} = 86$, $M^{(e-1)} = 35$, j'ai l'équation $46u^{(e-1)2} + 35 = t^{(e-1)2}$, d'où je tire $a^{(e-2)} = 35\mu^{(e-2)} - 86$, je fais $\mu^{(e-2)} = 2$, & j'ai $a^{(e-2)} = 16$, ce qui donne $M^{(e-2)} = \frac{256 - 46}{35} = 6$. J'ai donc l'équation $46u^{(e-2)2} + 6 = t^{(e-2)2}$. Je ne puis descendre plus bas, & je vois que l'équation que je viens de trouver est contenue deux fois dans le développement de l'équation $46u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$. J'ai d'abord

$46u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$ $a^{(1)} = 6$ $u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$
$46u^{(2)2} - 10 = t^{(2)2}$ $a^{(2)} = 4$ $\mu^{(1)} = 1$ $u^{(2)} = 1$, $t^{(2)} = 6$
$46u^{(3)2} + 3 = t^{(3)2}$ $a^{(3)} = 5$ $\mu^{(2)} = 3$ $u^{(3)} = 1$, $t^{(3)} = 7$
$46u^{(4)2} - 7 = t^{(4)2}$ $a^{(4)} = 2$ $\mu^{(3)} = 1$ $u^{(4)} = 4$, $t^{(4)} = 27$
$46u^{(5)2} + 6 = t^{(5)2}$ $a^{(5)} = 16$ $\mu^{(4)} = 3$ $u^{(5)} = 5$, $t^{(5)} = 34$
$46u^{(6)2} + 35 = t^{(6)2}$ $a^{(6)} = 86$ $\mu^{(5)} = 2$ $u^{(6)} = 19$, $t^{(6)} = 129$
$46u^{(7)2} + 210 = t^{(7)2}$ $u^{(7)} = 43$, $t^{(7)} = 292$.

J'ai déterminé la valeur $\mu^{(4)}$ par l'équation $6\mu^{(4)} - 2 = 16$. J'ai donc § 28, $u^{(e)} = 292\, u^{(1)} \pm 43\, t^{(1)}$, $t^{(e)} = 292\, t^{(1)} \pm 46.43\, u^{(1)}$, & d'après cela

$$u^{(\epsilon)} = \frac{(292 \pm 43\sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^{\rho} - (292 \mp 43\sqrt{46})(24335 - 3588\sqrt{46})^{\rho}}{2\sqrt{46}}$$

$$t^{(\epsilon)} = \frac{(292 \pm 43\sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^{\rho} + (292 \mp 43\sqrt{46})(24335 - 3588\sqrt{46})^{\rho}}{2}.$$

J'ai enſuite

$46u^{(1)2}+1 = t^{(1)2}$	$a^{(1)}=6$		$u^{(1)}=0,$	$t^{(1)}=1$
$46u^{(2)2}-10 = t^{(2)2}$	$a^{(2)}=4$	$\mu^{(1)}=1$	$u^{(2)}=1,$	$t^{(2)}=6$
$46u^{(3)2}+3 = t^{(3)2}$	$a^{(3)}=5$	$\mu^{(2)}=3$	$u^{(3)}=1,$	$t^{(3)}=7$
$46u^{(4)2}-7 = t^{(4)2}$	$a^{(4)}=2$	$\mu^{(3)}=1$	$u^{(4)}=4,$	$t^{(4)}=27$
$46u^{(5)2}+6 = t^{(5)2}$	$a^{(5)}=4$	$\mu^{(4)}=1$	$u^{(5)}=5,$	$t^{(5)}=34$
$46u^{(6)2}-5 = t^{(6)2}$	$a^{(6)}=6$	$\mu^{(5)}=2$	$u^{(6)}=9,$	$t^{(6)}=61$
$46u^{(7)2}+2 = t^{(7)2}$	$a^{(7)}=6$	$\mu^{(6)}=6$	$u^{(7)}=23,$	$t^{(7)}=156$
$46u^{(8)2}-5 = t^{(8)2}$	$a^{(8)}=4$	$\mu^{(7)}=2$	$u^{(8)}=147,$	$t^{(8)}=997$
$46u^{(9)2}+6 = t^{(9)2}$	$a^{(9)}=16$	$\mu^{(8)}=2$	$u^{(9)}=317,$	$t^{(9)}=2150$
$46u^{(10)2}+35 = t^{(10)2}$	$a^{(10)}=86$	$\mu^{(9)}=2$	$u^{(10)}=487,$	$t^{(10)}=3303$
$46u^{(11)2}+210 = t^{(11)2}$			$u^{(11)}=1291,$	$t^{(11)}=8756.$

J'ai déterminé $\mu^{(8)}$ par l'équation $6\mu^{(8)}+4=16$, & par conſéquent, j'ai eu $u^{(10)} = \mu^{(8)}u^{(9)} - u^{(8)}$, $t^{(10)} = \mu^{(8)}t^{(9)} - t^{(8)}$. Donc § 28 $u^{(\epsilon)} = 8756\,u^{(1)} \pm 1291\,t^{(1)}$, $t^{(\epsilon)} = 8756\,t^{(1)} \pm 46.1291\,u^{(1)}$, & d'après cela

$$u^{(\epsilon)} = \frac{(8756 \pm 1291\sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^{\rho} - (8756 \mp 1291\sqrt{46})(24335 - 3588\sqrt{46})^{\rho}}{2\sqrt{46}}$$

$$t^{(\epsilon)} = \frac{(8756 \pm 1291\sqrt{46})(24335 + 3588\sqrt{46})^{\rho} + (8756 \mp 1291\sqrt{46})(24335 - 3588\sqrt{46})^{\rho}}{2}.$$

§ 39. On a en recueillant ces valeurs toutes les ſolutions poſſibles de l'équation propoſée, & ces ſolutions coïncident avec celles qu'ont trouvées MM. de la Grange & le Gendre.

§ 40. Soit l'équation $13\,u^{(\epsilon)2} + 207 = t^{(\epsilon)2}$. On a ici $M^{(\epsilon)} = 207$, $B = 13$ ce qui donne l'équation $M^{(\epsilon-1)} =$

$\frac{a^{(\varepsilon-1)2} - 13}{207}$. Or $207 = 9.23$, ce qui donne ces deux formules, I. $\frac{a^2 - 13}{9}$, II. $\frac{a^2 - 13}{23}$. La première devient $\frac{a^2 - 4}{9} - 1$, ce qui donne $a = 2$, $V(207 M^{(\varepsilon-1)} + 13) = 9n' \pm 2$. La seconde donne $a = 6$, donc $V(207 M^{(\varepsilon-1)} + 13) = 23 n'' \pm 6$. Donc

$9n' \pm 2 = 2$, 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92, 101
7, 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70, 79, 88, 97

$23 n'' \pm 6 = 6$, 29, 52, 75, 98
17, 40, 63, 86

Les nombres 29 & 52 sont communs aux deux suites, ce qui donne pour les deux valeurs de $a^{(\varepsilon-1)}$, 29, 52 auxquelles répondent les valeurs de $M^{(\varepsilon-1)}$ 4, 13.

§ 41. Je prends les premières valeurs savoir $a^{(\varepsilon-1)} = 29$, $M^{(\varepsilon-1)} = 4$, j'ai l'équation $46 u^{(\varepsilon-1)2} + 4 = t^{(\varepsilon-1)2}$. Comme je ne puis descendre plus bas, je cherche cette équation dans le développement de l'équation $13 u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$ du § 16, & je trouve qu'elle y est contenue deux fois. J'ai d'abord

$13 u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$	$a^{(1)} = 3$		$u^{(1)} = 0$,	$t^{(1)} = 1$
$13 u^{(2)2} - 4 = t^{(2)2}$	$a^{(2)} = 1$	$\mu^{(1)} = 1$	$u^{(2)} = 1$,	$t^{(2)} = 3$
$13 u^{(3)2} + 3 = t^{(3)2}$	$a^{(3)} = 2$	$\mu^{(2)} = 1$	$u^{(3)} = 1$,	$t^{(3)} = 4$
$13 u^{(4)2} - 3 = t^{(4)2}$	$a^{(4)} = 1$	$\mu^{(3)} = 1$	$u^{(4)} = 2$,	$t^{(4)} = 7$
$13 u^{(5)2} + 4 = t^{(5)2}$	$a^{(5)} = 29$	$\mu^{(4)} = 7$	$u^{(5)} = 3$,	$t^{(5)} = 11$
$13 u^{(6)2} + 207 = t^{(6)2}$			$u^{(6)} = 19$,	$t^{(6)} = 70$.

J'ai déterminé $\mu^{(4)}$ par l'équation $4\mu^{(4)} + 1 = 29$ & j'ai eu par conséquent $u^{(5)} = \mu^{(4)} u^{(5)} - u^{(4)}$, $t^{(6)} = \mu^{(4)} t^{(5)} - t^{(4)}$. J'ai donc § 28 $u^{(\varepsilon)} = 70 u^{(1)} \pm 19 t^{(1)}$, $t^{(\varepsilon)} = 70 t^{(1)} \pm 13.19 u^{(1)}$. Maintenant les valeurs générales $u^{(11)}$ & $t^{(11)}$ du § 16 me donnent les valeurs générales de $u^{(1)}$ & $t^{(1)}$, je les substitue & j'ai

$$u^{(\varrho)} = \frac{(70 \pm 19\sqrt{13})(649 + 180\sqrt{13})^{\varrho} - (70 \mp 19\sqrt{13})(649 - 180\sqrt{13})^{\varrho}}{2\sqrt{13}}$$

$$t^{(\varrho)} = \frac{(70 \pm 19\sqrt{13})(649 + 180\sqrt{13})^{\varrho} + (70 \mp 19\sqrt{13})(649 - 180\sqrt{13})^{\varrho}}{2}.$$

J'ai enſuite

$13u^{(1)2}+1 = t^{(1)2}$	$a^{(1)}=3$		$u^{(1)}=0,$	$t^{(1)}=1$
$13u^{(2)2}-4 = t^{(2)2}$	$a^{(2)}=1$	$\mu^{(1)}=1$	$u^{(2)}=1,$	$t^{(2)}=3$
$13u^{(3)2}+3 = t^{(3)2}$	$a^{(3)}=2$	$\mu^{(2)}=1$	$u^{(3)}=1,$	$t^{(3)}=4$
$13u^{(4)2}-3 = t^{(4)2}$	$a^{(4)}=1$	$\mu^{(3)}=1$	$u^{(4)}=2,$	$t^{(4)}=7.$
$13u^{(5)2}+4 = t^{(5)2}$	$a^{(5)}=3$	$\mu^{(4)}=1$	$u^{(5)}=3,$	$t^{(5)}=11$
$13u^{(6)2}-1 = t^{(6)2}$	$a^{(6)}=3$	$\mu^{(5)}=6$	$u^{(6)}=5,$	$t^{(6)}=18$
$13u^{(7)2}+4 = t^{(7)2}$	$a^{(7)}=29$	$\mu^{(6)}=8$	$u^{(7)}=33,$	$t^{(7)}=119$
$13u^{(8)2}+207 = t^{(8)2}$			$u^{(8)}=269,$	$t^{(8)}=970.$

J'ai déterminé $\mu^{(6)}$ par l'équation $4\mu^{(6)} - 3 = 29$. J'ai donc $\S\ 28\ u^{(\varrho)} = 970u^{(1)} \pm 269t^{(1)}$, $t^{(\varrho)} = 970t^{(1)} \pm 13.269u^{(1)}$, desquelles on tire les valeurs générales comme ci-deſſus.

§ 42. Je prends les ſecondes valeurs, ſavoir $a^{(\varrho-1)} = 52$, $M^{(\varrho-1)} = 13$, & j'ai l'équation $13u^{(\varrho-1)2} + 13 = t^{(\varrho-1)2}$. J'ai donc $a^{(\varrho-2)} = 13\mu^{(\varrho-2)} - 52$. Je fais $\mu^{(\varrho-2)} = 4$, & j'ai $a^{(\varrho-2)} = 0$, $M^{(\varrho-2)} = \frac{a^{(\varrho-2)2} - 13}{13} = -1$. J'ai donc l'équation $13u^{(\varrho-2)2} - 1 = t^{(\varrho-2)2}$ qui ne ſe trouve qu'une fois dans le développement de l'équation $13u^{(1)2} - 1 = t^{(1)2}$ du § 16. J'ai donc

$13u^{(1)2}+1 = t^{(1)2}$	$a^{(1)}=3$		$u^{(1)}=0,$	$t^{(1)}=1$
$13u^{(2)2}-4 = t^{(2)2}$	$a^{(2)}=1$	$\mu^{(1)}=1$	$u^{(2)}=1,$	$t^{(2)}=3$
$13u^{(3)2}+3 = t^{(3)2}$	$a^{(3)}=2$	$\mu^{(2)}=1$	$u^{(3)}=1,$	$t^{(3)}=4$
$13u^{(4)2}-3 = t^{(4)2}$	$a^{(4)}=1$	$\mu^{(3)}=1$	$u^{(4)}=2,$	$t^{(4)}=7$
$13u^{(5)2}+4 = t^{(5)2}$	$a^{(5)}=3$	$\mu^{(4)}=1$	$u^{(5)}=3,$	$t^{(5)}=11$
$13u^{(6)2}-1 = t^{(6)2}$	$a^{(6)}=0$	$\mu^{(5)}=3$	$u^{(6)}=5,$	$t^{(6)}=18$
$13u^{(7)2}+13 = t^{(7)2}$	$a^{(7)}=52$	$\mu^{(6)}=4$	$u^{(7)}=18,$	$t^{(7)}=65$
$13u^{(8)2}+207 = t^{(8)2}$			$u^{(8)}=77,$	$t^{(8)}=278$
			$u^{(8)}=67,$	$t^{(8)}=242.$

J'ai déterminé $\mu^{(5)}$ par l'équation $\mu^{(5)} - 3 = 0$, & comme $a^{(6)} = 0$, & que $13\mu^{(6)} \pm 0 = 52$, l'ambiguité des ſignes me donne $u^{(8)} = 4u^{(7)} \pm u^{(6)}$, $t^{(8)} = 4t^{(7)} \pm t^{(6)}$, ce qui me donne deux valeurs pour $u^{(8)}$ & $t^{(8)}$, desquelles on tirera les valeurs générales comme ci-deſſus.

§ 43. Soit l'équation $30u^{(\varepsilon)2} + 1459 = t^{(\varepsilon)2}$. On a ici $M^{(\varepsilon)} = 1459$, $B = 30$, ce qui donne l'équation $M^{(\varepsilon-1)} = \frac{\varepsilon^{(\varepsilon-1)2} - 30}{1459}$. Comme $M^{(\varepsilon-1)}$ eſt un nombre premier, il n'y a point de décompoſition. On trouve $a^{(\varepsilon-1)} = 593$, $M^{(\varepsilon-1)} = 241$, ce qui donne l'équation $30u^{(\varepsilon-1)2} + 241 = t^{(\varepsilon-1)2}$. On a donc $a^{(\varepsilon-2)} = 241\,\mu^{(\varepsilon-2)} - 593$. Faiſant $\mu^{(\varepsilon-2)} = 2$, j'ai $a^{(\varepsilon-2)} = 111$, $M^{(\varepsilon-2)} = 51$, ce qui donne l'équation $30u^{(\varepsilon-2)2} + 51 = t^{(\varepsilon-2)2}$. Donc $a^{(\varepsilon-3)} = 51\,\mu^{(\varepsilon-3)} - 111$. Je fais $\mu^{(\varepsilon-3)} = 2$, ce qui donne $a^{(\varepsilon-3)} = 9$, $M^{(\varepsilon-3)} = 1$. J'ai donc

$30u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$	$a^{(1)} = 9$		$u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$
$30u^{(2)2} + 51 = t^{(2)2}$	$a^{(2)} = 111$	$\mu^{(1)} = 2$	$u^{(2)} = 1$, $t^{(2)} = 9$
$30u^{(3)2} + 241 = t^{(3)2}$	$a^{(3)} = 593$	$\mu^{(2)} = 2$	$u^{(3)} = 2$, $t^{(3)} = 19$
$30u^{(4)2} + 1459 = t^{(4)2}$			$u^{(4)} = 5$, $t^{(4)} = 47$.

J'ai donc § 28 $u^{(\varepsilon)} = 47u^{(1)} \pm 5t^{(1)}$, $t^{(\varepsilon)} = 47t^{(1)} \pm 30.5u^{(1)}$. Maintenant voici le développement de la formule $30u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$

$30u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$	$a^{(1)} = 5$		$u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$
$30u^{(2)2} - 5 = t^{(2)2}$	$a^{(2)} = 5$	$\mu^{(1)} = 2$	$u^{(2)} = 1$, $t^{(2)} = 5$
$30u^{(3)2} + 1 = t^{(3)2}$			$u^{(3)} = 2$, $t^{(3)} = 11$.

Subſtituant ces valeurs de $u^{(3)}$ & $t^{(3)}$ au lieu de $u^{(1)}$ & $t^{(1)}$ dans les valeurs de $u^{(\varepsilon)}$ & $t^{(\varepsilon)}$, on aura les formules générales,

$$u^{(\varepsilon)} = \frac{(47 \pm 5\sqrt{30})(11 + 2\sqrt{30})^{\varepsilon} - (47 \pm 5\sqrt{30})(11 - 2\sqrt{30})^{\varepsilon}}{2\sqrt{30}}$$

$$t^{(\varepsilon)} = \frac{(47 \pm 5\sqrt{30})(11 + 2\sqrt{30})^{\varepsilon} + (47 \mp 5\sqrt{30})(11 - 2\sqrt{30})^{\varepsilon}}{2}.$$

Il n'y a point d'autres valeurs qui ſatisfaſſent à cette équation.

§ 44. Soit l'équation $431u^{(\varepsilon)2} + 10 = t^{(\varepsilon)2}$. On a ici $M^{(\varepsilon)} = 10$, $B = 431$, ce qui donne l'équation $M^{(\varepsilon-1)} = \frac{a^{(\varepsilon-1)2} - 431}{10}$. Or $10 = 2.5$, ce qui donne les deux formules I. $\frac{a^2 - 431}{2}$, II. $\frac{a^2 - 431}{5}$. La première ne donne aucune valeur de $M^{(\varepsilon-1)} < \frac{10}{4}$, la seconde en prenant $a^{(\varepsilon-1)} = 21$ donne $M^{(\varepsilon-1)} = 2$, mais ce nombre ne sert à rien puisque la première suite ne donne point de nombre correspondant. Il faut donc, si l'équation est soluble, qu'elle se trouve dans le développement de l'équation $431u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$. Voici la table.

$431u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$	$a^{(1)} = 20$		$u^{(1)} = 0$,	$t^{(1)} = 1$
$431u^{(2)2} - 31 = t^{(2)2}$	$a^{(2)} = 11$	$\mu^{(1)} = 1$	$u^{(2)} = 1$,	$t^{(2)} = 20$
$431u^{(3)2} + 10 = t^{(3)2}$	$a^{(3)} = 19$	$\mu^{(2)} = 3$	$u^{(3)} = 1$,	$t^{(3)} = 21$
$431u^{(4)2} - 7 = t^{(4)2}$	$a^{(4)} = 16$	$\mu^{(3)} = 5$	$u^{(4)} = 4$,	$t^{(4)} = 83$
$431u^{(5)2} + 25 = t^{(5)2}$	$a^{(5)} = 9$	$\mu^{(4)} = 1$	$u^{(5)} = 21$,	$t^{(5)} = 436$
$431u^{(6)2} - 14 = t^{(6)2}$	$a^{(6)} = 19$	$\mu^{(5)} = 2$	$u^{(6)} = 25$,	$t^{(6)} = 519$
$431u^{(7)2} + 5 = t^{(7)2}$	$a^{(7)} = 16$	$\mu^{(6)} = 7$	$u^{(7)} = 71$,	$t^{(7)} = 1474$
$431u^{(8)2} - 35 = t^{(8)2}$	$a^{(8)} = 19$	$\mu^{(7)} = 1$	$u^{(8)} = 522$,	$t^{(8)} = 10837$
$431u^{(9)2} + 2 = t^{(9)2}$	$a^{(9)} = 19$	$\mu^{(8)} = 19$	$u^{(9)} = 593$,	$t^{(9)} = 12311$
$431u^{(10)2} - 35 = t^{(10)2}$	$a^{(10)} = 16$	$\mu^{(9)} = 1$	$u^{(10)} = 11789$,	$t^{(10)} = 244746$
$431u^{(11)2} + 5 = t^{(11)2}$	$a^{(11)} = 19$	$\mu^{(10)} = 7$	$u^{(11)} = 12382$,	$t^{(11)} = 257057$
$431u^{(12)2} - 14 = t^{(12)2}$	$a^{(12)} = 9$	$\mu^{(11)} = 2$	$u^{(12)} = 98463$,	$t^{(12)} = 2044145$
$431u^{(13)2} + 25 = t^{(13)2}$	$a^{(13)} = 16$	$\mu^{(12)} = 1$	$u^{(13)} = 209308$,	$t^{(13)} = 4345347$
$431u^{(14)2} - 7 = t^{(14)2}$	$a^{(14)} = 19$	$\mu^{(13)} = 5$	$u^{(14)} = 307771$,	$t^{(14)} = 6389492$
$431u^{(15)2} + 10 = t^{(15)2}$	$a^{(15)} = 11$	$\mu^{(14)} = 3$	$u^{(15)} = 1748163$,	$t^{(15)} = 36292807$
$431u^{(16)2} - 31 = t^{(16)2}$	$a^{(16)} = 20$	$\mu^{(15)} = 1$	$u^{(16)} = 5552260$,	$t^{(16)} = 115267913$
$431u^{(17)2} + 1 = t^{(17)2}$			$u^{(17)} = 7300423$,	$t^{(17)} = 151560720$.

Les valeurs $u^{(3)}$ & $t^{(3)}$ me donnent d'abord § 28, $u^{(\varepsilon)} = 21u^{(1)} + t^{(1)}$, $t^{(\varepsilon)} = 21t^{(1)} + 431u^{(1)}$. Ensuite les valeurs $u^{(15)}$ & $t^{(15)}$ me donnent $u^{(\varepsilon)} = 36292807u^{(1)} + 1748163t^{(1)}$, $t^{(\varepsilon)} = 36292807t^{(1)} + 431.1748163u^{(1)}$. On calculera par le moyen des valeurs $u^{(17)}$ & $t^{(17)}$ les valeurs générales de $u^{(1)}$ & $t^{(1)}$ qu'on substi-

ſubſtituera dans les formules précédentes. J'omets les réſultats généraux pour abréger.

§ 45. Soit l'équation $13u^{(\epsilon)2} + 101 = t^{(\epsilon)2}$. On a $M^{(\epsilon)} = 101$, $B = 13$, ce qui donne l'équation $M^{(\epsilon-1)} = \frac{a^{(\epsilon-1)2} - 13}{101}$. Comme 101 eſt un nombre premier, il n'y a point de décompoſition. On trouve $a^{(\epsilon-1)} = 35$, $M^{(\epsilon-1)} = 12$, ce qui donne l'équation $13u^{(\epsilon-1)2} + 12 = t^{(\epsilon-1)2}$. On a donc $a^{(\epsilon-2)} = 12\mu^{(\epsilon-2)} - 35$. Je fais $\mu^{(\epsilon-2)} = 3$, ce qui donne $a^{(\epsilon-2)} = 1$, $M^{(\epsilon-2)} = \frac{1-13}{12} = -1$. J'ai donc l'équation $13u^{(\epsilon-2)2} - 1 = t^{(\epsilon-2)2}$ qui ſe trouve dans le développement de l'équation $13u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$. On a

$13u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$ $a^{(1)} = 3$ $u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$

$13u^{(2)2} - 4 = t^{(2)2}$ $a^{(2)} = 1$ $\mu^{(1)} = 1$ $u^{(2)} = 1$, $t^{(2)} = 3$

$13u^{(3)2} + 3 = t^{(3)2}$ $a^{(3)} = 2$ $\mu^{(2)} = 1$ $u^{(3)} = 1$, $t^{(3)} = 4$

$13u^{(4)2} - 3 = t^{(4)2}$ $a^{(4)} = 1$ $\mu^{(3)} = 1$ $u^{(4)} = 2$, $t^{(4)} = 7$

$13u^{(5)2} + 4 = t^{(5)2}$ $a^{(5)} = 3$ $\mu^{(4)} = 1$ $u^{(5)} = 3$, $t^{(5)} = 11$

$13u^{(6)2} - 1 = t^{(6)2}$ $a^{(6)} = 1$ $\left\{\begin{matrix}\mu^{(5)} = 2\\ \mu^{(5)} = 4\end{matrix}\right\}$ $u^{(6)} = 5$, $t^{(6)} = 18$

$13u^{(7)2} + 12 = t^{(7)2}$ $a^{(7)} = 35$ $\mu^{(6)} = 3$ $u^{(7)} = 13$, $t^{(7)} = 47$ $u^{(7)} = 23$, $t^{(7)} = 83$

$13u^{(8)2} + 101 = t^{(8)2}$ $u^{(8)} = 34$, $t^{(8)} = 123$ $u^{(8)} = 74$, $t^{(8)} = 267$.

Je détermine $\mu^{(5)}$ par l'équation $\mu^{(5)} \mp 3 = 1$. Le ſigne + donne $\mu^{(5)} = 2$, $u^{(7)} = \mu^{(2)}u^{(6)} - u^{(5)}$, $t^{(7)} = \mu^{(2)}t^{(6)} - t^{(5)}$. Le ſigne — donne $\mu^{(5)} = 4$, $u^{(7)} = \mu^{(2)}u^{(6)} + u^{(5)}$, $t^{(7)} = \mu^{(2)}t^{(6)} + t^{(7)}$. On a donc les doubles valeurs,

$$u^{(\epsilon)} = 123u^{(1)} \pm 34t^{(1)}, \quad t^{(\epsilon)} = 123t^{(1)} \pm 13.34u^{(1)};$$
$$u^{(\epsilon)} = 267u^{(1)} \pm 74t^{(1)}, \quad t^{(\epsilon)} = 267t^{(1)} \pm 13.74u^{(1)}.$$

On ſubſtituera enſuite dans ces équations les valeurs générales de $u^{(1)}$ & de $t^{(1)}$, & l'on aura les formules générales que l'on cherche.

§ 46. Soit l'équation $79u^{(\epsilon)2} + 101 = t^{(\epsilon)2}$. On a ici $M^{(\epsilon)} = 101$, $B = 79$, ce qui donne $M^{(\epsilon-1)} = \frac{a^{(\epsilon-1)2} - 79}{101}$.

On trouve $a^{(\epsilon-1)} = 33$, $M^{(\epsilon-1)} = 10$, ce qui donne l'équation $79u^{(\epsilon-1)2} + 10 = t^{(\epsilon-1)2}$. On a donc $a^{(\epsilon-2)} = 10\mu^{(\epsilon-2)} - 33$. Je fais $\mu^{(\epsilon-2)} = 3$, ce qui donne $a^{(\epsilon-2)} = 3$, $M^{(\epsilon-2)} = \frac{9-79}{10} = -7$, ce qui donne l'équation $79u^{(\epsilon-2)2} - 7 = t^{(\epsilon-2)2}$. On a $a^{(\epsilon-3)} = 7\mu^{(\epsilon-3)} - 3$, ce qui ne donne aucune valeur de $M^{(\epsilon-3)} < \frac{1}{4} M^{(\epsilon-2)}$. Il faut donc voir si l'équation $79u^{(\epsilon-2)2} - 7 = t^{(\epsilon-2)2}$ eſt contenue dans le développement de l'équation $79u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$. Or on a la table ſuivante qui fait voir que cette équation n'y eſt pas contenue. L'équation propoſée eſt donc inſoluble en nombres entiers.

$79u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$
$79u^{(2)2} - 15 = t^{(2)2}$
$79u^{(3)2} + 2 = t^{(3)2}$
$79u^{(4)2} - 15 = t^{(4)2}$
$79u^{(5)2} + 1 = t^{(5)2}$

§ 47. Soit l'équation $341u^{(\epsilon)2} + 1340 = t^{(\epsilon)2}$. On a ici $M^{(\epsilon)} = 1340$, $B = 341$, ce qui donne l'équation $M^{(\epsilon-1)} = \frac{a^{(\epsilon-1)2} - 341}{1340}$. Or $1340 = 4.5.67$, ce qui donne les trois formules I. $\frac{a^2-341}{4}$. II. $\frac{a^2-341}{5}$. III. $\frac{a^2-341}{67}$. La première devient $\frac{a^2-1}{4} - 85$, elle donne $a = 1$, donc $\sqrt{(1340 M^{(\epsilon-1)} + 341)} = 4n' \pm 1$. La ſeconde formule devient $\frac{a^2-1}{5} - 68$, elle donne $a = 1$, donc $\sqrt{(1340 M^{(\epsilon-1)} + 341)} = 5n'' \pm 1$. La troiſième devient $\frac{a^2-6}{67} - 5$, elle donne $a = 26$, donc $\sqrt{(1340 M^{(\epsilon-1)} + 341)} = 67n''' \pm 26$. La première formule $4n' \pm 1$ donne tous les nombres impairs, la ſeconde formule $5n'' \pm 1$ donne tous les nombres qui finiſſent par 1, 4, 6 & 9. Les nombres qui finiſſent par 4 & 6 ſont exclus par la première formule, il ne reſte donc que les nombres qui finiſſent par 1 & 9. Il ne faut donc prendre de la troiſième formule que les nombres qui finiſſent par

1 & 9, ce qui ne laiſſe que quatre nombres 41, 309, 361, 629, parce qu'il faut reſter au deſſous de $\frac{1340}{2}$.

§ 48. Je prends d'abord $a^{(e-1)} = 41$, ce qui donne $M^{(e-1)} = 1$ & l'équation $341\,u^{(e-1)2} + 1 = t^{(e-1)2}$. J'ai donc

$341\,u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$ $a^{(1)} = 41$ $u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$
$341\,u^{(2)2} + 1340 = t^{(2)2}$ $u^{(2)} = 1$, $t^{(2)} = 41$.

Donc $u^{(e)} = 41\,u^{(1)} \pm t^{(1)}$, $t^{(e)} = 41\,t^{(1)} \pm 341\,u^{(1)}$. Je développe maintenant la formule $341\,u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$, ce qui donne la table ſuivante:

$341\,u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$	$a^{(1)} = 18$		$u^{(1)} = 0$,	$t^{(1)} = 1$
$341\,u^{(2)2} - 17 = t^{(2)2}$	$a^{(2)} = 16$	$\mu^{(1)} = 2$	$u^{(2)} = 1$,	$t^{(2)} = 18$
$341\,u^{(3)2} + 5 = t^{(3)2}$	$a^{(3)} = 14$	$\mu^{(2)} = 6$	$u^{(3)} = 2$,	$t^{(3)} = 37$
$341\,u^{(4)2} - 29 = t^{(4)2}$	$a^{(4)} = 15$	$\mu^{(3)} = 1$	$u^{(4)} = 13$,	$t^{(4)} = 240$
$341\,u^{(5)2} + 4 = t^{(5)2}$	$a^{(5)} = 17$	$\mu^{(4)} = 8$	$u^{(5)} = 15$,	$t^{(5)} = 277$
$341\,u^{(6)2} - 13 = t^{(6)2}$	$a^{(6)} = 9$	$\mu^{(5)} = 2$	$u^{(6)} = 133$,	$t^{(6)} = 2456$
$341\,u^{(7)2} + 20 = t^{(7)2}$	$a^{(7)} = 11$	$\mu^{(6)} = 1$	$u^{(7)} = 281$,	$t^{(7)} = 5189$
$341\,u^{(8)2} - 11 = t^{(8)2}$	$a^{(8)} = 11$	$\mu^{(7)} = 2$	$u^{(8)} = 414$,	$t^{(8)} = 7645$
$341\,u^{(9)2} + 20 = t^{(9)2}$	$a^{(9)} = 9$	$\mu^{(8)} = 1$	$u^{(9)} = 1109$,	$t^{(9)} = 20479$
$341\,u^{(10)2} - 13 = t^{(10)2}$	$a^{(10)} = 17$	$\mu^{(9)} = 2$	$u^{(10)} = 1523$,	$t^{(10)} = 28124$
$341\,u^{(11)2} + 4 = t^{(11)2}$	$a^{(11)} = 15$	$\mu^{(10)} = 8$	$u^{(11)} = 4155$,	$t^{(11)} = 76727$
$341\,u^{(12)2} - 29 = t^{(12)2}$	$a^{(12)} = 14$	$\mu^{(11)} = 1$	$u^{(12)} = 34763$,	$t^{(12)} = 641940$
$341\,u^{(13)2} + 5 = t^{(13)2}$	$a^{(13)} = 16$	$\mu^{(12)} = 6$	$u^{(13)} = 38918$,	$t^{(13)} = 718667$
$341\,u^{(14)2} - 17 = t^{(14)2}$	$a^{(14)} = 18$	$\mu^{(13)} = 2$	$u^{(14)} = 268271$,	$t^{(14)} = 4953942$
$341\,u^{(15)2} + 1 = t^{(15)2}$			$u^{(15)} = 575460$,	$t^{(15)} = 10626554$.

On ſubſtituera maintenant dans les valeurs de $u^{(e)}$ & $t^{(e)}$ au lieu de $u^{(1)}$ & $t^{(1)}$ les valeurs générales déduites de $u^{(15)}$ & $t^{(15)}$, & l'on aura les formules générales. Or ces valeurs générales ſont

$$u^{(1)} = \frac{(10626554 + 575460\sqrt{341})^p - (10626554 - 575460\sqrt{341})^p}{2\sqrt{41}}$$

$$t^{(1)} = \frac{(10626554 + 575460\sqrt{341})^p + (10626554 - 575460\sqrt{341})^p}{2}.$$

Je ſupprime les formules générales pour abréger.

§ 49. Je prends la ſeconde valeur $a^{(\epsilon-1)} = 309$, ce qui donne $M^{(\epsilon-1)} = 71$ & l'équation $341\,u^{(\epsilon-1)2} + 71 = t^{(\epsilon-1)2}$. On a enſuite $a^{(\epsilon-2)} = 71\,\mu^{(\epsilon-2)} - 309$. Je fais $\mu^{(\epsilon-2)} = 4$, ce qui donne $a^{(\epsilon-2)} = 25$, $M^{(\epsilon-2)} = \frac{a^{(\epsilon-2)2} - 341}{71} = 4$, ce qui donne l'équation $341\,u^{(\epsilon-2)2} + 4 = t^{(\epsilon-2)2}$. Cette équation ſe trouve deux fois dans le développement de l'équation $341\,u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$. On a d'abord

$341\,u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$	$a^{(1)} = 18$			$u^{(1)} = 0,$	$t^{(1)} = 1$
$341\,u^{(2)2} - 17 = t^{(2)2}$	$a^{(2)} = 16$	$\mu^{(1)} = 2$		$u^{(2)} = 1,$	$t^{(2)} = 18$
$341\,u^{(3)2} + 5 = t^{(3)2}$	$a^{(3)} = 14$	$\mu^{(2)} = 6$		$u^{(3)} = 2,$	$t^{(3)} = 37$
$341\,u^{(4)2} - 29 = t^{(4)2}$	$a^{(4)} = 15$	$\mu^{(3)} = 1$		$u^{(4)} = 13,$	$t^{(4)} = 240$
$341\,u^{(5)2} + 4 = t^{(5)2}$	$a^{(5)} = 25$	$\mu^{(4)} = 10$		$u^{(5)} = 15,$	$t^{(5)} = 277$
$341\,u^{(6)2} + 71 = t^{(6)2}$	$a^{(6)} = 309$	$\mu^{(5)} = 4$		$u^{(6)} = 163,$	$t^{(6)} = 3010$
$341\,u^{(7)2} + 1340 = t^{(7)2}$				$u^{(7)} = 667,$	$t^{(7)} = 12317.$

Je détermine $\mu^{(4)}$ par l'équation $4\mu^{(4)} - 15 = 25$. J'ai enſuite par le § 28. $u^{(\epsilon)} = 12317\,u^{(1)} \pm 667\,t^{(1)}$, $t^{(\epsilon)} = 12317\,t^{(1)} \pm 341.667\,u^{(1)}$. Je ſubſtitue pour $u^{(1)}$ & $t^{(1)}$ les valeurs générales rapportées dans le § précédent, & j'ai les valeurs générales de $u^{(\epsilon)}$ & de $t^{(\epsilon)}$ que je ſupprime pour abréger. Prenant enſuite la ſeconde équation $341\,u^{(\epsilon-2)2} + 4 = t^{(\epsilon-2)}$ dans la table du § préc. j'ai,

$341\,u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$	$a^{(1)} = 18$			$u^{(1)} = 0,$	$t^{(1)} = 1$
$341\,u^{(2)2} - 17 = t^{(2)2}$	$a^{(2)} = 16$	$\mu^{(1)} = 2$		$u^{(2)} = 1,$	$t^{(2)} = 18$
$341\,u^{(3)2} + 5 = t^{(3)2}$	$a^{(3)} = 14$	$\mu^{(2)} = 6$		$u^{(3)} = 2,$	$t^{(3)} = 37$
$341\,u^{(4)2} - 29 = t^{(4)2}$	$a^{(4)} = 15$	$\mu^{(3)} = 1$		$u^{(4)} = 13,$	$t^{(4)} = 240$
$341\,u^{(5)2} + 4 = t^{(5)2}$	$a^{(5)} = 17$	$\mu^{(4)} = 8$		$u^{(5)} = 15,$	$t^{(5)} = 277$
$341\,u^{(6)2} - 13 = t^{(6)2}$	$a^{(6)} = 9$	$\mu^{(5)} = 2$		$u^{(6)} = 133,$	$t^{(6)} = 2456$
$341\,u^{(7)2} + 20 = t^{(7)2}$	$a^{(7)} = 11$	$\mu^{(6)} = 1$		$u^{(7)} = 281,$	$t^{(7)} = 5189$
$341\,u^{(8)2} - 11 = t^{(8)2}$	$a^{(8)} = 11$	$\mu^{(7)} = 2$		$u^{(8)} = 414,$	$t^{(8)} = 7645$
$341\,u^{(9)2} + 20 = t^{(9)2}$	$a^{(9)} = 9$	$\mu^{(8)} = 1$		$u^{(9)} = 1109,$	$t^{(9)} = 20479$
$341\,u^{(10)2} - 13 = t^{(10)2}$	$a^{(10)} = 17$	$\mu^{(9)} = 2$		$u^{(10)} = 1523,$	$t^{(10)} = 28124$
$341\,u^{(11)2} + 4 = t^{(11)2}$	$a^{(11)} = 25$	$\mu^{(10)} = 2$		$u^{(11)} = 4155,$	$t^{(11)} = 76727$
$341\,u^{(12)2} + 71 = t^{(12)2}$	$a^{(12)} = 309$	$\mu^{(11)} = 4$		$u^{(12)} = 6787,$	$t^{(12)} = 125330$
$341\,u^{(13)2} + 1340 = t^{(13)2}$				$u^{(13)} = 31303,$	$t^{(13)} = 578047.$

Je détermine $\mu^{(10)}$ par l'équation $4\mu^{(10)} + 17 = 25$, ce qui fait que je prends $u^{(12)} = \mu^{(10)} u^{(11)} - u^{(10)}$, $t^{(12)} = \mu^{(10)} t^{(11)} - t^{(10)}$. J'ai donc par le § 28. $u^{(e)} = 578047 u^{(1)} \pm 31303 t^{(1)}$, $t^{(e)} = 578047 t^{(1)} \pm 341.31303 u^{(1)}$, d'où je tire les valeurs générales de $u^{(e)}$ & $t^{(e)}$ comme ci-deſſus.

§ 50. Je prends la troiſième valeur $a^{(e-1)} = 361$, ce qui donne $M^{(e-1)} = 97$ & l'équation $341 u^{(e-2)2} + 97 = t^{(e-2)2}$. On a enſuite $a^{(e-2)} = 97\mu^{(e-2)} - 361$. Je prends $\mu^{(e-2)} = 4$, ce qui donne $a^{(e-2)} = 27$, $M^{(e-2)} = \frac{a^{(e-2)2} - 341}{97} = 4$, ce qui donne l'équation $341 u^{(e-2)2} + 4 = t^{(e-2)2}$, ce qui eſt la même équation que dans le cas précédent. J'obſerve que je n'ai pas beſoin d'écrire toute la table, mais ſeulement l'équation qui précède celle à laquelle je ſuis parvenu

$341 u^{(6)2} - 29 = t^{(6)2}$	$a^{(4)} = 15$	$\mu^{(3)} = 1$	$u^{(6)} = 13$,	$t^{(4)} = 240$
$341 u^{(5)2} + 4 = t^{(5)2}$	$a^{(5)} = 27$	$\mu^{(4)} = 3$	$u^{(5)} = 15$,	$t^{(5)} = 277$
$341 u^{(6)2} + 97 = t^{(6)2}$	$a^{(6)} = 361$	$\mu^{(5)} = 4$	$u^{(6)} = 32$,	$t^{(6)} = 591$
$341 u^{(7)2} + 1340 = t^{(7)2}$			$u^{(7)} = 113$,	$t^{(7)} = 2087$.

Je détermine $\mu^{(4)}$ par l'équation $4\mu^{(4)} + 15 = 27$. J'ai par le § 28. $u^{(e)} = 2087 u^{(1)} \pm 113 t^{(1)}$; $t^{(e)} = 2087 t^{(1)} \pm 341.113 u^{(1)}$, d'où je tire les valeurs générales comme ci-deſſus. J'ai enſuite

$341 u^{(10)2} - 13 = t^{(10)2}$	$a^{(10)} = 17$	$\mu^{(9)} = 2$	$u^{(10)} = 1523$,	$t^{(10)} = 28124$
$341 u^{(11)2} + 4 = t^{(11)2}$	$a^{(11)} = 27$	$\mu^{(10)} = 11$	$u^{(11)} = 4155$,	$t^{(11)} = 76727$
$341 u^{(12)2} + 97 = t^{(12)2}$	$a^{(12)} = 361$	$\mu^{(11)} = 4$	$u^{(12)} = 47228$,	$t^{(12)} = 872121$
$321 u^{(13)2} + 1340 = t^{(13)2}$			$u^{(13)} = 184757$,	$t^{(13)} = 3411757$.

Je détermine $\mu^{(10)}$ par l'équation $4\mu^{(10)} - 17 = 27$. J'ai par le § 28. $u^{(e)} = 3411757 u^{(1)} \pm 184757 t^{(1)}$, $t^{(e)} = 3411757 t^{(1)} \pm 341.184757 u^{(1)}$, dont on tirera les valeurs générales comme ci-deſſus.

§ 51. Je prends la quatrième valeur $a^{(e-1)} = 629$, ce qui donne $M^{(e-1)} = 295$ & l'équation $341 u^{(e-1)2} + 295 =$

$t^{(\epsilon-1)2}$. On a enſuite $a^{(\epsilon-2)} = 295\mu^{(\epsilon-2)} - 629$. Je fais $\mu^{(\epsilon-2)} = 2$, ce qui donne $a^{(\epsilon-2)} = 39$, $M^{(\epsilon-2)} = \frac{a^{(\epsilon-2)2} - 341}{295} = 4$, ce qui donne encore la même équation que dans les cas précédens. J'ai donc

$341u^{(4)2} - 29 = t^{(4)2}$ $a^{(4)} = 15$ $\mu^{(3)} = 1$ $u^{(4)} = 13$, $t^{(4)} = 240$
$341u^{(5)2} + 4 = t^{(5)2}$ $a^{(5)} = 39$ $\mu^{(5)} = 6$ $u^{(5)} = 15$, $t^{(5)} = 277$
$341u^{(6)2} + 295 = t^{(6)2}$ $a^{(6)} = 629$ $\mu^{(6)} = 2$ $u^{(6)} = 77$, $t^{(6)} = 1422$
$341u^{(7)2} + 1340 = t^{(7)2}$ $u^{(7)} = 169$, $t^{(7)} = 3121$.

Je détermine $\mu^{(4)}$ par l'équation $4\mu^{(4)} + 15 = 39$. J'ai par le § 28, $u^{(\epsilon)} = 3121u^{(1)} \pm 169t^{(1)}$; $t^{(\epsilon)} = 3121t^{(1)} \pm 341.169u^{(1)}$ dont on tirera les valeurs générales comme ci-deſſus. J'ai enſuite

$341u^{(10)2} - 13 = t^{(10)2}$ $a^{(10)} = 17$ $\mu^{(9)} = 2$ $u^{(10)} = 1523$, $t^{(10)} = 28124$
$341u^{(11)2} + 4 = t^{(11)2}$ $a^{(11)} = 39$ $\mu^{(10)} = 14$ $u^{(11)} = 4155$, $t^{(11)} = 76727$
$341u^{(12)2} + 295 = t^{(12)2}$ $a^{(12)} = 629$ $\mu^{(11)} = 2$ $u^{(12)} = 59693$, $t^{(12)} = 1102302$
$341u^{(13)2} + 1340 = t^{(13)2}$ $u^{(13)} = 123541$, $t^{(13)} = 2281331$.

Je détermine $\mu^{(10)}$ par l'équation $4\mu^{(10)} - 17 = 39$. J'ai par le § 28, $u^{(\epsilon)} = 2281331u^{(1)} \pm 123541t^{(1)}$, $t^{(\epsilon)} = 2281331t^{(1)} \pm 341.123541u^{(1)}$ dont l'on tire les valeurs générales comme ci-deſſus.

§ 52. On obſervera que $M^{(\epsilon)} = 1340 = 4.5.67$. Comme 4 eſt un carré, ſi l'on met $2u^{(\epsilon)}$ & $2t^{(\epsilon)}$ au lieu de $u^{(\epsilon)}$ & $t^{(\epsilon)}$ & qu'on diviſe toute l'équation par 4, on a $341u^{(\epsilon)2} + 335 = t^{(\epsilon)2}$; dans cette équation on a $M^{(\epsilon)} = 335$, $B = 341$, ce qui donne $M^{(\epsilon-1)} = \frac{a^{(\epsilon-1)2} - 341}{335}$. Or $335 = 5.67$, ce qui donne les deux formules, I. $\frac{a^2 - 341}{5}$. II. $\frac{a^2 - 341}{67}$. Nous avons traité ces formules § 47, mais nous en avons exclus les nombres pairs à cauſe de la formule $4n' \pm 1$ qui réſultoit de la formule $\frac{a^2 - 341}{2}$. Cette formule n'ayant pas lieu dans ce cas-ci, nous pouvons prendre les nombres 26 & 294 qui ſont communs aux deux dernières formules.

Mais 294 donne la même chose que $335 - 294 = 41$. Je fais $a^{(\epsilon-1)} = 26$, ce qui donne $M^{(\epsilon-1)} = 1$, & l'équation $341\,u^{(\epsilon-1)2} + 1 = t^{(\epsilon-1)2}$. J'ai donc

$341\,u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$ $a^{(1)} = 26$, $u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$
$341\,u^{(2)2} + 335 = t^{(2)2}$ $u^{(2)} = 1$, $t^{(2)} = 26$.

J'ai donc $u^{(\epsilon)} = 1$, $t^{(\epsilon)} = 26$, & en doublant $u^{(\epsilon)} = 2$, $t^{(\epsilon)} = 52$. J'ai donc § 28 $u^{(\epsilon)} = 52\,u^{(1)} \pm 2\,t^{(1)}$, $t^{(\epsilon)} = 52\,t^{(1)} \pm 341.2\,u^{(1)}$ d'où l'on tire les valeurs générales comme ci-dessus. Je prends ensuite $a^{(\epsilon-1)} = 41$, ce qui donne $M^{(\epsilon-1)} = 4$, & $341\,u^{(\epsilon-1)2} + 4 = t^{(\epsilon-1)2}$. J'ai donc d'abord la table suivante:

$341\,u^{(4)2} - 29 = t^{(4)2}$ $a^{(4)} = 15$ $\mu^{(4)} = 1$ $u^{(4)} = 13$, $t^{(4)} = 240$
$341\,u^{(5)2} + 4 = t^{(5)2}$ $a^{(5)} = 41$ $\mu^{(5)} = 14$ $u^{(5)} = 15$, $t^{(5)} = 277$
$341\,u^{(6)2} + 335 = t^{(6)2}$ $u^{(6)} = 223$, $t^{(6)} = 4118$.

Je détermine $\mu^{(4)}$ par l'équation $4\,\mu^{(4)} - 15 = 41$. J'ai donc $u^{(\epsilon)} = 223$, $t^{(\epsilon)} = 4118$, & en doublant $u^{(\epsilon)} = 446$, $t^{(\epsilon)} = 8236$. J'ai donc par le § 28. $u^{(\epsilon)} = 8236\,u^{(1)} \pm 446\,t^{(1)}$, $t^{(\epsilon)} = 8236\,t^{(1)} \pm 341.446\,u^{(1)}$ d'où l'on tirera les formules générales comme ci-dessus. J'ai ensuite

$341\,u^{(10)2} - 13 = t^{(10)2}$ $a^{(10)} = 17$ $\mu^{(9)} = 2$ $u^{(10)} = 1523$, $t^{(10)} = 28124$
$341\,u^{(11)2} + 4 = t^{(11)2}$ $a^{(11)} = 41$ $\mu^{(10)} = 6$ $u^{(11)} = 4155$, $t^{(11)} = 76727$
$341\,u^{(12)2} + 335 = t^{(12)2}$ $u^{(12)} = 23407$, $t^{(12)} = 432238$.

Je détermine $\mu^{(10)}$ par l'équation $4\,\mu^{(10)} + 17 = 41$. J'ai donc $u^{(\epsilon)} = 23407$, $t^{(\epsilon)} = 432238$, donc $u^{(2\epsilon)} = 46814$, $t^{(2\epsilon)} = 864476$. J'ai donc par le § 28. $u^{(\epsilon)} = 864476\,u^{(1)} \pm 46814\,t^{(1)}$, $t^{(\epsilon)} = 864476\,t^{(1)} \pm 341.46814\,u^{(1)}$, d'où l'on tirera les formules générales comme ci-dessus.

§ 53. La méthode reste la même si B est négatif. Soit l'équation $-17\,u^{(\epsilon)2} + 909 = t^{(\epsilon)2}$. On a $M^{(\epsilon)} = 909$, $B = -17$. On a donc $M^{(\epsilon-1)} = \frac{a^{(\epsilon-1)2} + 17}{909}$. Or $909 = 9.101$, ce qui donne les deux formules I. $\frac{a^2 + 17}{9}$. II. $\frac{a^2 + 17}{101}$. La pre-

mière formule donne $a = 1$, ce qui donne $\sqrt{(909 M^{(\iota-1)} - 17)} = 9n' \pm 1$, la seconde donne $a = 36$, donc $\sqrt{(909 M^{(\iota-1)} - 17)} = 101 n'' \pm 36$. Or j'ai en reſtant au deſſous de $\frac{909}{2}$, $101 n'' \pm 36 = 36, 65, 137, 166, 238, 267, 339, 368, 440$. Il eſt aiſé de voir que de ces nombres il n'y a que 368 & 440 qui ſoient de la forme $9n' \pm 1$. Je n'ai donc que ces deux valeurs.

§ 54. Je prends la première valeur $a^{(\iota-1)} = 368$, ce qui donne $M^{(\iota-1)} = 149$ & l'équation $-17u^{(\iota-1)2} + 149 = t^{(\iota-1)2}$. Donc $a^{(\iota-2)} = 149\mu^{(\iota-2)} - 368$. Je fais $\mu^{(\iota-2)} = 2$, ce qui donne $a^{(\iota-2)} = 70$, $M^{(\iota-2)} = 33$, & l'équation $-17u^{(\iota-2)2} + 33 = t^{(\iota-2)2}$. Donc $a^{(\iota-3)} = 33\mu^{(\iota-3)} - 70$. Je fais $\mu^{(\iota-3)} = 2$, ce qui donne $a^{(\iota-3)} = 4$, $M^{(\iota-3)} = 1$ & l'équation $-17u^{(\iota-3)2} + 1 = t^{(\iota-3)}$. J'ai donc la table ſuivante:

$-17u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$	$a^{(1)} = 4$			$u^{(1)} = 0,\ t^{(1)} = 1$
$-17u^{(2)2} + 33 = t^{(2)2}$	$a^{(2)} = 70$	$\mu^{(1)} = 2$		$u^{(2)} = 1,\ t^{(2)} = 4$
$-17u^{(3)2} + 149 = t^{(3)2}$	$a^{(3)} = 368$	$\mu^{(2)} = 2$		$u^{(3)} = 2,\ t^{(3)} = 9$
$-17u^{(4)2} + 909 = t^{(4)2}$				$u^{(4)} = 5,\ t^{(4)} = 22.$

J'ai donc $u^{(\iota)} = 5$, $t^{(\iota)} = 22$, mais B étant négatif l'on ne peut pas tirer de là une infinité de valeurs comme dans le cas où il eſt poſitif.

§ 55. Je prends la ſeconde valeur $a^{(\iota-1)} = 440$, ce qui donne $M^{(\iota-1)} = 213$, & l'équation $-17u^{(\iota-1)2} + 213 = t^{(\iota-1)2}$. Donc $a^{(\iota-2)} = 213\mu^{(\iota-2)} - 440$. Je fais $\mu^{(\iota-2)} = 2$, ce qui donne $a^{(\iota-2)} = 14$, $M^{(\iota-2)} = 1$ & l'équation $-17u^{(\iota-2)2} + 1 + t^{(\iota-2)2}$. J'ai donc

$-17u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$	$a^{(1)} = 14$			$u^{(1)} = 0,\ t^{(1)} = 1$
$-17u^{(2)2} + 213 = t^{(2)2}$	$a^{(2)} = 440$	$\mu^{(1)} = 2$		$u^{(2)} = 1,\ t^{(2)} = 14$
$-17u^{(3)2} + 909 = t^{(3)2}$				$u^{(3)} = 2,\ t^{(3)} = 29.$

On a donc $u^{(\iota)} = 2$, $t^{(\iota)} = 29$. Voilà toutes les ſolutions poſſibles de l'équation propoſée.

§ 56.

§ 56. Soit l'équation $-7u^{(\prime)2}+1171=t^{(\prime)2}$. On a $M^{(\prime)}=1171$, $B=-7$ ce qui donne $M^{(\prime-1)}=\frac{a^{(\prime-1)2}+7}{1171}$. Comme 1171 eſt un nombre premier, il n'y a point de décompoſition. On trouve $a^{(\prime-1)}=321$, ce qui donne $M^{(\prime-1)}=88$, & l'équation $-7u^{(\prime-1)}+88=t^{(\prime-1)2}$. On a $a^{(\prime-2)}=88\mu^{(\prime-2)}-321$. Je fais $\mu^{(\prime-2)}+4$, ce qui donne $a^{(\prime-2)}=31$, $M^{(\prime-2)}=11$ & l'équation $-7u^{(\prime-2)2}+11=t^{(\prime-2)2}$. Donc $a^{(\prime-3)}=11\mu^{(\prime-3)}-31$. Je fais $\mu^{(\prime-3)}=3$, ce qui donne $a^{(\prime-3)}=2$, $M^{(\prime-3)}=1$ & l'équation $-7u^{(\prime-3)2}+1=t^{(\prime-3)2}$. J'ai donc

$-7u^{(1)2}+1=t^{(1)2}$	$a^{(1)}=2$		$u^{(1)}=0,$	$t^{(1)}=1$
$-7u^{(2)2}+11=t^{(2)2}$	$a^{(2)}=31$	$\mu^{(1)}=3$	$u^{(2)}=1,$	$t^{(2)}=2$
$-7u^{(3)2}+88=t^{(3)2}$	$a^{(3)}=321$	$\mu^{(2)}=4$	$u^{(3)}=3,$	$t^{(3)}=5$
$-7u^{(4)2}+1171=t^{(4)2}$			$u^{(4)}=11,$	$t^{(4)}=18.$

On a donc $u^{(\prime)}=11$, $t^{(\prime)}=18$. Il n'y a point d'autres ſolutions de l'équation propoſée.

§ 57. Au reſte, dans l'exemple du § 55 comme $909=9.101$, j'aurois pu faire mettre $3u^{(\prime)}$ & $3t^{(\prime)}$ au lieu de $u^{(\prime)}$ & $t^{(\prime)}$. L'équation deviendra donc en diviſant par 9, $-17u^{(\prime)2}+101=t^{(\prime)2}$. Donc $M^{(\prime-1)}=\frac{a^{(\prime-1)2}+17}{101}$. J'ai traité cette équation dans le § cité, & je n'ai trouvé que 36 qui fut au deſſous de $\frac{101}{2}$. Je prends donc $a^{(\prime-1)}=36$, ce qui donne $M^{(\prime-1)}=13$ & l'équation $-17u^{(\prime-1)2}+13=t^{(\prime-1)2}$. Donc $a^{(\prime-2)}=13u^{(\prime-2)}-36$. Je fais $\mu^{(\prime-2)}=3$, ce qui donne $a^{(\prime-2)}=3$, $M^{(\prime-2)}=2$ & l'équation $-17u^{(\prime-2)2}+2=t^{(\prime-2)2}$. Je ne puis deſcendre plus bas, ce qui fait voir que cette équation eſt inſoluble, puiſqu'on ne peut deſcendre immédiatement à l'équation $-17u^{(1)2}+1=t^{(1)2}$, car il n'y a point pour le cas de B négatif de développement analogue à celui où B eſt poſitif.

§ 58. La même méthode s'applique au cas où $M^{(\epsilon)}$ eſt négatif. Soit l'équation $37\,u^{(\epsilon)2} - 21612 = t^{(\epsilon)2}$. On a $M^{(\epsilon)} = -21612$, $B = 37$. Donc $M^{(\epsilon-1)} = \frac{a^{(\epsilon-1)2} - 37}{-21612}$. Or $21612 = 3.4.1801$, ce qui donne les trois formules I. $\frac{a^2 - 37}{3}$, II. $\frac{a^2 - 37}{4}$, III. $\frac{a^2 - 37}{1801}$. La première formule $\frac{a^2 - 37}{3}$ donne $a = 1$, $a^{(\epsilon-1)} = 3n' \pm 1$. La ſeconde formule $\frac{a^2 - 37}{4}$ donne $a = 1$, $a^{(\epsilon-1)} = 4n'' \pm 1$. La troiſième formule $\frac{a^2 - 37}{1801}$ donne $a = 389$, $a^{(\epsilon-1)} = 1801\,n''' \pm 389$. L'on trouve les trois nombres ſuivans qui conviennent aux trois formules, 389, 6815, 10417.

§. 59. Je prends la première valeur $a^{(\epsilon-1)} = 389$, ce qui donne $M^{(\epsilon-1)} = -84$ & l'équation $37\,u^{(\epsilon-1)2} - 84 = t^{(\epsilon-1)2}$. Donc $a^{(\epsilon-2)} = 84\,\mu^{(\epsilon-2)} - 389$. Je fais $\mu^{(\epsilon-2)} = 5$, ce qui donne $a^{(\epsilon-2)} = 31$, $M^{(\epsilon-2)} = -11$ & l'équation $37\,u^{(\epsilon-2)2} - 11 = t^{(\epsilon-2)2}$. Donc $a^{(\epsilon-3)} = 11\,\mu^{(\epsilon-3)} - 31$. Je fais $\mu^{(\epsilon-3)} = 3$, ce qui donne $a^{(\epsilon-3)} = 2$, $M^{(\epsilon-3)} = 3$ & l'équation $37\,u^{(\epsilon-3)2} + 3 = t^{(\epsilon-3)2}$. Ne pouvant deſcendre au deſſous de 3 je cherche ſi cette équation eſt contenue dans le développement de l'équation $37\,u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$ lequel eſt contenu dans la table ſuivante. Puis donc que cette équation ne

$37\,u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$
$37\,u^{(2)2} - 1 = t^{(2)2}$
$37\,u^{(3)2} + 1 = t^{(3)2}$

s'y trouve pas, il eſt clair que la valeur $a^{(\epsilon-1)} = 389$ ne donne rien.

§ 60. Je prends la ſeconde valeur $a^{(\epsilon-1)} = 6815$, ce qui donne $M^{(\epsilon-1)} = -2149$ & l'équation $37\,u^{(\epsilon-1)2} - 2149 = t^{(\epsilon-1)2}$. Donc $a^{(\epsilon-2)} = 2149\,\mu^{(\epsilon-2)} - 6815$. Je fais $\mu^{(\epsilon-2)} = 3$, ce qui donne $a^{(\epsilon-2)} = 368$, $M^{(\epsilon-2)} = -63$, & l'équation $a^{(\epsilon-3)} = 63\,\mu^{(\epsilon-3)} - 368$. Je fais $\mu^{(\epsilon-3)} = 6$,

ce qui donne $a^{(e-3)} = 10$, $M^{(e-3)} = -1$ & l'équation $37u^{(e-3)2} - 1 = t^{(e-3)2}$. Or cette équation eſt renfermée dans le développement de l'équation $37u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$. On a donc

$37u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$ $a^{(1)} = 6$ $u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$

$37u^{(2)2} - 1 = t^{(2)2}$ $a^{(2)} = 10$ $\mu^{(1)} = 4 = 16$ $u^{(2)} = 1$, $t^{(2)} = 6$

$37u^{(3)2} - 63 = t^{(3)2}$ $a^{(3)} = 368$ $\mu^{(2)} = 6 = 6$ $u^{(3)} = 4$, $t^{(3)} = 23$

$37u^{(4)2} - 2149 = t^{(4)2}$ $a^{(4)} = 6815$ $\mu^{(3)} = 3 = 3$ $u^{(4)} = 23$, $t^{(4)} = 132$

$37u^{(5)2} - 21612 = t^{(5)2}$ $u^{(5)} = 73$, $t^{(5)} = 419$

$u^{(1)} = 16$, $t^{(1)} = 97$

$u^{(2)} = 95$, $t^{(2)} = 576$

$u^{(3)} = 301$, $t^{(3)} = 1825$.

Je détermine $\mu^{(1)}$ par l'équation $\mu^{(1)} \pm 6 = 10$, ce qui donne deux valeurs de $\mu^{(1)}$, & par conſéquent deux valeurs de $u^{(e)}$ & $t^{(e)}$, ſavoir $u^{(e)} = 73$, $t^{(e)} = 419$; $u^{(e)} = 301$, $t^{(e)} = 1825$. On a donc $u^{(e)} = 419u^{(1)} \pm 73t^{(1)}$; $t^{(e)} = 419t^{(1)} \pm 37 \cdot 73t^{(1)}$; $u^{(e)} = 1825u^{(1)} \pm 301t^{(1)}$; $t^{(e)} = 1825t^{(1)} \pm 37 \cdot 301u^{(1)}$. Maintenant le développement de l'équation $37u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$ donne

$37u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$ $a^{(1)} = 6$ $u^{(1)} = 0$, $t^{(1)} = 1$

$37u^{(2)2} - 1 = t^{(2)2}$ $a^{(2)} = 6$ $\mu^{(1)} = 12$ $u^{(2)} = 1$, $t^{(2)} = 6$

$37u^{(3)2} + 1 = t^{(3)2}$ $u^{(3)} = 12$, $t^{(3)} = 73$.

On a donc en général $u^{(1)} = \frac{(73 + 12\sqrt{37})^p - (73 - 12\sqrt{37})^p}{2\sqrt{37}}$, $t^{(1)} = \frac{(73 + 12\sqrt{37})^p + (73 - 12\sqrt{37})^p}{2}$. On ſubſtituera ces valeurs dans les valeurs de $u^{(e)}$ & $t^{(e)}$.

§ 61. Je prends la troiſième valeur $a^{(e-1)} = 10417$, ce qui donne $M^{(e-1)} = -5021$ & l'équation $37u^{(e-1)2} - 5021 = t^{(e-1)2}$. Donc $a^{(e-2)} = 5021\mu^{(e-2)} - 10417$. Je fais $\mu^{(e-2)} = 2$, ce qui donne $a^{(e-2)} = 375$, $M^{(e-2)} = -28$, & l'équation $37u^{(e-2)2} - 28 = t^{(e-2)2}$. Donc $a^{(e-3)} = 28\mu^{(e-3)} - 375$. Je fais $\mu^{(e-3)} = 13$, ce qui donne $a^{(e-3)}$

$= 11$, $M^{(\varepsilon-3)} = -3$ & l'équation $37u^{(\varepsilon-3)2} - 3 = t^{(\varepsilon-3)2}$. Cette équation n'étant pas contenue dans le développement de l'équation $37u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$, cette valeur ne donne rien.

§ 62. Comme $M^{(\varepsilon)} = -3.4.1801$, & que 4 eſt un carré, en mettant au lieu de $u^{(\varepsilon)}$ & $t^{(\varepsilon)}$, $u^{(2\varepsilon)}$ & $t^{(2\varepsilon)}$ & diviſant toute l'équation par 4, on a $37u^{(\varepsilon)2} - 5403 = t^{(\varepsilon)2}$. On a ici $B = 37$, $M^{(\varepsilon)} = -5403 = -3.1801$, ce qui donne les deux formules, I. $\frac{a^2-37}{3}$. II. $\frac{a^2-37}{1801}$ qui donnent par le § 58, $a^{(\varepsilon-2)} = 3n' \pm 1$, $a^{(\varepsilon-2)} = 1801n'' \pm 389$. Les nombres plus petits que $\frac{5403}{2}$ qui correſpondent à ces deux formules, ſont 389, 1412.

§ 63. Je prends la première valeur $a^{(\varepsilon-1)} = 389$, ce qui donne $M^{(\varepsilon-1)} = -28$, & l'équation $37u^{(\varepsilon-1)2} - 28 = t^{(\varepsilon-1)2}$. Donc $a^{(\varepsilon-2)} = 28\mu^{(\varepsilon-2)} - 389$. Je fais $\mu^{(\varepsilon-2)} = 14$, ce qui donne $a^{(\varepsilon-2)} = 3$, $M^{(\varepsilon-2)} = 1$, & l'équation $37u^{(\varepsilon-2)2} + 1 = t^{(\varepsilon-2)2}$. J'ai donc

$37u^{(1)2} + 1$	$= t^{(1)2}$	$a^{(1)} = 6$		$u^{(1)} = 0,$	$t^{(1)} = 1$
$37u^{(2)2} - 1$	$= t^{(2)2}$	$a^{(2)} = 6$	$\mu^{(1)} = 12$	$u^{(2)} = 1,$	$t^{(2)} = 6$
$37u^{(3)2} + 1$	$= t^{(3)2}$	$a^{(3)} = 3$	$\mu^{(2)} = 3 = 9$	$u^{(3)} = 12,$	$t^{(3)} = 73$
$37u^{(4)2} - 28$	$= t^{(4)2}$	$a^{(4)} = 389$	$\mu^{(3)} = 14 = 14$	$u^{(4)} = 37,$	$t^{(4)} = 225$
$37u^{(5)2} - 5403$	$= t^{(5)2}$			$u^{(5)} = 506,$	$t^{(5)} = 3077$
				$u^{(6)} = 109,$	$t^{(6)} = 663$
				$u^{(7)} = 1538,$	$t^{(7)} = 9355.$

Je détermine $\mu^{(2)}$ par l'équation $\mu^{(2)} \pm 6 = 3$, ce qui donne $\mu^{(2)} = 3$, $\mu^{(2)} = 9$, & par conſéquent deux valeurs de $u^{(\varepsilon)}$ & $t^{(\varepsilon)}$ ſavoir $u^{(\varepsilon)} = 1012$, $t^{(\varepsilon)} = 6154$; $u^{(\varepsilon)} = 3076$, $t^{(\varepsilon)} = 18710$. On aura donc par le § 28.

$$u^{(\varepsilon)} = (6154u^{(1)} \pm 1012t^{(1)}), \quad t^{(\varepsilon)} = (6154t^{(1)} \pm 37.1012u^{(1)})$$
$$u^{(\varepsilon)} = (18710u^{(1)} \pm 3076t^{(1)}), \quad t^{(\varepsilon)} = (18710t^{(1)} \pm 37.3076u^{(1)}).$$

On ſubſtituera dans ces formules les valeurs générales de $u^{(1)}$ & $t^{(1)}$. Comme le développement de la formule $37u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$ contient deux fois l'équation $37u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$, j'ai encore la table ſuivante,

$37u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$ $a^{(1)} = 3$ $u^{(1)} = 0,\ t^{(1)} = 1$
$37u^{(2)2} - 28 = t^{(2)2}$ $a^{(2)} = 389$ $\mu^{(1)} = 14$ $u^{(2)} = 1,\ t^{(2)} = 3$
$37u^{(3)2} - 1403 = t^{(3)2}$ $u^{(3)} = 14,\ t^{(3)} = 43.$

J'ai donc $u^{(\varrho)} = 28$, $t^{(\varrho)} = 86$. Donc par le § 28.

$$u^{(\varrho)} = 86u^{(1)} \pm 28t^{(1)},\ t^{(\varrho)} = 86t^{(1)} \pm 37.28u^{(1)}.$$

On ſubſtituera dans ces formules les valeurs de $u^{(1)}$ & $t^{(1)}$.

§ 64. Je prends la ſeconde valeur $a^{(\varrho-1)} = 1412$, ce qui donne $M^{(\varrho-1)} = -369$ & l'équation $37u^{(\varrho-1)2} - 369 = t^{(\varrho-1)2}$. Donc $a^{(\varrho-2)} = 369\mu^{(\varrho-2)} - 1412$. Je fais $\mu^{(\varrho-2)} = 4$, ce qui donne $a^{(\varrho-2)} = 64$, $M^{(\varrho-2)} = -11$, & l'équation $37u^{(\varrho-2)2} - 11 = t^{(\varrho-2)2}$. Donc $a^{(\varrho-3)} = 11\mu^{(\varrho-3)} - 64$. Je fais $\mu^{(\varrho-3)} = 6$, ce qui donne $a^{(\varrho-3)} = 2$, $M^{(\varrho-3)} = 3$ & l'équation $37u^{(\varrho-3)2} + 3 = t^{(\varrho-3)2}$. Cette équation n'étant pas contenue dans le développement de l'équation $37u^{(1)2} + 1 = t^{(1)2}$, il s'enſuit que la valeur $a^{(\varrho-2)} = 1412$ ne donne rien.

§ 65. Au reſte, lorsque $M^{(\varrho)}$ eſt un nombre premier aſſez grand & B un nombre beaucoup moindre, il y a un procédé indirect qui conduit ſouvent aſſez promptement au but. Je mets dans ce cas l'équation $Bu^{(\varrho)2} + M^{(\varrho)} = t^{(\varrho)2}$ ſous la forme $\frac{t^{(\varrho)2} - M^{(\varrho)}}{B} = u^{(\varrho)2}$. Je cherche une valeur de $t^{(\varrho)}$ qui donne pour $\frac{t^{(\varrho)2} - M^{(\varrho)}}{B}$ un nombre entier. Soit t cette valeur, il eſt clair que toute valeur de $t^{(\varrho)} = nB \pm t$ ſatisfera auſſi à cette condition. Je prends donc la formule $\frac{(nB \pm t)^2 - M^{(\varrho)}}{B}$, & j'eſſaye pour n des nombres entiers poſitifs, juſques à ce que le quotient qui eſt toujours un nombre entier, ſoit un carré. Si je le trouve j'ai par cela même une ſolution particulière de l'équation, de laquelle je tirerai la ſolution générale par le § 28. Soit par exemple l'équation $30u^{(\varrho)2} + 1459 = t^{(\varrho)2}$ j'ai $\frac{t^{(\varrho)2} - 1459}{30}$. Je trouve $t^{(\varrho)} = 13$, ce qui donne $\frac{t^{(\varrho)2} - 1459}{30} = -43$. J'ai donc la formule $\frac{(30n \pm 13)^2 - 1459}{30}$. La valeur $n = 2$ donne en pre-

nant le signe —, $\frac{(47)^2 - 1459}{30} = 25$. Donc $t^{(\prime)} = 47$, $u^{(\prime)} = 5$ comme nous l'avons trouvé dans le § cité. Soit l'équation $-7u^{(\prime)2} + 1171 = t^{(\prime)2}$ du § 56. On a $\frac{t^{(\prime)2} - 1171}{-7}$. Je trouve $t^{(\prime)} = 3$ ce qui donne $\frac{t^{(\prime)2} - 1171}{-7} = 166$. J'ai donc la formule $\frac{(7n \pm 3)^2 - 1171}{-7}$. La valeur $n = 3$ donne en prenant le signe —, $\frac{(18)^2 - 1171}{-7} = 121$. Donc $t^{(\prime)} = 18$, $u^{(\prime)} = 11$, comme nous l'avons trouvé dans le § cité. Soit l'équation $13u^{(\prime)2} + 101 = t^{(\prime)2}$, du § 45. On a $\frac{t^{(\prime)2} - 101}{13}$. Je prends $t^{(\prime)} = 6$, ce qui donne $\frac{t^{(\prime)2} - 101}{13} = -5$. J'ai donc la formule $\frac{(13n \pm 6)^2 - 101}{13}$. La valeur $n = 9$ donne en prenant le signe +, $\frac{(123)^2 - 101}{13} = (34)^2$. Donc $t^{(\prime)} = 123$, $u^{(\prime)} = 34$, comme dans le § cité. Soit l'équation $-17u^{(\prime)2} + 909 = t^{(\prime)2}$ du § 53, on a $\frac{t^{(\prime)2} - 909}{-17}$. Je prends $t^{(\prime)} = 5$ & j'ai $\frac{t^{(\prime)2} - 909}{-17} = 52$. J'ai donc la formule $\frac{(17n + 5)^2 - 909}{-17}$. La valeur $n = 1$ donne en prenant le signe +, $\frac{(22)^2 - 909}{-17} = 25$. Donc $t^{(\prime)} = 22$, $u^{(\prime)} = 5$, comme dans le § cité. Soit l'équation $37u^{(\prime)2} - 21612 = t^{(\prime)2}$ du § 58. On a $\frac{t^{(\prime)2} + 21612}{37}$. Je prends $t^{(\prime)} = 12$, ce qui donne la formule $\frac{(37n \pm 12)^2 + 21612}{37}$. La valeur $n = 2$ donne en prenant le signe +, $t^{(\prime)} = 86$, $u^{(\prime)} = 28$ comme dans le § cité. On voit que cette méthode indirecte peut être plus courte, lors même que $M^{(\prime)}$ n'eſt pas un nombre premier.

LE CALCUL D'EXPOSITION.

INVENTÉ

PAR JEAN PHILIPPE GRUSON *).

INTRODUCTION.

En lisant aujourd'hui mon premier Mémoire à l'illustre Académie dont j'ai l'honneur d'être membre, j'ose réclamer son indulgence à mon égard, & la liberté de lui parler avec une confiance qui est fondée sur celle que j'ai du caractère de mes illustres Confrères. J'ose me flatter de profiter beaucoup dans la société d'hommes aussi éclairés que respectables, & je tâcherai toujours à leur exemple de me rendre utile de plus en plus au perfectionnement des hautes sciences qu'ils cultivent avec autant de gloire que de succès, & de mériter autant qu'il sera en moi, la distinction honorable que Sa Majesté a bïen voulu m'accorder en m'agrégeant à ce Corps illustre à tant d'égards. J'ai l'honneur de lui présenter aujourd'hui un Mémoire sur un nouveau calcul que j'ai inventé, & que j'ai appelé le *Calcul d'Exposition*, par lequel je traite avec la même facilité & la même célérité toutes les différentes parties de l'analyse, qui font l'objet du calcul différentiel, &, si j'ose porter un jugement, qui a la préférence sur le dernier calcul, d'être plus clair & plus évident, n'ayant besoin que des principes connus de l'al-

*) Lu à l'Académie le 14 juin 1798.

gèbre ordinaire, ainſi qu'il n'a d'autre métaphyſique que celle qui conſiſte dans les premiers principes & dans les opérations fondamentales du calcul; auſſi ce n'eſt pas un des moindres avantages que mon calcul ſe lie immédiatement à l'algèbre, dont le calcul différentiel a fait jusqu'ici une ſcience ſéparée, & ſi je ne me trompe, on trouvera même que mon calcul m'a conduit plus loin qu'on n'a été jusqu'ici, & que j'ai ſu manier mon calcul de manière qu'il paroît ne rien céder pour la ſimplicité, célérité & généralité des opérations, au calcul *combinatoire* de M. *Hindenburg*, ſans pourtant diminuer le mérite de cette analyſe combinatoire, qui dans le fond a la préférence d'être fondée ſur des principes beaucoup plus élémentaires; & ſans ſa connoiſſance, je l'avoue franchement, je n'aurois peut-être pas réuſſi. J'oſe me flatter auſſi que cette illuſtre Académie voudra bien me pardonner d'oſer lui préſenter un Mémoire ſur un objet qu'elle a déjà couronné en 1786 *). M. *Lhuilier* traitant ces hauts calculs par la méthode des limites, avec beaucoup de ſagacité & plus de ſoin encore que *Maclaurin*, *d'Alembert* & pluſieurs autres auteurs avant lui, m'a bien convaincu qu'on peut par la théorie des limites enviſagées d'une manière particulière, démontrer rigoureuſement les principes du calcul différentiel. Mais je ne peux pas diſſimuler que l'eſpèce de métaphyſique qu'on eſt obligé d'y employer, me ſemble étrangère à l'eſprit de l'analyſe. Il me paroit même qu'on s'éloigne quelquefois du vrai ſens des limites, car les véritables limites, ſuivant les notions des anciens, ſont des quantités qu'on ne peut paſſer, quoiqu'on puiſſe en approcher auſſi près que l'on veut. La géométrie élémentaire nous apprend que le cercle eſt la véritable limite des polygones inſcrits & circonſcrits. Mais la ſous-tangente n'eſt pas à la rigueur la limite des ſous-ſécantes, parce que rien n'empêche la ſous-ſécante de croître encore lorſqu'elle eſt devenue ſous-tangente.

Mon

*) Voyez Expoſition élémentaire des principes des calculs ſupérieurs, qui a remporté le prix pour l'année 1786 par M. *Lhuilier*.

Mon invention étoit faite long-temps avant que j'euſſe le bonheur de voir l'ouvrage du célèbre & illuſtre *la Grange* ſur la Nouvelle théorie des fonctions, dont je viens de donner une traduction en allemand. Ses principes ſont entièrement différens des miens, & diſtinguent aſſez ma marche de celle du génie ſupérieur de ce grand homme.

Expoſition de quelques principes préliminaires de l'analyſe élémentaire.

Pour donner à mon eſſai d'un nouveau calcul toute la clarté & la rigueur poſſible, j'aurai l'honneur d'expoſer ici quelques principes ſur la forme que prend le développement d'une fonction de la forme $(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 \ldots . Qx^p)$, ſi on la multiplie ou diviſe par une ou par pluſieurs fonctions de la même forme, ou ſi on l'élève à une puiſſance quelconque, entière, fractionnaire, poſitive ou négative. Je ne me ſouviens pas d'avoir trouvé cette matière traitée nulle part aſſez ſatisfaiſante, & pour les autres théorèmes & problèmes que je traiterai dans cette expoſition, je ne connois aucun ouvrage où la manière de procéder ſoit auſſi expéditive & élémentaire en même temps, n'ayant par-tout beſoin que des principes de l'algèbre ordinaire, ce qui donne aux démonſtrations une évidence qui ne laiſſe rien à déſirer.

§ 1.

Multipliant les deux fonctions F & f de la forme ſuivante:

$$F = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots . + Qx^n$$
$$f = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots . + qx^m$$

le produit ſera pareillement une fonction de la même forme de x.

Car le produit de ces deux fonctions ſera

$$F.f = f + f.Ax + f.Bx^2 + f.Cx^3 + \ldots + f.Qx^n$$

mais ici le premier terme f eſt une des fonctions données, & les autres termes, comme $f.Qx^n$, donnent évidemment des fonctions de la forme

$$f.Qx^n = Qx^n + Qax^{n+1} + Qbx^{n+2} + \ldots + Qqx^{n+m}$$

donc la ſomme $f + f.Ax + f.Bx^2 + \ldots + f.Qx^n$ ou $F.f$ ſera ſûrement de la même forme que F & f ou

$$F.f = 1 + ax + \beta x^2 + \delta x^3 + \ldots + \mu x^{m+n}.$$

§ 2.

De là ſuit que le produit d'autant de fonctions de la forme

$$1 + Ax + Bx^2 + \ldots + Qx^n$$

ſera toujours une fonction de la même forme.

§ 3.

De même, (n) étant un nombre entier & poſitif, on aura

$$(f)^n = (1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots + qx^m)^n$$
$$= 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots + Qx^{nm}$$

c'eſt-à-dire $(f)^n = f^n$ ſera de la même forme que f.

§ 4.

Soient F & f toujours des fonctions de la forme en queſtion, il eſt ſûr que ſous la condition que m & n ſoient des nombres entiers & poſitifs, on aura toujours

$(F)^m$ de la même forme que $(F)^n$

De là ſuit que $[(F)^m]^{\frac{1}{n}}$ doit auſſi être de la même forme que $[(F)^n]^{\frac{1}{n}}$

c'eſt-à-dire $(F)^{\frac{m}{n}}$ eſt de la même forme que F.

Il eſt d'ailleurs clair que $\frac{m}{n}$ peut repréſenter tel nombre rompu qu'on voudra

§ 5.

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + \ldots$$

ici $y = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots$

$$= ax\left(1 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x^3 + \ldots\right)$$

donc chaque puiſſance r de y ſera

$$y^r = a^r x^r \left(1 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} x^2 + \ldots\right)^r$$

donc y^r eſt ſûrement de la forme $\alpha x^r + \beta x^{r+1} + \gamma x^{r+2} + \ldots$ ainſi ſans contradiction

$\frac{1}{F}$ eſt de la même forme que F.

Comme $\frac{f}{F} = \frac{1}{F} \cdot f$, on a ſans diſpute auſſi (§ 1.)

$\frac{f}{F}$ de la même forme que f & F

donc $\left(\frac{1}{F}\right)^m$ & $\left(\frac{1}{F}\right)^{\frac{m}{n}}$ ou $\frac{1}{F^m}$ & $\frac{1}{F^{\frac{m}{n}}}$ ou F^{-n} & $F^{-\frac{m}{n}}$ de la même forme que F (§ 4.).

§ 6.

Il ſera donc toujours permis de ſuppoſer l'égalité

$$(1 + ax + bx^2 + \ldots)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$$

quel que ſoit l'expoſant n, nombre entier, rompu, poſitif ou négatif. Comme on peut toujours aſſigner les limites entre leſquelles un nombre irrationnel tombe, & que l'égalité précédente ſubſiſte toujours pour ces dites limites, elle doit auſſi être juſte pour n irrationnel.

§ 7.

Je m'arrête ici, n'ayant pour le moment beſoin que des fonctions d'une ſeule variable, mais j'ajouterai quelques propoſitions analytiques dont j'aurai beſoin dans la ſuite, & qu'il ſera bon d'avoir ſous les yeux.

§ 8.

Si l'on a une équation entre des quantités qui dépendent d'une variable, & d'autres qui n'en dépendent pas & demeurent toujours les mêmes; & que l'équation ait lieu pour des valeurs quelconques de la variable; les termes indépendans & les termes dépendans de cette variable ſeront ſéparément égaux entre eux.

Ce principe qui eſt le fondement de la méthode des coëfficiens indéterminés, ſe trouve démontré dans tous les bons ouvrages d'algèbre. Je ne donnerai donc ici que quelques exemples.

A, B, $C \ldots$, a, b, c, $d \ldots f$, F étant des quantités indépendantes de x, & qu'on a pour toutes les valeurs poſſible de x

$$F = f + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots.$$

ou $F + Ax + Bx^2 + \ldots = f + ax + bx^2 + \ldots$

Il ſuit du principe énoncé que

$$F = f;$$

en particulier on tire de la première équation

$$a = b = c = d = \ldots. = 0$$

& de la ſeconde équation

$$A = a$$
$$B = b$$
$$C = c \quad \&c.$$

§ 9.

A, B étant des quantités déterminées x, y deux quantités variables & qui peuvent devenir plus petites que toute quantité finie & aſſignable de la même eſpèce, & qu'on a pour toutes les valeurs de x & y

I) $A < B + x$ & en même temps $A > B - y$

II) $A < B - x$ & en même temps $A > B - y$

on tirera tout de ſuite, de (I) auſſi bien que de (II) l'équation

$$A = B$$

car il eſt viſible que $A >$ ou $<$ que B nous fait tomber dans une abſurdité.

On pourra imaginer encore les cas ſuivans:

III) $A < B - x$ & en même temps $A > B + y$

mais ces deux conditions ne peuvent pas ſubſiſter en même temps; de même les conditions

IV) $A > B + x$ & en même temps $A < B + y$

ne peuvent pas avoir lieu pour toutes les valeurs de x & y.

§ 10.

Il ſuit delà qu'en général, ayant

$A > B \pm x$ & en même temps $A < B \pm y$

on en a le droit d'en conclure que $A = B$.

§ 11.

Voici une application qui nous ſera utile pour nos recherches. La ſomme de la ſérie géométrique décroiſſante $a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots ae^{n-1}$ du premier terme (a) jusqu'au dernier $u = ae^{n-1}$ eſt

$$S = \frac{a}{1-e} - \frac{ue}{1-e}$$

Il eſt facile à concevoir qu'on peut prendre dans la ſérie propoſée autant de termes, ainſi que dans la formule de la ſomme la partie $\frac{ue}{1-e}$ devienne plus petite qu'aucune quantité finie & aſſignable; ſoit Σ la ſomme de la dite ſérie priſe à l'infini, nous ſaurons pour ſûr que

$\Sigma < \frac{a}{1-e} + \frac{ue}{1-e}$ mais en même temps $\Sigma > \frac{a}{1-e} - \frac{ue}{1-e}$

donc d'après (§ 10.) $\Sigma = \frac{a}{1-e}$.

§ 12.

Dans la ſuite $\frac{a}{1}x + \frac{b}{1.2}.x^2 + \frac{c}{1.2.3}.x^3 + \frac{d}{1.2.3.4}.x^4$

$+ \ldots \frac{r}{1.2.\ldots n}x^n + \ldots$ *infinitum*

on peut toujours trouver pour la quantité variable x une valeur compriſe entre zéro & l'unité, telle que chacun des termes ſurpaſſe la ſomme de ceux qui le ſuivent.

Soit $s = \frac{b}{1.2}.x^2 + \frac{c}{1.2.3}.x^3 + \frac{d}{1.2.3.4}.x^4 + \ldots$ *infinitum*

& déſignons par C le plus grand coëfficient de la ſuite, ou même une quantité plus grande que ce plus grand coëfficient: on aura évidemment

$$s < Cx^2 + Cx^3 + Cx^4 \ldots.$$
$$\text{ou } s < Cx\,[x + x^2 + x^3 + \ldots.]$$
$$s < Cx \cdot \frac{x}{1-x} = \frac{Cx^2}{1-x} \text{ (§ 11.)}$$

tout ſe réduit donc à prouver qu'on peut toujours aſſigner pour x une valeur telle qu'on ait, par exemple,

$$ax > \frac{Cx^2}{1-x}$$

car cette valeur donnera, à *fortiori*, $ax > s$, on aura donc

$$a > \frac{Cx}{1-x}$$
$$a - ax > Cx \text{ *)}$$
$$a > (C + a)\,x$$
$$\text{d'où } \frac{a}{a+C} > x.$$

Ainſi toutes les valeurs de x compriſes entre zéro & $\frac{a}{x+C}$ ſatisferont à cette condition.

On démontreroit de la même manière qu'on peut toujours trouver pour x une valeur telle que l'un quelconque des autres termes ſurpaſſe la ſomme de ceux qui le ſuivent, & on aſſigneroit les limites entre leſquelles ſont compriſes ces valeurs de x.

Soit en général

$$S = \frac{s \cdot x^{n+1}}{1.2\ldots n(n+1)} + \frac{s \cdot x^{n+2}}{1.2\ldots(n+1)(n+2)} + \ldots \textit{ infinitum}$$

*) Je dois faire obſerver au lecteur peu verſé dans l'analyſe, qu'on ſe permet quelquefois ici de raiſonner: comme le plus grand doit toujours reſter plus grand, & le moindre moindre, quand on multiplie une inégalité par une égalité, ainſi $a - ax > Cx$
multiplié par $-1 = -1$
ce qui donne $-a + ax > -Cx$
d'où $(a + C)\,x > a$
& de là $x > \frac{a}{a+C}$, réſultat évidemment faux. Il n'eſt pas difficile de dévoiler ce ſophiſme.

donc $$S < C.x^{n+1} + C.x^{n+2} + \ldots$$
$$S < C.x^n\,[x + x^2 + \ldots]$$
$$S < \frac{Cx^{n+1}}{1-x} \text{ (§ 11.).}$$

La condition eſt

$$\frac{r}{1.2\ldots n}.x^n > S$$

& cette condition ſera ſûrement remplie, ſi on fait

$$\frac{r}{1.2\ldots n}x^n > \frac{Cx^{n+1}}{1-x}$$

ou $$\frac{r}{1.2\ldots n} > \frac{Cx}{1-x}$$

d'ou réſulte $$\frac{r}{1.2\ldots n.C+r} > x.$$

§ 13.

Soit y un nombre auſſi petit qu'on voudra on doit trouver un nombre x tel que

$$y > Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots.$$

Suppoſons K le plus grand coëfficient, on aura

$$Ax + Bx^2 + \ldots < Kx + Kx^2 + Kx^3 + \ldots$$

ou $$Ax + Bx^2 + \ldots < \frac{Kx}{1-x} \text{ (§ 11.)}$$

On ſatisfera donc à la queſtion en cherchant pour x une valeur telle que

$$\frac{Kx}{1-x} < y$$

ce qui donne $$x < \frac{y}{K+y}$$

donc, toutes les valeurs de x compriſes entre zéro & $\frac{y}{K+y}$ rempliront la queſtion.

J'ai ſuppoſé tous les termes poſitifs, on voit bien que s'il y a quelques termes poſitifs & d'autres négatifs qu'à *fortiori* $x < \frac{y}{K+y}$ réſoudra la queſtion.

§ 14.

Déterminer la valeur de x pour que $Ax > Bx^2 + Cx^3 + \ldots$ & en même temps $Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots < y$. Par les conditions on a $2Ax > Ax + Bx^2 + \ldots$ ou $2Ax > \frac{Kx}{1-x}$ (§ 13.) ainſi $2A > \frac{K}{1-x}$; d'où $x < \frac{2A-K}{2A}$. Mais on a encore par les conditions $2Ax < y$ donc $x < \frac{y}{2A}$; on n'a donc qu'à prendre pour x une valeur plus petite encore que la plus petite de ces deux valeurs.

§ 15.

Soit pour toutes les valeurs de x

$$A > B + ax + bx^2 + \ldots$$

& en même temps $A < B + \alpha x + \beta x^2 + \ldots$

on en conclura $A = B$ (§§ 9. 12.).

§ 16.

Si l'on a trois expreſſions ordonnées ſuivant les puiſſances de x

$$U = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots = A + u$$
$$V = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots = \alpha + v$$
$$W = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots = a + w$$

& que, ſans connoître la valeur de V, on ſache qu'elle eſt intermédiaire entre celles de U & de W, c'eſt-à-dire plus grande que l'une & moindre que l'autre; ſi les deux ſéries extrêmes ont un certain nombre de leurs premiers termes égaux entre eux, la ſérie de V aura le même nombre de ſes premiers termes égaux aux termes correſpondans des autres ſéries. Si l'on a, par exemple, $A = a$, $B = b$; on aura auſſi $\alpha = A$, $\beta = B$.

Car ſelon les conditions on a

$\alpha + v > A + u$ & en même temps $\alpha + v < a + u$

ou $\alpha > A + u - v$ & en même temps $\alpha < a + w - v$

mettant $A = a$ on aura

$\alpha > a + u - v$ & en même temps $\alpha < a + w - v$

mais

mais comme on peut toujours aſſigner une valeur pour x telle que les quantités u, v, w & ainſi $u - v$, $w - v$ deviennent plus petites qu'aucune quantité donnée (§ 13.) nous aurons de là tout de ſuite (§ 9. IV)

$$\alpha = a$$

L'égalité des autres termes ſe démontre d'une manière analogue.

§ 17.

L'importance des principes ci-deſſus ſe manifeſte dans beaucoup de recherches analytiques; nous ne ferons ici qu'effleurer quelques applications. Mais pour abréger les expreſſions nous repréſenterons dans la ſuite, une ſérie telle que

$$Ax^n + Bx^{n+1} + Cx^{n+2} \ldots = (A + Bx + Cx^2 \ldots)x^n$$

par $\mathfrak{P}x^n$, $\mathfrak{P}'x^n$, $\mathfrak{P}''x^n$ &c. ou par Ωx^n, $\Omega' x^n$, $\Omega'' x^n$ &c.
On peut donc repréſenter

$$1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots \text{ par } 1 + ax + \mathfrak{P}x^2$$

de même

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots \text{ par } a + bx + \mathfrak{P}x^2$$

ou $a\left[1 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x^2 + \ldots\right]$ par $a\left[1 + \frac{b}{a} + \mathfrak{P}'x^2\right]$

donc

$$\alpha + \beta x + \Omega x^2 \text{ ſe lira } \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots$$

§ 18.

I) Soit $F = a + bx + \mathfrak{P}x^2$ & $f = \alpha + \beta x + \Omega x^2$
La ſimple multiplication nous fait voir que

$$F \cdot f = (a + bx + \mathfrak{P}x^2) \cdot (\alpha + \beta x + \Omega x^2)$$
$$= a \cdot \alpha + (a \cdot \beta + \alpha \cdot b)\, x + \mathfrak{P}' x^2$$

de là pour $F = f$

$$F^2 = (a + bx + \mathfrak{P}x^2)\,(a + bx + \Omega x^2)$$
$$= a^2 + 2abx + \mathfrak{P}' x^2$$

de même

$$F^3 = (a^2 + 2abx + \mathfrak{P}'x^2)\,(a + bx + \Omega x^2)$$
$$= a^3 + 3abx + \mathfrak{P}'' x^2$$

nous en conclurons qu'on aura en général pour un nombre n quelconque entier & positif

II) $F^n = a^n + na^{n-1}\,bx + \mathfrak{Q}'x^2$

car en supposant l'expression juste pour F^n nous en déduirons

$$F^{n+1} = F^n . F = (a^n + na^{n-1}bx + \mathfrak{Q}'x^2)(a + bx + \mathfrak{P}x^2)$$
$$= a^{n+1} + (n+1)\,a^n bx + \mathfrak{Q}''x^2$$

III) Donc l'expression étant vraie pour la seconde & troisième puissance de F (I) elle doit aussi être juste pour la $(3+1)$ ou 4me, donc aussi pour la $(4+1)$ ou 5me puissance &c. (II)

IV) $F = a + bx + \mathfrak{P}x^2 = a\left[1 + \frac{b}{a}x + \mathfrak{P}'x^2\right]$

donne $F^n = a^n\left[1 + \frac{b}{a}x + \mathfrak{P}'x^2\right]^n = a^n\left[1 + n\frac{b}{a}x + \mathfrak{P}''x^2\right]$ (II)

mais $\frac{F^n}{a^n}$ ayant la même forme que $\frac{F}{a}$ (§ 5.) quel que soit l'exposant n, on aura donc rigoureusement pour toutes les valeurs imaginables de n

$$F^n = a^n\left[1 + n.\frac{b}{a}x + \mathfrak{P}''x^2\right]$$
$$= a^n + na^{n-1}bx + \mathfrak{P}x^2$$

Nous aurons donc aussi pour

$$F = a + x$$
$$F^n = (a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \mathfrak{P}x^2.$$

Quiconque souhaite une autre démonstration pour le cas où l'exposant n est un nombre rompu ou négatif, verra facilement comment s'y prendre. (Voyez le calcul Différ. & Intégral par *Lacroix* Tom. I. Intr. § 16.).

§ 19.

I) Soit $F = x^n$ on aura $F + \Delta F = (x + \Delta x)^n$
$$= x^n + n\,.\,x^{n-1}\,.\,\Delta x + \mathfrak{P}\,\Delta x^2 \quad (\S\,18, \text{IV})$$
$$= x^n + n\,.\,x^n\,.\,\frac{\Delta x}{x} + \mathfrak{P}\,\Delta x^2.$$

II) Soit en général $F = Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + \ldots.$
on aura $F + \Delta F = A(x+\Delta x)^a + B(x+\Delta x)^b + C(x+\Delta x)^c$
$+ D(x+\Delta x)^d + \ldots.$

$$= A\left(x^a + a\frac{x^a}{x}.\Delta x + \mathfrak{P}\,\Delta x^2\right)$$
$$+ B\left(x^b + b\frac{x^b}{x}.\Delta x + \mathfrak{P}'\,\Delta x^2\right)$$
$$+ C\left(x^c + c\frac{x^c}{x}.\Delta x + \mathfrak{P}''\,\Delta x^2\right)$$
$$+ D\left(x^d + d\frac{x^d}{x}.\Delta x + \mathfrak{P}'''\,\Delta x^2\right) \text{ \&c.}$$

$$= Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + \ldots.$$
$$+ [A.ax^a + B.bx^b + C.cx^c + D.dx^d + \ldots]\frac{\Delta x}{x}$$
$$+ \mathfrak{Q}\Delta x^2 \text{ *)} \quad \text{(I).}$$

Regardons ces développemens avec attention, on ne peut manquer d'obſerver

Primo. Que le premier terme eſt toujours la fonction propoſée F elle-même.

Secundo. Que le ſecond terme ſe reçoit en multipliant chaque terme de la fonction propoſée par l'expoſant de la variable x, & le réſultat de la ſomme par $\frac{\Delta x}{x}$. C'eſt-à-dire par l'accroiſſement de la variable diviſée par elle.

Tertio. Du troiſième terme ($\mathfrak{Q}\Delta x^2$) on ne connoît jusqu'ici que ſa forme générale c'eſt-à-dire on ſait que $\mathfrak{Q}\Delta x^2$ doit être de la forme ſuivante

$$(\alpha + \beta\Delta x + \gamma\Delta x^2 + \ldots)\Delta x^2.$$

Ces obſervations nous fourniſſent un moyen d'indiquer par un ſigne l'opération qu'il faut faire pour avoir le ſecond terme d'un tel développement. Pour cet effet nous indiquons par un E renverſé ($\mathfrak{Z}$) que nous

*) $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{P}'''$ ... étant tous de la forme $\alpha + \beta\Delta x + \gamma\Delta x^2 + \delta\Delta x^3 + \ldots$, (§ 17. 18.) leur ſomme $\mathfrak{Q}$ le ſera ſûrement auſſi.

plaçons à côté gauche de la fonction, qu'on doit multiplier chaque terme de la fonction avec l'expoſant de la variable qui s'y trouve, & nous aurons toujours F étant une fonction de x de la forme $Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$;

$$F + \Delta F = F + \mathfrak{D} F \cdot \frac{\Delta x}{x} + \mathfrak{P} \Delta x^2$$

expreſſion très-courte, ſignificative & très-importante. On en tire auſſi

$$\Delta F = \mathfrak{D} F \cdot \frac{\Delta x}{x} + \mathfrak{P} \Delta x^2$$

Il me ſera permis de faire ici quelques applications de ce paragraphe & des précédens ſur les fonctions algébriques & transcendantes d'une ſeule variable.

§ 20.

A. *Des fonctions algébriques.*

1) *Le théorème binome.*

Soit $F = (1+x)^n = 1 + nx + ax^2 + bx^3 + cx^4 + \ldots$ (§ 18.)

on a $F + \Delta F = (1 + x + \Delta x)^n = (1+x)^n + n(1+x)^{n-1}\Delta x + \mathfrak{P}\Delta x^2 \ldots$ (§ 18.)

ou $F + \frac{\mathfrak{D} F}{x} \cdot \Delta x + \mathfrak{Q} \Delta x^2 = (1+x)^n + n\frac{(1+x)^n}{1+x} \cdot \Delta x + \mathfrak{P}\Delta x^2 \ldots$ (§ 19.)

donc 1) $\frac{\mathfrak{D} F}{x} = \frac{n(1+x)^n}{1+x}$ ou $\frac{\mathfrak{D}(1+x)^n}{x} = \frac{n(1+x)^n}{1+x}$ (§ 8.)

réſultat bien remarquable

ou $(1+x) \cdot \frac{\mathfrak{D}(x^0 + nx + ax^2 + bx^3 + cx^4 + \ldots)}{x}$

$= n + n^2 x + nax^2 + nbx^3 + ncx^4 + \ldots$ c'eſt-à-dire

$(1+x)(n + 2ax + 3bx^2 + 4cx^3 + \ldots)$

$= n + n^2 x + nax^2 + nbx^3 + ncx^4 + \ldots$

ou $\begin{array}{l} n + 2a \mid x + 3b \mid x^2 + 4c \mid x^3 \\ \quad n \mid \quad 2a \mid \quad 3b \mid \end{array} = n + n^2 x + nax^2 + nbx^3 + ncx^4 + \ldots$

ce qui nous fournit les équations ſuivantes (§ 8.)

$$\left.\begin{aligned} n &= n \\ 2a + n &= n^2 \\ 3b + 2a &= na \\ 4c + 3b &= nb \end{aligned}\right\} \text{ de là nous trouvons } \left\{\begin{aligned} n &= n \\ a &= \frac{n.\,n-1}{1.\;2} \\ b &= \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\;2.\;3} \\ c &= \frac{n.\,n-1.\,n-2.\,n-3}{1.\;2.\;3.\;4} \end{aligned}\right.$$

&c. &c.

2) donc $(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n.\,n-1}{1.\;2}x^{n-1} + \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\;2.\;3}x^{n-2} + \ldots$

& de là on aura facilement

3) $(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$

$= a^n\left[1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{b}{a} + \frac{n.\,n-1}{1.\;2}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.\;2.\;3}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \ldots\right]$

$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n.\,n-1}{1.\;2}\cdot a^{n-2}b^2 + \ldots.$

Cette démonſtration du théorème de binome eſt ſûrement auſſi rigoureuſe qu'il eſt poſſible, & on verra bientôt que la marche eſt exactement la même que celle du calcul différentiel, & que nous ne différons que par les principes, dont les miens me ſemblent plus évidens.

Comme il eſt très-facile de démontrer d'une manière élémentaire le développement de $(a+b)^n$, n étant un nombre entier & poſitif, il ſuit déjà du § 5. que le développement de $(a+b)^n$ eſt vrai pour toutes les valeurs quelconques de n.

§ 21.

2) *Le théorème polynome.*

Soit à développer $(ay^n + by^{n+r} + cy^{n+2r} + \ldots)^p$

$= ay^{np}\left(1 + \frac{b}{a}y^r + \frac{c}{a}y^{2r} + \ldots\right)^p$

au lieu de y^r mettez x, vous aurez

$$a x^{\frac{np}{r}} \left(1 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} x^2 + \ldots\right)^p.$$

Tout dépend donc du développement d'une fonction de la forme suivante

$$F = (1 + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 + \overset{3}{a}x^3 + \ldots \overset{r}{a}x^r + \ldots)^n = f^n$$
$$= 1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \overset{3}{A}x^3 + \ldots \overset{r}{A}x^r \ldots \text{ (§ 6.).}$$

Nous aurons $F + \Delta F = (f + \Delta f)^n$

ou $F + \frac{\mathfrak{D} F}{x} \Delta x + \mathfrak{P} \Delta x^2 = \left(f + \frac{\mathfrak{D} f}{x} \Delta x + \mathfrak{Q} \Delta x^2\right)^n$ (§ 19.)

$$= f^n + n \cdot f^{n-1} \cdot \frac{\mathfrak{D} f}{x} \Delta x + \mathfrak{Q}' \Delta x^2 \text{ (§ 18.)}$$

$$\frac{\mathfrak{D} F}{x} = \frac{n \cdot f^n}{f} \cdot \frac{\mathfrak{D} f}{x} \text{ (§ 8.) ou } f \frac{\mathfrak{D} F}{x} = n \cdot F \cdot \frac{\mathfrak{D} f}{x}$$

c'eſt-à-dire

$$(1 + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 + \ldots \overset{r}{a}x^r \ldots) \cdot \frac{\mathfrak{D}[x^0 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \ldots \overset{r}{A}x^r + \ldots]}{x}$$

$$= n[1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \ldots \overset{r}{A}x^r + \ldots] \left[\frac{\mathfrak{D}(x^0 + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 + \ldots \overset{r}{a}x^r + \ldots)}{x}\right]$$

ou

$$[1 + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 + \ldots \overset{r}{a}x^r + \ldots][\overset{1}{A} + 2\overset{1}{A}x + 3\overset{2}{A}x^2 + \ldots r\overset{r}{A}x^{r-1} + \ldots]$$
$$= n[1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \ldots \overset{r}{A}x^r][\overset{1}{a} + 2\overset{2}{a}x + 3\overset{3}{a}x^2 + \ldots r\overset{r}{a}x^{r-1} + \ldots]$$

Le coëfficient du terme dans le produit $f \cdot \frac{\mathfrak{D} F}{x}$ qui eſt affecté de x^r, doit être égal au même terme dans le produit $n \cdot F \cdot \frac{\mathfrak{D} f}{x}$; donc

$$[(r+1)\overset{r+1}{A} + r\overset{r}{A}\overset{1}{a} + (r-1)\overset{r-1}{A}\overset{2}{a} + \ldots 2\overset{2}{A}\overset{r-1}{a} + \overset{1}{A}\overset{r}{a}]$$
$$= n[(r+1)\overset{r+1}{a} + r\overset{r}{a}\overset{1}{A} + \ldots 2\overset{2}{a}\overset{r-1}{A} + \overset{1}{a}\overset{r}{A}] \text{ *)}$$

*) Avec quelque habitude du calcul on écrira tout de ſuite ces termes demandé du produit en queſtion. Voyez mon Supplément au calcul différentiel de Euler page 221.

par conſéquent

$$\overset{r+1}{A} = \frac{1}{r+1}\left[(n-r)\overset{r}{A}\overset{1}{a} + [2n-(r-1)]\overset{r-1}{A}\overset{2}{a} + [3n-(r-2)]\overset{r-2}{A}\overset{3}{a} + \ldots\right.$$
$$\left.[pn-(r-(p-1))]\overset{r-(p-1)}{A}\overset{p}{a} + \ldots\ldots (nr-1)\overset{1}{A}\overset{r}{a} + n(r+1)\overset{r+1}{a}\right].$$

De cette expreſſion générale on déduit aiſément les coëfficiens qui répondent à x^0, x^1, x^2, x^3 &c., en faiſant r ſucceſſivement égal à 0, 1, 2, 3 &c...., obſervant que $\overset{0}{A} = 1$, car $\overset{0}{A}$ repréſente dans la ſérie ſuppoſée pour F, le coëfficient du terme x^0 & qui précède $\overset{1}{A}x$. Il eſt facile de voir que les coëfficiens qui précèdent $\overset{0}{A}$, comme $\overset{-1}{A}$, $\overset{-2}{A}$, $\overset{-3}{A}$ &c. ſont tous $= 0$. Il eſt de même avec $\overset{0}{a}$, $\overset{-1}{a}$, $\overset{-2}{a}$ &c. Enfin $[pn-(r-(p-1))]\overset{r-(p-1)}{A}\overset{p}{a}$ eſt le terme général de l'expreſſion trouvée pour $\overset{n+1}{A}$, & on en déduit chaque terme, ſi on fait ſucceſſivement, $p = 1, 2, 3, 4 \ldots (r+1)$. Ce qui donne

$$\overset{1}{A} = n\overset{1}{a}$$
$$\overset{2}{A} = \tfrac{1}{2}\left[(n-1)\overset{1}{A}\overset{1}{a} + 2n\overset{2}{a}\right]$$
$$\overset{3}{A} = \tfrac{1}{3}\left[(n-2)\overset{2}{A}\overset{1}{a} + (2n-1)\overset{1}{A}\overset{2}{a} + 3n\overset{3}{a}\right]$$
$$\overset{4}{A} = \tfrac{1}{4}\left[(n-3)\overset{3}{A}\overset{1}{a} + (2n-2)\overset{2}{A}\overset{2}{a} + (3n-1)\overset{1}{A}\overset{3}{a} + 4n\overset{4}{a}\right]$$
$$\overset{5}{A} = \tfrac{1}{5}\left[(n-4)\overset{4}{A}\overset{1}{a} + (2n-3)\overset{3}{A}\overset{2}{a} + (3n-2)\overset{2}{A}\overset{3}{a}\right.$$
$$\left. + (4n-1)\overset{1}{A}\overset{4}{a} + 5n\overset{5}{a}\right] \text{ &c.}$$

Cette forme du théorème polynome dans laquelle chaque coëfficient de x eſt déterminé par tous les précédens, eſt remarquable par la ſimplicité de ſa ſymmétrie. Elle peut auſſi être utile pour le calcul numérique des coëfficiens, qu'on cherche ordinairement l'un après l'autre. J'ai donné dans mon Supplément au calcul différentiel de Euler, à l'aide de l'analyſe combinatoire, une ſolution de ce problème, telle qu'on peut trouver chaque coëfficient indépendant des précédens. Je ferai voir plus bas qu'au moyen de mon nouveau calcul je peux auſſi trouver

chaque coëfficient indépendant des précédens d'une manière très-expéditive.

Comme la démonſtration ci-deſſus eſt indépendante du développement de $(a+b)^n$, on peut regarder le théorème du binome comme un corollaire du théorème polynome.

Ma marche ne diffère auſſi ici du calcul différentiel que par des principes plus élémentaires & évidens. Le théorème ſuivant mettra entièrement au jour que ma méthode s'applique avec la même facilité aux cas les plus difficiles.

§ 22.

Soit

$$\frac{(\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+\overset{3}{a}x^3+\ldots)^m}{(\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+\overset{3}{a}x^3+\ldots)^n}=\frac{(F)^m}{(f)^n}=\overset{0}{A}+\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2+\overset{3}{A}x^3+\ldots=P.$$

Nous aurons

$$\frac{(F+\Delta F)^m}{(f+\Delta f)^n}=P+\Delta P$$

ou
$$\frac{\left(F+\frac{\Im F}{x}\Delta x+\mathfrak{P}\Delta x^2\right)^m}{\left(f+\frac{\Im f}{x}\Delta x+\mathfrak{P}'\Delta x^2\right)^n}=P+\frac{\Im P}{x}\Delta x+\mathfrak{P}''\Delta x^2 \text{ (§ 19.)}$$

ou
$$\frac{F^m+m.\frac{F^m}{F}.\frac{\Im F}{x}\Delta x+\mathfrak{P}'''\Delta x^2}{f^n+n.\frac{f^n}{f}.\frac{\Im f}{x}\Delta x+\mathfrak{P}^{IV}\Delta x^2}=P+\frac{\Im P}{x}\Delta x+\mathfrak{P}''\Delta x^2 \text{ (§ 18.)}$$

La ſimple diviſion donnera

$$\frac{F^m}{f^n}+\frac{F^m}{f^n}\left[\frac{m}{F}.\frac{\Im F}{x}-\frac{n}{f}.\frac{\Im f}{x}\right]\Delta x+\mathfrak{Q}\Delta x^2=P+\frac{\Im P}{x}\Delta x+\mathfrak{P}''\Delta x^2$$

donc ſelon (§ 8.)

$$P\left[\frac{m}{F}.\frac{\Im F}{x}-\frac{n}{f}.\frac{\Im f}{x}\right]=\frac{\Im P}{x}$$

ou

ou $mP \cdot f \cdot \frac{\partial F}{x} - nP \cdot F \cdot \frac{\partial f}{x} - F \cdot f \cdot \frac{\partial P}{x} = 0.$

Si on développe les produits indiqués, & égalant séparement à zéro le coëfficient de chaque puissance de x, on obtiendra les équations suivantes dont la loi est facile à saisir

$$\left.\begin{matrix} {}^{0}a\,{}^{0}\alpha\,{}^{1}A + n\,{}^{0}a\,{}^{0}\alpha \\ - m\,{}^{1}a\,{}^{0}\alpha \end{matrix}\right\}\,{}^{0}A = 0$$

$$\left.\begin{matrix} 2\,{}^{0}a\,{}^{0}\alpha\,{}^{2}A + (n+1)\,{}^{0}a\,{}^{1}\alpha \\ - (m-1)\,{}^{1}a\,{}^{0}\alpha \end{matrix}\right\}\,{}^{1}A \quad \left.\begin{matrix} + 2n\,{}^{0}a\,{}^{1}\alpha \\ + (n-m)\,{}^{1}a\,{}^{1}\alpha \\ - 2m\,{}^{2}a\,{}^{0}\alpha \end{matrix}\right\}\,{}^{0}A = 0$$

$$\left.\begin{matrix} 3\,{}^{0}a\,{}^{0}\alpha\,{}^{3}A + (n+2)\,{}^{0}a\,{}^{1}\alpha \\ -(m-2)\,{}^{1}a\,{}^{0}\alpha \end{matrix}\right\}\,{}^{2}A \quad \left.\begin{matrix} + (2n+1)\,{}^{0}a\,{}^{2}\alpha \\ + (n-m+1)\,{}^{1}a\,{}^{1}\alpha \\ - (2m-1)\,{}^{2}a\,{}^{0}\alpha \end{matrix}\right\}\,{}^{1}A \quad \left.\begin{matrix} + 3n\,{}^{0}a\,{}^{3}\alpha \\ + (2n-m)\,{}^{1}a\,{}^{2}\alpha \\ + (n-2m)\,{}^{2}a\,{}^{1}\alpha \\ 3m\,{}^{3}a\,{}^{0}\alpha \end{matrix}\right\}\,{}^{0}A = 0$$

&c.

Ces équations ne déterminent point le premier coëfficient ${}^{0}A$, mais en faisant $x = 0$, on aura $\frac{{}^{0}a^{m}}{{}^{1}a^{n}} = {}^{0}A$.

Cherchons le développement de notre fonction $\frac{F^m}{f^n} = P$ par le calcul différentiel on retombera sur une formule qui demande a développer les mêmes produits qu'ici, & j'ignore & je doute même qu'on a jusqu'ici donné de ce problème une solution élémentaire avec la même évidence & aussi expéditive que par ma méthode.

Ces exemples suffisent pour rendre claire l'application heureuse qu'on peut faire de ma méthode de procédé, qui m'a fourni jusqu'ici les mêmes formes que le calcul différentiel. Passons maintenant aux fonctions transcendantes.

§ 23.

B. *Des fonctions transcendantes d'une seule variable.*

1) *Fonction exponentielle.*

La plus simple de toutes les fonctions transcendantes est celle qu'on connoît sous le nom d'*exponentielle*, & qui est représentée par

$$F = a^x = 1 + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \overset{3}{A}x^3 + \ldots + \overset{r}{A}x^r + \ldots$$

La forme de la série que nous supposons égale à la quantité exponentielle, est fondée sur le raisonnement suivant que le calcul différentiel exige aussi

$$a^x = [1 + (a-1)]^x = 1 + x\,.\,(a-1) + \frac{x\,.\,x-1.}{1.\quad 2}(a-1)^2 + \frac{x\,.\,x-1.\,x-2.}{1.\quad 2.\quad 3}(a-1)^3 + \ldots \quad (\S\ 20.)$$

mais comme le produit de

$$x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)\ldots[x-(r-1)]$$

prend la forme

$$x^r - \alpha x^{r-1} + \beta x^{r-2} - \gamma x^{r-3} \ldots \pm \mu x$$

nous aurons, en effectuant les multiplications indiquées dans les coëfficiens, & ordonnant ensuite les termes suivant les puissances de x, pour le second terme

$$\left((a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \ldots\right)x = \overset{1}{A}x$$

& sans chercher les autres termes on peut facilement voir qu'ils sont tous de la forme $\overset{r}{A}x^r$, ou le coëfficient $\overset{r}{A}$ ne contient plus la variable x comme cela doit être, notre supposition a donc lieu. Ainsi nous aurons

$$F + \Delta F = a^{x+\Delta x}$$

ou $$F + \frac{\partial F}{x}\Delta x + \mathfrak{P}\Delta x^2 = a^x \,.\, a^{\Delta x} = a^x(1 + \overset{1}{A}\Delta x + \mathfrak{P}'\Delta x^2)$$

$$= a^x + a^x\overset{1}{A}\Delta x + a^x\mathfrak{P}'\Delta x^2$$

donc 1) $\frac{\Im F}{x} = a^x \overset{1}{A}$ ou $\frac{\Im a^x}{x} = a^x \overset{1}{A}$

réſultat très-remarquable & important, c'eſt-à dire

$$\overset{1}{A} + 2\overset{2}{A}x + 3\overset{3}{A}x^2 + 4\overset{4}{A}x^3 + \ldots + r\overset{r}{A}x^{r-1} + \ldots$$
$$= \overset{1}{A} + \overset{1}{A}{}^2 x + \overset{1}{A}\overset{2}{A}x^2 + \overset{1}{A}\overset{3}{A}x^3 + \ldots \overset{1}{A}\overset{r-1}{A}x^{r-1} + \ldots$$

de là nous en tirerons les équations ſuivantes (§ 8.)

$$\left.\begin{aligned} \overset{1}{A} &= \overset{1}{A} \\ 2\overset{2}{A} &= \overset{1}{A}{}^2 \\ 3\overset{3}{A} &= \overset{1}{A}.\overset{2}{A} \\ 4\overset{4}{A} &= \overset{1}{A}.\overset{3}{A} \\ &\vdots \\ r\overset{r}{A} &= \overset{1}{A}.\overset{r-1}{A} \end{aligned}\right\} \text{ d'où on tire } \left\{\begin{aligned} \overset{1}{A} &= \frac{\overset{1}{A}}{1} \\ \overset{2}{A} &= \frac{\overset{1}{A}{}^2}{1.2} \\ \overset{3}{A} &= \frac{\overset{1}{A}{}^3}{1.2.3} \\ \overset{4}{A} &= \frac{\overset{1}{A}{}^4}{1.2.3.4} \\ &\vdots \\ \overset{r}{A} &= \frac{\overset{1}{A}{}^r}{1.2\ldots r} \end{aligned}\right.$$

& nous aurons

$$2)\ a^x = 1 + \frac{\overset{1}{A}}{1}x + \frac{\overset{1}{A}{}^2}{1.2}x^2 + \frac{\overset{1}{A}{}^3}{1.2.3}x^3 + \frac{\overset{1}{A}{}^4}{1.2.3.4}.x^4 + \ldots.$$
$$+ \frac{\overset{1}{A}{}^r}{1.2\ldots r}.x^r + \ldots$$

Nous avons vu que

$$\overset{1}{A} = \frac{(a-1)}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \ldots$$

ainſi $\overset{1}{A}$ eſt une quantité conſtante, puiſqu'elle eſt fonction de la baſe a & de nombres.

Si dans le développement de a^x, on fait $x = 1$, on aura cette autre relation

$$3)\ a = 1 + \frac{\overset{1}{A}}{1} + \frac{\overset{1}{A}{}^2}{1.2} + \frac{\overset{1}{A}{}^3}{1.2.3} + \ldots$$

Si on met dans (No. 2) $x = \frac{1}{\frac{1}{A}}$ nous aurons

4) $a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots.$

$= 2,71828\ 18284\ 59045 \ldots. = e$

on auroit eu le même réſultat en ſuppoſant dans No. 3 $\overset{1}{A} = 1$

on a donc les équations $a^{\frac{1}{A}} = e$ ou $a = e^{\overset{1}{A}}$

ainſi $a^x = e^{\overset{1}{A}x} = 1 + \overset{1}{A}x + \frac{\overset{1}{A}^2 x^2}{1.2} + \ldots.$

Faiſant ici $\overset{1}{A} = 1$, on aura

5) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$

Dans l'équation $F = a^x$, x eſt le log. de F, a étant la baſe du ſyſtème logarithmique, de ſorte que cette équation donne pour la baſe a

6) $x = \log. F$

De même l'équation $a^{\frac{1}{A}} = e$

donnera 7) $\frac{1}{\frac{1}{A}} = \log. e$; pour la baſe a

& l'équation $e^{\overset{1}{A}} = a$

donnera 8) $\overset{1}{A} = \log. a$ ou $\frac{1}{\frac{1}{A}} = \frac{1}{\log. a}$ pour la baſe e; on appelle $\frac{1}{\log. a}$ le *module* du ſyſtème dont la baſe eſt a, les logarithmes du ſyſtème où la baſe eſt e, & le *module* 1, s'appellent logarithmes *naturels* ou hyperboliques, parce qu'ils ſont repréſentés par les aires de l'hyperbole équilatérale entre ſes aſymtotes.

Nous avons trouvé (No. 1)

$$\frac{\Im F}{x} = a^x . \overset{1}{A}$$

c'eſt-à-dire

9) $\frac{\Im a^x}{x} = a^x . \overset{1}{A}$ ou $\Im a^x = x a^x . \overset{1}{A} = x a^x \log. \text{nat. } a$ (No. 8)

en ſuppoſant $\overset{1}{A} = 1$, nous aurons

10) $\frac{\mathfrak{D}e^x}{x} = e^x$ (§ 23. No. 5) } réſultats très-remarquables &
ou 11) $\mathfrak{D}e^x = x \cdot e^x$ } bien importans.

§ 24.

2) *Fonction Logarithmique.*

Développer la fonction $F = \log.(1+x)$

Il faut d'abord ſavoir ſi la fonction propoſée peut prendre la forme ſuivante

$$Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots.$$

Car on voit bien que tous les termes doivent être affectés de x, parce que pour $x = 0$ la fonction $F = \log.(1+x)$, ſe réduit à $F = \log. 1 = 0$; le raiſonnement ſuivant juſtifiera la forme entière.

De l'équation $F = \log.(1+x)$

on tire $a^F = 1 + x$, pour la baſe a

Suppoſons $a^F = a^{Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots} = a^{Ax} \cdot a^{Bx^2} \cdot a^{Cx^3} \ldots.$

mais comme les facteurs a^{Ax}, a^{Bx^2}, a^{Cx^3} &c. ſont des ſéries de la forme $1 + \alpha x + \beta x^2 + \ldots$ leur produit ſera de la même forme (§ 2.) c'eſt-à-dire on peut hardiment ſuppoſer

$$a^{Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots} = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \ldots$$

alors $Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots = \log.(1 + \alpha x + \beta x^2 + \ldots)$

On oſe donc ſuppoſer

$$F = \log.(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots.$$

$$F + \Delta F = \log.(1 + x + \Delta x) = \log.\left[(1+x)\left(1 + \frac{\Delta x}{1+x}\right)\right]$$

$$= \log.(1+x) + \log.\left(1 + \frac{\Delta x}{1+x}\right)$$

ou $F + \frac{\mathfrak{D}F}{x}\Delta x + \mathfrak{P}\Delta x^2 = \log.(1+x) + \frac{A\Delta x}{1+x} + \mathfrak{Q}\Delta x^2$

ainſi $\frac{\mathfrak{D}F}{x} = \frac{A}{1+x}$, réſultat bien remarquable & important,

ou $(1+x).\frac{\partial F}{x} - A = 0$

$(1+x)(A + 2Bx + 3Cx^2 + \ldots) - A = 0$

on en tire

$$\left.\begin{array}{l} A - A = 0 \\ A + 2B = 0 \\ 2B + 3C = 0 \\ 3C + 4D = 0 \end{array}\right\} \text{ce qui donne} \left\{\begin{array}{l} A = A \\ B = -\frac{1}{2}A \\ C = -\frac{2}{3}B = +\frac{1}{3}A \\ D = -\frac{3}{4}C = -\frac{1}{4}A \end{array}\right.$$

&c. &c.

donc

1) $\lg.(1+x) = Ax - \frac{Ax^2}{2} + \frac{Ax^3}{3} - \frac{Ax^4}{4} + \frac{Ax^5}{5} - \frac{Ax^6}{6} + \ldots$

ainſi $= A\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \ldots - \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{n+1} + \ldots\right)$

2) $\log.(1-x) = -A\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n} + \frac{x^{2n+1}}{n+1} + \ldots\right)$

3) $\log.(1+x) - \log.(1-x) = \log.\frac{1+x}{1-x}$

$= 2A\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{n+1} + \ldots\right)$

Soit $\frac{1+x}{1-x} = a$; on aura $x = \frac{a-1}{a+1}$; ſi a ſignifie la baſe du ſyſtème logarithmique on aura

$$\log.\frac{1+x}{1-x} = \log.a = 1 = 2A\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \ldots\right)$$

donc 4) $A = \dfrac{1}{2\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \ldots\right)}$

pour $a = 10$ nous aurons

$A = 0{,}4342944819\ldots$ & $\frac{1}{A} = 2{,}30258509\ldots$

Nous avons eu $\frac{\partial F}{x} = \frac{A}{1+x}$

d'où l'on tire

5) $\Im F = \Im \text{ lg. } (1+x) = \frac{A \cdot x}{1+x}$ formule bien à retenir.

Je ne peux m'empêcher de faire voir une autre route plus facile encore de parvenir a des réſultats plus généraux que ceux du No. 5 & du § 23. No. 9.

Soit f une fonction algébrique de x, & ſuppoſons qu'on a $F = a^f = 1 + \dot{A}f + \ddot{A}f^2 + \ldots$ (§ 23), imaginons que x augmente de Δx, nous aurons d'après (§ 19.)

$$F + \frac{\Im F}{x}\Delta x + \mathfrak{P}\Delta x^2 = a^f + \frac{\Im f}{x}\Delta x + \mathfrak{Q}\Delta x^2$$

$$= a^f \cdot a^{\frac{\Im f}{x}\Delta x} \cdot a^{\mathfrak{Q}\Delta x^2} = a^f + \dot{A}a^f \cdot \frac{\Im f}{x}\Delta x + \mathfrak{P}'\Delta x^2$$

ainſi 6) $\Im f = \Im a^f = Aa^f \Im f = \text{lgn. } a \cdot a^f \cdot \Im f$ (§ 23.). Soit lg. $e = 1$, nous aurons 7) $\Im e^f = e^f \Im f$ (§ 23.), & ſi f eſt une variable abſolue x, nous aurons $\Im a^x = a^x x \text{ lgn. } a$, & $\Im e^x = e^x \Im x = e^x x$, comme au (§ 23.)

Soit $F = \text{lg. } f$; f étant une fonction algébrique de x, nous aurons pour la baſe a; $f = a^F$; donc $\Im f = \text{lgn. } a \cdot a^F \Im F$ (No. 6), ainſi 8) $\Im F = \Im \text{ lg. } f = \frac{\Im f}{f} \cdot \frac{1}{\text{lgn. } a}$. Cette dernière formule ce trouve auſſi indépendamment de la formule (No. 6), comme il ſuit. Ayant $F = \log. f$ on aura auſſi $F + \frac{\Im F}{x}\Delta x + \mathfrak{P}\Delta x^2$

$$= \text{lg. } \left(f + \frac{\Im f}{x}\Delta x + \mathfrak{Q}\Delta x^2\right) \text{ (§ 19.)}$$

$$= \text{lg. } f + \text{lg. } \left(1 + \frac{\Im f}{xf}\Delta x + \mathfrak{Q}'\Delta x^2\right)$$

$$= \text{lg. } f + A \cdot \frac{\Im f}{xf}\Delta x + \mathfrak{Q}''\Delta x^2$$

donc $\Im F = \Im \text{ lg. } f = \frac{\Im f}{f} : A = \frac{\Im f}{f} \cdot \frac{1}{\text{lgn. } a}$ (§ 23.)

$f = 1 + x$, donne $\Im \text{ lg. } (1+x) = \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{\text{lgn. } a}$.

Dans ces dernières ſolutions il y a déjà au moins plus que dans la première ſolution une eſpèce de calcul, qui dérive de l'Algorithme introduit, & on peut par là très-bien deviner comment je m'y prendrai à l'avenir lorsque j'aurai l'honneur de parler du calcul en queſtion. Jusqu'ici je ne fais à proprement dire que de tracer le chemin qui m'a conduit à mon invention.

§ 25.

Nous avons fait voir (§ 24.) qu'à un nombre de la forme $1 + ax + \beta x^2 + \ldots$ il ſe trouve un logarithme ſous la forme $Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$; *et vice verſa.*

Soit $x = \text{lg. } y$, on pourra ſuppoſer

$$y = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots$$

c'eſt-à-dire y une fonction de la variable x, alors

$$y + \Delta y = Y + \frac{\partial y}{x}\Delta x + \mathfrak{P}\Delta x^2 \quad (\S\ 19.)$$

donc 1) $\Delta y = \frac{\partial y}{x}\Delta x + \mathfrak{P}\Delta x^2$

De l'équation donnée $x = \text{lg. } y$

on a $x + \Delta x = \text{lg.}(y + \Delta y) = \text{lg. } y + \text{lg.}\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right)$

ou 2) $\Delta x = A\frac{\Delta y}{y} + \mathfrak{P}'\Delta y^2$ (§ 24. No. 1)

Mettez dans l'équation (No. 2) la valeur de Δy trouvée dans No. 1 on aura

$$\Delta x = \frac{A}{y} \cdot \frac{\partial y}{x} \cdot \Delta x + \mathfrak{Q}\Delta x^2$$

donc $1 = \frac{A}{y} \cdot \frac{\partial y}{x}$ (§ 8.)

ou 3) $y = A \cdot \frac{\partial y}{x}$ réſultat très-important

en exécutant ce que nous preſcrit la formule (No. 3), nous aurons

$$1 + ax + bx^2 + cx^3 + \ldots = Aa + 2Abx + 3Acx^2 + \ldots$$

ce qui donne les équations ſuivantes

$$\left.\begin{aligned} A\,a &= 1 \\ 2\,b\,A &= a \\ 3\,A\,c &= b \\ &\vdots \\ (r+1)\,q\,A &= p \end{aligned}\right\} \text{ d'où on tire } \left\{\begin{aligned} a &= \frac{1}{A} \\ b &= \frac{1}{2.A^2} \\ c &= \frac{1}{2.3\,A^3} \\ &\vdots \\ q &= p \cdot \frac{1}{(r+1)\,A} \end{aligned}\right.$$

Nous aurons donc

$$4)\ y = 1 + \frac{x}{A} + \frac{x^2}{1.2.A^2} + \frac{x^3}{1\,2.3\,A^3} + \ldots + \frac{x^{r+1}}{1.2.3\ldots(r+1)A^{r+1}} + \ldots$$

ou $$y = 1 + \frac{\lg.y}{A} + \frac{(\lg.y)^2}{2.A^2} + \frac{(\lg.y)^3}{2.3.A^3} + \ldots$$

Soit a la baſe du ſyſtème & $y = a$, nous aurons

$$5)\ a = 1 + \frac{1}{A} + \frac{1}{2.A^2} + \frac{1}{2.3\,A^3} + \ldots$$

Comparant cette dernière formule à celle dans (§ 23. No. 3), on y conclura que

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{A} = \text{lg. nat. } a \text{ ou } A = \frac{1}{\frac{1}{A}} = \frac{1}{\text{lg. nat. } a} \quad (\S\ 23.\ \text{No. } 8)$$

Pour les log. naturels on ſait que le module $\frac{1}{\frac{1}{A}} = \frac{1}{\text{lg nat. } a} = A = 1$

& pour un tel ſyſtème on aura les formules ſuivantes

$$6)\ \lg.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \ldots$$

$$7)\ \lg.(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots\right)$$

$$8)\ \lg.\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right]$$

$$9)\ y = 1 + \lg.y + \frac{(\lg.y)^2}{2} + \frac{(\lg.y)^3}{2.3} + \ldots + \frac{(\lg.y)^r}{2.3\ldots r} + \ldots$$

Le réſultat que nous avons obtenu (No. 3), ſe tire avec plus de commodité de la formule (§ 24. No. 6) car ayant $x = \lg.y$ on a d'abord

$x = \frac{\partial y}{y} \cdot \frac{1}{\text{lg. nat. } a}$ d'où ſuit immédiatement 10) $y = \frac{\partial y}{x} \cdot \frac{1}{\text{lg. nat. } a}$ eſt c'eſt la formule en queſtion. On voit de nouveau comment on peut abréger le raiſonnement en tirant avec attention parti de l'Algorithme introduit.

§ 26.

Il y avoit un temps où je m'occupois beaucoup à calculer des logarithmes & d'autres tables utiles dont quelques-unes ont été rendues publiques. Je fus aſſez heureux pour trouver quelques formules qui abrègent beaucoup le calcul & que je crois neuves; je ne veux néanmoins diſputer l'invention à perſonne, je me contente du plaiſir de les avoir trouvées moi-même il y a dix ans paſſés. Pour reſter dans les limites qui me ſont preſcrites par le ſujet que je dois traiter dans mon mémoire, je ne donnerai que trois formules nouvelles. Mettant $\frac{1+Z}{1-Z} = \frac{n}{m}$ nous aurons $Z = \frac{n-m}{n+m}$ & on obtient la formule ſuivante

$$1)\ \text{lg.}\left(\frac{n}{m}\right) = 2\left[\frac{n-m}{n+m} + \frac{1}{3}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{n-m}{n+m}\right)^5 + \ldots\right]$$

(§ 25. No. 8)

Suppoſons

$$n = x^2(x+5)(x-5)$$
$$m = (x^2-9)(x^2-16) = (x+3)(x-3)(x+4)(x-4)$$

La ſubſtitution donnera

$$2\ \text{lgn. } x + \text{lgn. } (x+5) + \text{lgn. } (x-5) - [\text{lgn. } (x+3) + \text{lgn. } (x-3) + \text{lgn. } (x+4) + \text{lgn. } (x-4)] =$$
$$-2\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72} + \frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3 + \ldots\right]$$

de là on tire

$$2)\ \text{lgn. } (x+5) = \text{lgn. } (x+3) + \text{lgn. } (x-3) + \text{lgn. } (x+4) + \text{lgn. } (x-4) - \text{lgn. } (x-5) - 2\ \text{lgn. } x$$
$$-2\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72} + \frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3 + \ldots\right]$$

Pour avoir les logarithmes d'un ſyſtème quelconque on n'a qu'à multiplier la ſérie $2\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72}+\ldots\right]$ avec le module du ſyſtème, obſervant que tous les autres logarithmes dont on aura beſoin ſont pris du même ſyſtème. Cette formule abrège beaucoup le calcul, car elle donne par ſon premier terme, les logarithmes des nombres au-deſſus de 1000 avec 10 décimales exactes, lorsqu'on a d'ailleurs ceux des nombres précédens avec la même approximation. Ayant des tables qui contiennent les logarithmes de 1004 nombres premiers avec 30 décimales; il ſuffiroit du premier terme de cette ſérie pour obtenir ceux des nombres ſuivans avec la même approximation. Par exemple le log. de 1005 du ſyſtème de *Briggs* ſe trouve

$$\text{lg. } 1005 = \text{lg. } 1003 + \text{lg. } 997 + \text{lg. } 1004 + \text{lg. } 996 - \text{lg. } 995 - 6$$
$$- \frac{2}{\text{lg. } 10}\left[\frac{72}{1000^4-25.1000^2+72}+\frac{1}{3}\left(\frac{72}{1000^4-25.1000^2+72}\right)^3+\ldots\right]$$

On trouve

$$\frac{2}{\text{lg. } 10}\left[\frac{72}{1000^4-25.1000^2+72}+\frac{1}{3}\left(\frac{72}{1000^4-25.1000^2+72}\right)^3+\ldots\right]$$
$$= 0,000\,000\,000\,062\ldots + 0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,12\ldots$$

Donc le premier terme de la ſérie n'ajoute pas une unité décimale du dixième ordre, & le ſecond terme pas une unité décimale du 30me ordre, & il eſt viſible que pour x plus grand que 1000, la ſérie doit encore être plus convergente.

Donc la formule ſuivante donne les logarithmes du ſyſtème vulgaire des nombres premiers au deſſus de 1000, exacte jusqu'à trente décimales avec une rapidité étonnante.

$$\text{lg.}(x+5) = \text{lg.}(x+3) + \text{lg.}(x-3) + \text{lg.}(x+4) + \text{lg.}(x-4)$$
$$-\left[\text{lg.}(x-5) + 2\,\text{lg.}\,x + \frac{62,538\,405\,394\,068\,263\,181\,762\,564\,323\,991\,120}{x^4-25x^2+72}\right]$$

Une autre formule s'eſt trouvée de la manière ſuivante.

Soit $x = \frac{2}{n(n^2-3)}$; donc $x+1 = \frac{(n-1)^2(n+2)}{n(n^2-3)}$ & $x-1 = \frac{(n+1)^2.(n-2)}{n(n^2-3)}$

ainſi d'après les formules connues pour lg. $(x+1)$ & lg. $(x-1)$

$$3)\ \text{lgn.}\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \text{lgn.}\frac{(n-1)^2(n+2)}{(n+1)^2(n-2)} = 2\left[\frac{2}{n^3-3n} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^5 + \cdots\right]$$

$$\text{donc lgn.}(n+2) = \text{lgn.}(n-2) + 2\,\text{lgn.}(n+1) - 2\,\text{lgn.}(n-1) + 2\left[\frac{2}{n^3-3n} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{n^3-3n}\right)^5 + \cdots\right]$$

Donnant à n les trois valeurs 3, 4 & 7; & combinant les trois équations qui en réſultent, on en tirera les log. des nombres premiers 2, 3 & 5, & de la même manière les log. des autres nombres premiers. Mais je me ſervirai de la formule trouvée de la façon ſuivante.

Par (§ 25. No. 8) je trouve par des artifices faciles

$$4)\ \text{lgn. } 10 = 2 + 2\left[\begin{array}{l}\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \frac{1}{7\cdot 9^7} + \cdots \\ + \frac{1}{3\cdot 9} + \frac{1}{3\cdot 9^2} + \frac{1}{7\cdot 9^3} + \frac{1}{9\cdot 9^4} + \cdots\end{array}\right]$$

Les puiſſances de $\frac{1}{9}$ ne ſe forment pas ſeulement avec la plus grande facilité, mais elles ſe vérifient auſſi ſans peine, vu que $\frac{1}{9^n} + \frac{1}{9^{n+1}} = \frac{10}{9^{n+1}}$, c'eſt-à-dire la ſomme de deux puiſſances conſécutives quelconques, eſt égale à dix fois la plus élevée de ces deux puiſſances.

Préſentement je cherche par les formules

$$\text{lg.}(x+1) = \text{lg.}\,x + \frac{1}{\text{lgn. }10}\cdot\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + \cdots\right]$$

$$\&\quad \text{lg.}(x-1) = \text{lg.}\,x - \frac{1}{\text{lgn. }10}\cdot\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{4x^4} + \cdots\right]$$

en ſuppoſant ſucceſſivement x égal à 10, 100, 1000, 10000, &c. les log. de 9, 11, 99, 101, 999, 1001, 9999, 10001, &c. On verra d'abord que tous les chiffres ſignificatifs ſont les mêmes dans tous ces log. & ainſi il ne coûtera que la peine de les écrire. De ces premiers log. je déduis ſans peine ceux de leurs multiples & ceux de leurs rapports mutuels. Maintenant on fait uſage de la formule No. 3,

en obſervant qu'on reçoit des expreſſions plus convergentes, en ne cherchant pas directement le log. du nombre propoſé, mais celui d'un de ſes multiples ou de quelqu'une de ſes puiſſances.

Mais quelque convergentes que ſoient ces formules, le travail pour la conſtruction d'une table entière, ſera beaucoup plus facile par l'uſage des différences de pluſieurs ordres.

§ 27.

C. *Des fonctions circulaires.*

Quelle que ſoit l'expreſſion de ſin x en ſérie de l'arc x, elle ne peut être que de la forme $Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$; car, puiſque le ſinus devient nul lorſque l'arc x eſt nul, il eſt viſible que cette expreſſion ne doit contenir aucun terme ſans x. Soit donc

$$1)\ \text{ſin}\, x = \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \overset{3}{A}x^3 + \overset{4}{A}x^4 + \ldots$$
$$\overset{2n}{A}x^{2n} + \overset{2n+1}{A}x^{2n+1} + \overset{2n+2}{A}x^{2n+2} + \ldots = F$$

on aura auſſi

$$2)\ \text{ſin}\, \Delta x = \overset{1}{A}\Delta x + \overset{2}{A}\Delta x^2 + \ldots$$

donc $3)\ \text{ſin}^2 \Delta x = \overset{1}{A}{}^2 \Delta x^2 + \mathfrak{P}\Delta x^3$;

& comme $\text{cof}\, \Delta x = \sqrt{(1 - \text{ſin}^2 \Delta x)}$

on aura $4)\ \text{cof}\, \Delta x = 1 + \mathfrak{P}'\Delta x^2$

La trigonométrie nous donne

$$F + \Delta F = \text{ſin}\,(x + \Delta x) = \text{ſin}\, x \,.\, \text{cof}\, \Delta x + \text{cof}\, x \,.\, \text{ſin}\, \Delta x$$

Subſtituant au lieu de cof Δx & ſin Δx les ſéries de (No. 2 & 4) nous aurons

$$F + \frac{\mathfrak{D}F}{x}\Delta x + \mathfrak{Q}\Delta x^2 = \text{ſin}\, x + \overset{1}{A} \,.\, \text{cof}\, x \,.\, \Delta x + \mathfrak{Q}'\Delta x^2$$

donc $5)\ \frac{\mathfrak{D}F}{x} = \frac{\mathfrak{D}\,\text{ſin}\, x}{x} = \overset{1}{A}\, \text{cof}\, x$, réſultat fort remarquable.

Soit $f = \text{cof}\, x$ nous aurons encore par la trigonométrie

$$f + \Delta f = \text{cof}\,(x + \Delta x) = \text{cof}\, x \,.\, \text{cof}\, \Delta x - \text{ſin}\, x \,.\, \text{ſin}\, \Delta x$$

Après avoir ſubſtitué pour $\cos \Delta x$ & $\sin \Delta x$ les ſéries de (No. 2 & 4) nous aurons

$$f + \frac{\mathfrak{D} f}{x} \Delta x + \Omega'' \Delta x^2 = \cos x - \overset{1}{A} . \sin x . \Delta x + \Omega''' \Delta x^2$$

donc 6) $\frac{\mathfrak{D} f}{x} = \frac{\mathfrak{D} \cos x}{x} = - \overset{1}{A} . \sin x$ réſultat auſſi important que celui du No. 5.

de là 7) $\overset{1}{A} . \frac{\mathfrak{D} \cos x}{x} = \frac{\mathfrak{D} . \overset{1}{A} \cos x}{x} = - \overset{1}{A}^2 \sin x$

L'équation No. 5 nous donne

$$\overset{1}{A} \cos x = \frac{\mathfrak{D} \sin x}{x} = \overset{1}{A} x^0 + 2 \overset{2}{A} x + 3 \overset{3}{A} x^2 + \ldots$$
$$2n \overset{2n}{A} x^{2n-1} + (2n+1) \overset{2n+1}{A} x^{2n}$$

donc l'équation (7), nous donnera $\frac{\mathfrak{D} . \overset{1}{A} \cos x}{x} = - \overset{1}{A}^2 \sin x$

$$8) \; 2 \overset{2}{A} + 2.3 \overset{3}{A} x + \ldots (2n-1) 2n \overset{2n}{A} x^{2n-2} + 2n(2n+1) \overset{2n+1}{A} x^{2n-1}$$
$$+ (2n+1)(2n+2) \overset{2n+2}{A} x^{2n} + (2n+2)(2n+3) \overset{2n+3}{A} x^{2n+1} + \ldots$$
$$= - \overset{1}{A}^2 x - \overset{1}{A}^2 x . \overset{2}{A} x^2 - \overset{1}{A}^2 . \overset{3}{A} x^3 - \overset{1}{A}^2 . \overset{4}{A} x^4 \ldots - \overset{1}{A}^2 . \overset{2n-2}{A} x^{2n-2}$$
$$- \overset{1}{A}^2 . \overset{2n-1}{A} x^{2n-1} - \overset{1}{A}^2 . \overset{2n}{A} x^{2n} - \overset{1}{A}^2 . \overset{2n+1}{A} x^{2n+1} + \ldots$$

9) De là nous aurons

$$\left.\begin{array}{r} 2 \overset{2}{A} = 0 \\ \vdots \\ (2n-1) 2n \overset{2n}{A} = - \overset{1}{A}^2 . \overset{2n-2}{A} \\ 2n(2n+1) \overset{2n+1}{A} = - \overset{1}{A}^2 . \overset{2n-1}{A} \\ (2n+1)(2n+2) \overset{2n+2}{A} = - \overset{1}{A}^2 . \overset{2n}{A} \\ (2n+2)(2n+3) \overset{2n+3}{A} = - \overset{1}{A}^2 . \overset{2n+1}{A} \end{array}\right\} \text{ d'où nous tirons } \left\{\begin{array}{l} \overset{2}{A} = 0 \\ \vdots \\ \overset{2n}{A} = - \dfrac{\overset{1}{A}^2 . \overset{2n-2}{A}}{(2n-1) . 2n} \\ \overset{2n+1}{A} = - \dfrac{\overset{1}{A}^2 . \overset{2n-1}{A}}{2n(2n+1)} \\ \overset{2n+2}{A} = - \dfrac{\overset{1}{A}^2 . \overset{2n}{A}}{(2n+1)(2n+2)} \\ \overset{2n+3}{A} = - \dfrac{\overset{1}{A}^2 . \overset{2n+1}{A}}{(2n+2)(2n+3)} \end{array}\right.$$

Les expreſſions trouvées pour $\overset{2n}{A}$, $\overset{2n+2}{A}$, nous font voir clairement que ſi $\overset{2n}{A}$ eſt égal à zéro, $\overset{2n+3}{A}$ doit alors auſſi être égal à zéro; il eſt donc viſible, que le coëfficient $\overset{2n+2}{A}$ de chaque puiſſance paire x^{2n+2} dans No. 1 doit néceſſairement être égal à zéro, ſi le coëfficient $\overset{2n}{A}$ de la puiſſance paire x^{2n} qui précède immédiatement dans No. 1 étoit égal à zéro: ainſi, ayant aux ſéries (No. 1 & 8) $\overset{2}{A} = 0$ (No. 9), qui eſt le coëfficient du moindre degré pair dans No. 1, il ſuit du précédent que tous les coëfficiens des puiſſances paires x^2, $x^4 \ldots x^{2n}$, x^{2n+2}, dans No. 1 ſont zéro, & comme ces mêmes coëfficiens appartiennent dans No. 8 aux puiſſances impaires x, x^3, $x^5 \ldots$ ces termes ſont auſſi néceſſairement zéro, & nous aurons

10) $-\overset{1}{A}{}^2 \sin x = \underset{\text{(No. 8)}}{-\overset{1}{A}{}^1 x - \overset{1}{A}{}^4 . \overset{3}{A} x^3 - \overset{1}{A}{}^2 . \overset{5}{A} x^5 - \overset{7}{A}{}^2 . \overset{2n+1}{A} x^{2n+1} - \overset{1}{A}{}^2 \overset{2n+3}{A} x^{2n+3} + \ldots}$

$= 2.3 \overset{3}{A} x + 4.5 \overset{5}{A} x^5 + (2n+2)(2n+3) \overset{2n+3}{A} x^{2n+1} + \ldots$

11) $\overset{1}{A} \cos x = \overset{1}{A} + 3 \overset{3}{A} x^2 + 5 \overset{5}{A} x^4 + \ldots$

$(2n+1) \overset{2n+1}{A} x^{2n} + (2n+3) \overset{2n+3}{A} x^{2n+2} + \ldots$ (No. 7)

De No. 10 nous tirons comme au No. 9

$$\overset{3}{A} = \frac{-\overset{1}{A}{}^2}{1.2.3}; \quad \overset{5}{A} = \frac{-\overset{1}{A}{}^2 . \overset{3}{A}}{4.5}; \quad \ldots$$

$$\overset{2n+1}{A} = \frac{-\overset{1}{A}{}^2 . \overset{2n-1}{A}}{2n(2n+1)}; \quad \overset{2n+3}{A} = \frac{-\overset{1}{A}{}^2 . \overset{2n+1}{A}}{(2n+2)(2n+3)} \text{ \&c.}$$

ſubſtituant ces valeurs dans No. 10 & 11 & diviſant l'une par $-\overset{1}{A}{}^2$ & l'autre ſérie par $\overset{1}{A}$ nous aurons

12) $\sin x = \overset{1}{A} x - \frac{\overset{1}{A}{}^3}{1.2.3} . x^3 + \frac{\overset{1}{A}{}^5}{1.2\ldots5} x^5 - \frac{\overset{1}{A}{}^7}{1.2\ldots7} x^7 + \ldots$

$$\pm \frac{\overset{1}{A}{}^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} . x^{2n+1} \mp \frac{\overset{1}{A}{}^{2n+3}}{1.2\ldots(2n+3)} x^{2n+3} \pm \ldots$$

$$13)\ \cos x = 1 - \frac{\overset{1}{A}^2}{1.2}x^2 + \frac{\overset{1}{A}^4}{1.2.3.4}x^4 - \frac{\overset{1}{A}^6}{1.2\ldots 6}x^6 + \ldots \pm \frac{\overset{1}{A}^{2n}}{1.2\ldots 2n}.x^{2n} \mp \frac{\overset{1}{A}^{2n+2}}{1.2\ldots(2n+2)}.x^{2n+2} \pm \ldots$$

Si ces séries (No. 12, 13) doivent s'appliquer au cercle, il faut néceſſairement que $\overset{1}{A} = 1$, ce que nous prouverons de la manière ſuivante.

Selon Archimède la corde eſt plus petite que ſon arc & la tangente plus grande que ſon arc; donc

$\sin x < x$ & en même temps $\text{tg. } x > x$, ou

$\sin x < x$ & en même temps

$$\frac{\sin x}{\sqrt{(1-\sin^2 x)}} > x \text{ ou } \sin x > x\sqrt{(1-\sin^2 x)}$$

donc $\sin^2 x > x^2 - x^2 \sin^2 x$

ainſi $\sin^2 x\,(1+x^2) > x^2$

$$\sin x > \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}} \text{ & en même temps } \sin x < x.$$

Subſtituant ici les séries pour $\sin x$ & diviſant par x (No. 12),

$$\overset{1}{A} - \frac{\overset{1}{A}^3}{1.2.3}x^2 + \ldots > \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}} \text{ & en même temps } < 1$$

ou

$$\overset{1}{A} - \frac{\overset{1}{A}^3}{1.2.3}x^2 + \ldots \pm \frac{\overset{1}{A}^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)}x^{2n} \mp \frac{\overset{1}{A}^{2n+3}}{1.2\ldots(2n+1)(2n+3)}x^{2n+2} \pm \ldots$$

$$> 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 \ldots \pm \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}x^{2n}$$

$$\mp \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}x^{2n+2} \pm \ldots \text{ & en même temps } < 1$$

Le rapport des deux termes ſucceſſifs & généraux de la première ſérie eſt $\frac{\overset{1}{A}^2 x^2}{(2n+2)(2n+3)}$, une quantité qui diminue à meſure qu'on prend les termes plus éloignés du premier, dans la ſeconde ſérie les deux termes ſucceſſifs & généraux donnent le rapport $\frac{2n+1}{2n+2}x^2 < x^2$. On voit donc

donc qu'il ſera toujours poſſible de donner à x une valeur, telle que les dites ſéries deviennent auſſi convergentes que l'on voudra (§ 12.), donc $A = 1$ (§ 15.), & nous aurons

14) $\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.\ldots.7} + \ldots$

15) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.\ldots.6} + \ldots$

Comme A eſt égal à l'unité les formules remarquables de No. 5 & 6 deviendront

16) $\mathfrak{D} \sin x = x \cos x$

17) $\mathfrak{D} \cos x = -x \sin x$.

La voie par laquelle j'ai trouvé les ſéries pour $\sin x$ eſt ſûrement la plus courte que l'algèbre élémentaire puiſſe fournir, mais nous verrons dans la ſuite par mon nouveau calcul des méthodes plus expédientes.

§ 28.

Nous avons trouvé (§ 23. No. 5)

$$e^{+x} = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

ainſi $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$

donc 1) $e^x + e^{-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{1.2} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} + \ldots\right)$

de là nous aurons

2) $\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{x^2}{1.2.} + \frac{x^4}{1\ldots4} - \frac{x^6}{1\ldots6} + \ldots = \cos x$

& 3) $\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1\ldots5} - \frac{x^7}{1\ldots7} + \ldots = \sin x$

de là

4) $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x$

5) $e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x$

6) $x\sqrt{-1} = \lg.(\cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x)$

7) $-x\sqrt{-1} = \lg.(\cos x - \sqrt{-1} \cdot \sin x)$

$$8)\ 2x\sqrt{-1} = \lg.\left(\frac{\cos x + \sqrt{-1}.\sin x}{\cos x - \sqrt{-1}.\sin x}\right) = \lg.\left(\frac{1+\sqrt{-1}.\operatorname{tg}.x}{1-\sqrt{-1}.\operatorname{tg}.x}\right)$$

donc on aura d'après § 25. No. 8.

$$9)\ 2x\sqrt{-1} = 2\left(\sqrt{-1}\operatorname{tg}.x - \frac{\sqrt{-1}.\operatorname{tg}.x^3}{3} + \frac{\sqrt{-1}.\operatorname{tg}.x^5}{5} - ..\right)$$

ou $$10)\ x = \operatorname{tg}.x - \frac{\operatorname{tg}.x^3}{3} + \frac{\operatorname{tg}.x^5}{5} - \frac{\operatorname{tg}.x^7}{7} + \ldots.$$

Il n'appartient pas à mon but d'augmenter ici les recherches de cette nature, qui ſont d'ailleurs ſi attirantes & ſéduiſantes, que j'ai en vérité de la peine à y réſiſter. Je donnerai encore la ſolution de quelques propoſitions qui ſe traitent difficilement par l'algèbre ordinaire.

§ 29.

Trouver le logarithme de $f = \overset{0}{a} + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 + \ldots$

Il eſt clair par No. 23, qu'on peut ſuppoſer

$$\lg. f = \overset{0}{A} + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \ldots = F;$$

que x ſe change en $x + \Delta x$, on aura

$$\lg.(f + \Delta f) = F + \Delta F$$

$$\lg. f + \lg.\left(1 + \frac{\Delta f}{f}\right) = F + \Delta F$$

donc $$\lg.\left(1 + \frac{\Delta f}{f}\right) = \Delta F$$

$$\frac{\Delta f}{f} - \mathfrak{P}\Delta f^2 = \Delta F \quad (\S\ 25.\ \text{No. } 6)$$

$$\frac{\mathfrak{D} f}{f x}\Delta x + \mathfrak{P}'\Delta x^2 = \frac{\mathfrak{D} F}{x}\Delta x + \mathfrak{P}'\Delta x^2 \quad (\S\ 19.)$$

donc $$\frac{\mathfrak{D} f}{f x} = \frac{\mathfrak{D} F}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathfrak{D} f}{x} = f.\frac{\mathfrak{D} F}{x}$$

c'eſt-à-dire

$$\overset{1}{a} + 2\overset{2}{a}x + 3\overset{3}{a}x^2 + 4\overset{4}{a}x^3 + \ldots n\overset{n}{a}x^{n-1} + (n+1)\overset{n+1}{a}x^n + \ldots$$
$$= [\overset{0}{a} + \overset{1}{a}x + \overset{2}{a}x^2 + \ldots \overset{n}{a}x^n + \ldots][\overset{1}{A} + 2\overset{2}{A}x + 3\overset{3}{A}x^2 + \ldots (n+1)\overset{n+1}{A}x^n + \ldots]$$

de là on tire facilement la relation générale

$$(n+1)\overset{n+1}{a} = [\overset{0}{a}(n+1)\overset{n+1}{A} + \overset{1}{a}.n\overset{n}{A} + \overset{2}{a}(n-1)\overset{n-1}{A} + \overset{3}{a}(n-2)\overset{n-2}{A} + \ldots$$
$$+ \overset{n-2}{a}.3\overset{3}{A} + \overset{n-1}{a}.2\overset{2}{A} + \overset{n}{a}.\overset{1}{A}]$$

qui nous donne tout de ſuite

$$\overset{n+1}{A} = \frac{\overset{n+1}{a} - [\overset{1}{a}.n\overset{n}{A} + \overset{2}{a}(n-1)\overset{n-1}{A} + \overset{3}{a}(n-2)\overset{n-2}{A} + \ldots + \overset{n}{a}.\overset{1}{A}]}{\overset{0}{a}(n+1)}$$

Donnant à n ſucceſſivement les valeurs 0, 1, 2, 3 ... nous recevrons les relations particulières

$$\overset{1}{A} = \frac{\overset{1}{a}}{\overset{0}{a}}$$

$$\overset{2}{A} = \frac{2\overset{2}{a} - \overset{1}{a}\overset{1}{A}}{2\overset{0}{a}}$$

$$\overset{3}{A} = \frac{3\overset{3}{a} - (2\overset{1}{a}\overset{2}{A} + \overset{2}{a}\overset{1}{A})}{3\overset{0}{a}}$$

$$\overset{4}{A} = \frac{4\overset{4}{a} - (3\overset{1}{a}\overset{3}{A} + 2\overset{2}{a}\overset{2}{A} + \overset{3}{a}\overset{1}{A})}{4\overset{0}{a}} \quad \&c.$$

& comme la fonction donnée lg. $f = \overset{0}{A} + \overset{1}{A}x + \ldots$ doit être vraie pour toutes les valeurs poſſibles de x, nous trouvons pour $x = 0$; lg. $\overset{0}{a} = \overset{0}{A}$, ainſi tous les coëfficiens ſe trouvent en termes *recurrens*, c'eſt-à-dire, par des formules dans leſquelles entrent les coëfficiens précédens; & la méthode des coëfficiens indéterminés, qui y eſt employée, ne donne ordinairement que des formules en termes recurrens, & voilà un avantage de l'analyſe combinatoire, qui ſait affranchir ces liens & rend les calculs ſi faciles qu'il n'en coûte que la peine de les écrire. Je ferai voir dans la ſuite, comme j'ai déjà eu l'honneur de le dire plus haut, que mon nouveau calcul marche de front avec l'analyſe combinatoire, & ouvre un vaſte champ pour des génies ſupérieurs au mien.

Je dois faire remarquer ici que le raiſonnement peut être abrégé en faiſant uſage des principes du § 24. Car lg. $f = F$ donne $\Im$ lg. $f = \Im F$, ou $\frac{\Im f}{f} = \Im F$, ainſi $\frac{\Im f}{x} = f.\frac{\Im F}{x}$ comme ci-

deſſus. Cette abréviation eſt encore un effet de mon algorithme, qui ſe manifeſte encore plus par les problèmes ſuivans.

§ 30.

Développer $e^{\overset{0}{a}+\overset{1}{a}x+\overset{2}{a}x^2+\overset{3}{a}x^3+\cdots}=e^f$ en une ſérie de la forme ſuivante: $\overset{0}{A}+\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2+\overset{3}{A}x^3+\ldots=F$

on a $\Im e^f=e^f\Im f$ ou $\frac{\Im F}{x}=F.\frac{\Im f}{x}$ (§ 24. No. 7)

Le développement de la formule $F.\frac{\Im f}{x}=\frac{\Im F}{x}$ donne les relations ſuivantes

$$\overset{1}{A}=\overset{1}{a}\overset{0}{A}$$

$$\overset{2}{A}=\frac{\overset{1}{a}\overset{1}{A}+2\overset{2}{a}\overset{0}{A}}{2}$$

$$\overset{3}{A}=\frac{\overset{1}{a}\overset{2}{A}+2\overset{2}{a}\overset{1}{A}+3\overset{3}{a}\overset{0}{A}}{3}$$

$$\overset{4}{A}=\frac{\overset{1}{a}\overset{3}{A}+2\overset{2}{a}\overset{2}{A}+3\overset{3}{a}\overset{1}{A}+4\overset{4}{a}\overset{0}{A}}{4}$$

$$\vdots$$

$$\overset{n}{A}=\frac{\overset{1}{a}\overset{n-1}{A}+2\overset{2}{a}\overset{n-2}{A}+\ldots(r-1)\overset{r-1}{a}\overset{n-r+1}{A}+\ldots(n-2)\overset{n-2}{a}\overset{2}{A}+(n-1)\overset{n-1}{a}\overset{1}{A}+n\overset{n}{a}\overset{0}{A}}{n};$$

ſuppoſons dans $F=e^f$ $x=0$ on trouvera $\overset{0}{A}=e^{\overset{0}{a}}$, donc tous les coëfficiens ſont déterminés.

§ 31.

Développer $\left(1+\frac{x}{\overset{0}{a}}\right)^{\overset{1}{\alpha}}\left(1+\frac{x}{\overset{1}{a}}\right)^{\overset{2}{\alpha}}\left(1+\frac{x}{\overset{2}{a}}\right)^{\overset{3}{\alpha}}\left(1+\frac{x}{\overset{3}{a}}\right)^{\overset{4}{\alpha}}$ &c.

en une ſérie de cette forme:

$$\overset{0}{A}+\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2+\overset{3}{A}x^3+\ldots=F$$

Nous avons ainſi d'après (§ 24.)

$$\lg. F = {}^{1}\alpha \lg.\left(1+\frac{x}{{}^{1}a}\right) + {}^{2}\alpha \lg.\left(1+\frac{x}{{}^{2}a}\right) + {}^{3}\alpha \lg.\left(1+\frac{x}{{}^{3}a}\right) + {}^{4}\alpha \lg.\left(1+\frac{x}{{}^{4}a}\right) + \ldots$$

$$\frac{\partial F}{x F} = \frac{{}^{1}\alpha}{{}^{1}a+x} + \frac{{}^{2}\alpha}{{}^{2}a+x} + \frac{{}^{3}\alpha}{{}^{3}a+x} + \frac{{}^{4}\alpha}{{}^{4}a+x} + \ldots$$

$$= \frac{{}^{1}\alpha}{{}^{1}a} - \frac{{}^{1}\alpha}{{}^{1}a^{2}}x + \frac{{}^{1}\alpha}{{}^{1}a^{3}}x^{2} - \frac{{}^{1}\alpha}{{}^{1}a^{4}}x^{3} + \ldots$$

$$\frac{{}^{2}\alpha}{{}^{2}a} - \frac{{}^{2}\alpha}{{}^{2}a^{2}}x + \frac{{}^{2}\alpha}{{}^{2}a^{3}}x^{2} - \frac{{}^{2}\alpha}{{}^{2}a^{4}}x^{3} + \ldots$$

$$\frac{{}^{3}\alpha}{{}^{3}a} - \frac{{}^{3}\alpha}{{}^{3}a^{2}}x + \frac{{}^{3}\alpha}{{}^{3}a^{3}}x^{2} - \frac{{}^{3}\alpha}{{}^{3}a^{4}}x^{3} + \ldots$$

$$\frac{{}^{4}\alpha}{{}^{4}a} - \frac{{}^{4}\alpha}{{}^{4}a^{2}}x + \frac{{}^{4}\alpha}{{}^{4}a^{3}}x^{2} - \frac{{}^{4}\alpha}{{}^{4}a^{4}}x^{3} + \ldots \text{ &c.}$$

$$= B_0 - B_1 x + B_2 x^2 - B_3 x^3 + \ldots \pm B_n x^n \mp \ldots = P$$

donc $\frac{\partial F}{x} = F \cdot P$. Le développement de cette formule nous donne les relations ſuivantes:

$${}^{1}A = {}^{0}A B_0$$

$${}^{2}A = \frac{{}^{1}A B_0 - {}^{0}A B_1}{2}$$

$${}^{3}A = \frac{{}^{2}A B_0 - {}^{1}A B_1 + {}^{0}A B_2}{3}$$

$${}^{4}A = \frac{{}^{3}A B_0 - {}^{2}A B_1 + {}^{1}A B_2 - {}^{0}A B_3}{4}$$

$$\vdots$$

$${}^{2n}A = \frac{{}^{2n-1}A B_0 - {}^{2n-2}A B_1 + {}^{2n-3}A B_2 - \ldots + {}^{2r-1}A B_{2n-2r} - {}^{2r-2}A B_{2n-(2r+1)} + \ldots + {}^{1}A B_{2n-2} - {}^{0}A B_{2n-1}}{2n}$$

$${}^{2n+1}A = \frac{{}^{2n}A B_0 - {}^{2n-1}A B_1 + \ldots - {}^{2r-1}A B_{2n-2r} + \ldots - {}^{1}A B_{2n-1} + {}^{0}A B_{2n}}{2n+1}.$$

Comme l'équation $\left(1+\frac{x}{\frac{1}{a}}\right)^{\overset{1}{a}}\left(1+\frac{x}{\frac{2}{a}}\right)^{\overset{2}{a}}\times$ &c. $=\overset{0}{A}+\overset{1}{A}x+\overset{2}{A}x^2+\ldots$ doit être juste pour toutes les valeurs possibles de x, nous en tirons pour $x=0$; $1^{\overset{1}{a}}.1^{\overset{2}{a}}.1^{\overset{3}{a}}\times$ &c. $=1=\overset{0}{A}$; donc tous les coëfficiens sont déterminés, par la loi assignée ci-dessus.

J'ai pris ce problème & le précédent de l'analyse de l'infini par M. le général *de Tempelhoff* p. 298 & suivantes *), & je renvoie le lecteur à l'ouvrage cité pour voir les belles conséquences que M. *de Tempelhoff* en déduit. Je crois effectivement que ma solution de ce problème est la plus facile & la plus expédiente que l'analyse ordinaire puisse fournir en termes *recurrens*. Je montrerai dans un autre endroit avec quelle facilité étonnante l'analyse combinatoire fait résoudre un problème analogue, mais encore beaucoup plus généralisé, & je ferai voir en même temps, que mon nouveau calcul m'en donne aussi la solution avec la même facilité. Je ne me peux pourtant pas dispenser de donner encore ici la solution d'un autre problème analogue qui nous fait trouver la somme des diviseurs des nombres.

§ 32.

Soit $F=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)\times$ &c.
$=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-$ &c.
$=f$ (Euler Introd. Cap. XVI. § 323.); on aura

lg. $F=$ lg.$(1-x)+$ lg.$(1-x^2)+$ lg.$(1-x^3)+\ldots=$ lg. f.

d'après § 24. donc

$$\frac{\partial F}{F}=-\left[\frac{x}{1-x}+\frac{2x^2}{1-x^2}+\frac{3x^3}{1-x^3}+\ldots\right]=\frac{\partial f}{f}.$$

Développant chaque terme de la valeur de $\frac{\partial F}{F}$ en séries, nous aurons

*) v. *Tempelhoffs Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen. Berlin 1770.* (Jusqu'ici il n'a paru que le premier Volume, qui contient le calcul différentiel.)

$$-\frac{\partial F}{xF} = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + \ldots$$
$$+2 \quad +2 \quad +2 \quad +2 \quad +2$$
$$+3 \quad +3 \quad +3$$
$$+4 \quad +4$$
$$+5 \quad +5$$
$$+6$$
$$+7$$
$$+8$$
$$+9$$
$$+10$$

Par cette expreſſion il eſt manifeſte que le coëfficient de chaque puiſſance de x eſt la ſomme des diviſeurs de l'expoſant correſpondant; donc ſi nous déſignons par $\int n$ la ſomme des diviſeurs du nombre n, cette dernière expreſſion ſe changera en celle-ci:

$$-\frac{\partial F}{F} = x\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 + x^6\int 6 + x^7\int 7 + x^8\int 8 + x^9\int 9 + \ldots$$

Comparant cette dernière valeur de $-\frac{\partial F}{F}$ avec $-\frac{\partial f}{f} = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - \ldots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots}$, nous en tirerons $f \cdot \frac{\partial F}{F} = \partial f$; en effectuant les opérations indiquées, nous aurons

$$\begin{array}{l}
x\int 1 + x^2\int 2 + x^3\int 3 + x^4\int 4 + x^5\int 5 + x^6\int 6 + x^7\int 7 + x^8\int 8 + x^9\int 9 + x^{10}\int 10 + \ldots \\
\quad - \int 1 - \int 2 - \int 3 - \int 4 - \int 5 - \int 6 - \int 7 - \int 8 - \int 9 - \ldots \\
\quad\quad - \int 1 - \int 2 - \int 3 - \int 4 - \int 5 - \int 6 - \int 7 - \int 8 - \ldots \\
\quad\quad\quad + \int 1 + \int 2 + \int 3 + \int 4 + \int 5 + \ldots \\
\quad\quad\quad\quad + \int 1 + \int 2 + \int 3 + \ldots \\
= x + 2x^2 \quad - 5x^5 \quad - 7x^7
\end{array}$$

ce qui donne les égalités ſuivantes

$$\begin{array}{l|l}
\int 1 = 1 & \int 7 = \int 6 + \int 5 - \int 2 - 7 \\
\int 2 = \int 1 + 2 & \int 8 = \int 7 + \int 6 - \int 3 - \int 1 \\
\int 3 = \int 2 + \int 1 & \int 9 = \int 8 + \int 7 - \int 4 - \int 2 \\
\int 4 = \int 3 + \int 2 & \int 10 = \int 9 + \int 8 - \int 5 - \int 3 \\
\int 5 = \int 4 + \int 3 - 5 & \int 11 = \int 10 + \int 9 - \int 6 - \int 4 \\
\int 6 = \int 5 + \int 4 - \int 1 & \int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + 12 \quad \&c.
\end{array}$$

lesquelles reviennent évidemment à celles-ci:

$$\begin{aligned}
f1 &= 1\\
f2 &= f(2-1) + 2\\
f3 &= f(3-1) + f(3-2)\\
f4 &= f(4-1) + f(4-2)\\
f5 &= f(5-1) + f(5-2) - 5\\
f6 &= f(6-1) + f(6-2) - f(6-5)\\
f7 &= f(7-1) + f(7-2) - f(7-5) - 7\\
f8 &= f(8-1) + f(8-2) - f(8-5) - f(8-7)\\
f9 &= f(9-1) + f(9-2) - f(9-5) - f(9-7)\\
f10 &= f(10-1) + f(10-2) - f(10-5) - f(10-7)\\
f11 &= f(11-1) + f(11-2) - f(11-5) - f(11-7)\\
f12 &= f(12-1) + f(12-2) - f(12-5) - f(12-7) + 12. \quad \&c.
\end{aligned}$$

Il eſt clair que les nombres à ſouſtraire continuellement du nombre propoſé, & des diviſeurs dont on cherche la ſomme, forment la ſuite 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, &c., la même que celle des expoſans de x dans la ſérie f. Donc on a, en général,

$$\begin{aligned}
fn = {} & f(n-1) + f(n-2) - f(n-5) - f(n-7) + f(n-12)\\
& + f(n-15) - f(n-22) - \&c. \ldots
\end{aligned}$$

en prolongeant la ſérie, juſqu'à ce qu'on trouve un nombre négatif ſous le ſigne f, & ayant l'attention de prendre pour $f(n-n)$, lorſqu'on arrive à un réſultat de cette forme, le nombre même n.

§ 33.

Réduire $\frac{F}{f} = \frac{(1-ax)(1-bx)(1-cx)\ldots}{(1-a'x)(1-b'x)(1-c'x)\ldots}$ en une ſérie de la forme

$$\overset{0}{A} + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \overset{3}{A}x^3 + \ldots = P.$$

Soit

$$\frac{F}{f} = P; \text{ on aura } \lg. F - \lg. f = \lg. P;$$

donc

$$\left.\begin{aligned}
&- \frac{a}{1-ax} - \frac{b}{1-bx} - \frac{c}{1-cx} - \ldots\\
&+ \frac{a'}{1-a'x} + \frac{b'}{1-b'x} + \frac{c'}{1-c'x} + \ldots
\end{aligned}\right\} = \frac{\mathfrak{D}P}{P.x} \text{ (§ 24. No. 7)}$$

ou

ou

$$\left.\begin{array}{l} a' + a'^2 x + a'^3 x^2 + \ldots \\ + b' + b'^2 x + b'^3 x^2 + \ldots \\ + c' + c'^2 x + c'^3 x^2 + \ldots \\ - - - - - - - - - \\ - a - a^2 x - a^3 x^2 - \ldots \\ - b - b^2 x - b^3 x^2 - \ldots \\ - c - c^2 x - c^3 x^2 - \ldots \\ - - - - - - - - - \end{array}\right\} = \frac{\overset{1}{A} + 2\overset{2}{A}x + 3\overset{3}{A}x^2 + \ldots}{\overset{0}{A} + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \overset{3}{A}x^3 + \ldots}$$

Pour abréger, faiſons

$$\overset{1}{S} = a' + b' + c' \ldots - a - b - c \ldots$$
$$\overset{2}{S} = a'^2 + b'^2 + c'^3 \ldots - a^2 - b^2 - c^2 \ldots$$
$$\overset{3}{S} = a'^3 + b'^3 + c'^3 \ldots - a^3 - b^3 - c^3 \ldots$$

on aura

$$\overset{1}{S} + \overset{2}{S}x + \overset{3}{S}x^2 + \overset{4}{S}x^3 + \ldots = \frac{\overset{1}{A} + 2\overset{2}{A}x + 3\overset{3}{A}x^2 + \ldots}{\overset{0}{A} + \overset{1}{A}x + \overset{2}{A}x^2 + \overset{3}{A}x^3 + \ldots}$$

d'où on tirera les relations ſuivantes.

$$\overset{1}{A} = \overset{0}{A}\overset{1}{S}$$
$$2\overset{2}{A} = \overset{1}{A}\overset{1}{S} + \overset{0}{A}\overset{2}{S}$$
$$3\overset{3}{A} = \overset{2}{A}\overset{1}{S} + \overset{1}{A}\overset{2}{S} + \overset{0}{A}\overset{3}{S}$$
$$4\overset{4}{A} = \overset{3}{A}\overset{1}{S} + \overset{2}{A}\overset{2}{S} + \overset{1}{A}\overset{3}{S} + \overset{0}{A}\overset{4}{S} \quad \&c.$$

donc

$$\frac{\overset{1}{A}}{\overset{0}{A}} = \overset{1}{S}$$
$$\frac{\overset{2}{A}}{\overset{0}{A}} = \frac{\overset{2}{S}}{2} + \overset{1}{S}.\frac{\overset{1}{S}}{2}$$
$$\frac{\overset{3}{A}}{\overset{0}{A}} = \frac{\overset{3}{S}}{3} + \overset{1}{S}.\frac{\overset{2}{S}}{3} + \left(\frac{\overset{2}{S}}{2} + \overset{1}{S}.\frac{\overset{1}{S}}{2}\right)\frac{\overset{3}{S}}{3}$$

$$\frac{\overset{n}{A}}{\overset{0}{A}} = \frac{\overset{n}{S}}{4} + \overset{1}{S}.\frac{\overset{n}{S}}{4} + \left(\frac{\overset{2}{S}}{2} + \overset{1}{S}.\frac{\overset{1}{S}}{2}\right)\frac{\overset{2}{S}}{4}$$
$$+ \left[\frac{\overset{3}{S}}{3} + \overset{1}{S}.\frac{\overset{2}{S}}{3} + \left(\frac{\overset{2}{S}}{2} + \overset{1}{S}.\frac{\overset{1}{S}}{2}\right)\frac{\overset{1}{S}}{3}\right]\frac{\overset{1}{S}}{4}$$
$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$\frac{\overset{m+1}{A}}{\overset{0}{A}} = \frac{\overset{m+1}{S}}{m+1} + \overset{1}{S}.\frac{\overset{m}{S}}{m+1} + \left(\frac{\overset{2}{S}}{2} + \overset{1}{S}.\frac{\overset{1}{S}}{2}\right)\frac{\overset{m-1}{S}}{m+1}$$
$$+ \left[\frac{\overset{3}{S}}{3} + \overset{1}{S}.\frac{\overset{2}{S}}{3} + \left(\frac{\overset{2}{S}}{2} + \overset{1}{S}.\frac{\overset{1}{S}}{2}\right)\frac{\overset{1}{S}}{3}\right]\frac{\overset{m-2}{S}}{m+1} + \ldots$$

L'application de ces formules dépend, comme on voit, de la ſommation des ſéries $\overset{1}{S}$, $\overset{2}{S}$ &c. Dans le cas où la première différence des termes de la ſérie $\overset{1}{S}$ eſt conſtante, on trouve immédiatement les coëfficiens des puiſſances de x dans le développement du produit $(1 - ax)(1 - bx)(1 - cx)$ &c.... par une voie très-ſimple que M. de la Grange a donnée (Mém. de l'Acad. de Berlin année 1771, pag. 126).

§ 34.

Les recherches précédentes ſuffiſent pour faire entrevoir le chemin qui m'a dû néceſſairement conduire à mon algorithme, & les procédés qui en dépendent. Pour ne rien laiſſer à déſirer ſur l'évidence du nouveau calcul, j'ai même rapporté des propoſitions qu'on trouve ailleurs, mais que j'ai traitées à ma manière. Les développemens de a^x, lg. $(1 + x)$, ſin x & coſ x, nous ont donné des expreſſions purement algébraïques, & nous devons conclure de là, & des principes établis dans les § 1 - 6, que chaque fonction ſoit algébrique ou transcendante a, ou peut être réduite à la forme

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + \ldots = F.$$

En ſuppoſant le théorème du binome connu, il ſera très-facile de démontrer que $(F)^m$ doit être de la même forme que F, pour chaque expoſant imaginable. Mais ſans le binome de Newton voici comment on le prouve.

Soit f une fonction de la même forme que F, on prouve comme au § 1. que $f \cdot F$ eſt de la même forme que F. De là X, Y, Z, U &c. étant des fonctions de la même forme que F, on aura $X \cdot Y \cdot Z \cdot U$ &c. de la même forme que F; ſoit m & n des nombres entiers, il ſuit de même que F^m eſt de la même forme que F ou F^n. Comme F^m eſt de la même forme que F^n, on en doit conclure que

$(F^m)^{\frac{1}{n}}$ eſt de la même forme que $(F^n)^{\frac{1}{m}}$ parce que les expoſans $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$ ne différent que par la grandeur de leur numérateur. On aura donc

$F^{\frac{m}{n}}$ de la même forme que $F^{\frac{n}{m}}$; il eſt donc évident

que $(F^{\frac{m}{n}})^n$ eſt de la même forme que $(F^{\frac{n}{m}})^n$

ou F^m eſt de la même forme que $F^{\frac{n^2}{m}}$

Mais $\frac{n^2}{m}$ peut repréſenter un nombre rompu quelconque $\frac{p}{q}$

donc F^m eſt de la même forme que $F^{\frac{p}{q}}$

c'eſt-à-dire le développement de $F^{\frac{p}{q}}$ eſt déterminé des termes de F & de l'expoſant $\frac{p}{q}$ de la même manière que le développement de F^m l'eſt des termes de F & de l'expoſant m.

$\frac{1}{F^{2n+1}}$ doit évidemment être de la même forme que $\frac{1}{F^n}$

donc auſſi $\frac{F^{2n}}{F^{2n+1}}$ de la même forme que $\frac{F^{2n}}{F^n}$

ou $\frac{1}{F} = F^{-1}$ de la même forme que F^n ou F

de là ſuit que F^{-n} doit auſſi être de la même forme que F^n

de même que $F^{-\frac{n}{m}}$ de la même forme que $F^{\frac{n}{m}}$ ou F ou F^n.

Ces principes abrègent beaucoup les démonſtrations & épargnent beaucoup de calculs ennuyans; on n'a par exemple beſoin que de démontrer le théorème de polynome pour un expoſant entier, tout de ſuite il

ſuit du principe précédent, que la forme trouvée pour un expoſant entier eſt auſſi juſte pour un expoſant quelconque. Il me ſera préſentement permis de m'occuper de mon nouveau calcul même. La plupart des propoſitions que j'ai données au commencement de ce mémoire ſont auſſi néceſſaires au calcul différentiel.

Le calcul d'expoſition.

§ 35.

J'appelle *exponentielle d'une fonction* fx, le réſultat qu'on reçoit, quand on multiplie chaque terme de la fonction avec l'expoſant de la variable x qui ſe trouve dans le terme & qu'on regarde comme indépendant d'une autre variable, & j'indique l'opération par un E renverſé ($\mathfrak{Z}$) que je place à côté gauche de la fonction (§ 19.).

P. e. ſoit $fx = x^n$

l'exponentielle ſera $\mathfrak{Z} . fx = \mathfrak{Z} . x^n = nx^n$

ſoit $fx = ax^r + bx^{\frac{1}{2}} + qx^{\frac{1}{a}} + C$

l'exponentielle ſera

$$\mathfrak{Z} . fx = \mathfrak{Z} . ax^r + \mathfrak{Z} . bx^{-\frac{1}{2}} + \mathfrak{Z} . qx^{\frac{1}{a}} + \mathfrak{Z} . Cx^0$$
$$= arx^r + {}_{\frac{1}{2}}bx^{\frac{1}{2}} + q\sqrt[a]{a} . x^{\frac{1}{a}}.$$

Pour indiquer qu'on doit prendre l'exponentielle d'une fonction je me ſervirai du terme *expoſé*, & j'appelle la méthode de déterminer les exponentielles des fonctions, & réciproquement, de remonter des exponentielles aux fonctions, le *calcul d'expoſition.*

§ 36.

Il ſuit du précédent que l'exponentielle d'une conſtante eſt zéro

car $\mathfrak{Z} . a = \mathfrak{Z} . ax^0 = 0 . ax^0 = 0$

de même que $\mathfrak{Z} . x = x.$

c'eſt-à-dire: l'exponentielle d'une variable x qui n'eſt pas fonction d'une autre variable, eſt la variable même, d'où ſuit que l'on peut tou-

jours écrire $\eth x$ au lieu de x, & *vice verſa* x au lieu de $\eth x$, ſi cela convient.

P. e. $\eth . x^2 = 2x^2 = 2x . x = 2x \eth x$

$\eth . x^n = nx^n = nx^{n-1} x = nx^{n-1} \eth x$

Du § 35 ſuit auſſi généralement, que pour toutes les fonctions P, Q, R ... Z d'une ſeule variable x, on a

$$\eth.(P+Q+R+\ldots+Z) = \eth.P+\eth.Q+\eth.R+\ldots\eth.Z$$

De même pour toute fonction Y de x, & une conſtante quelconque C on a

$$\eth . (Y \pm C) = \eth . Y \pm \eth . C = \eth . Y.$$

§ 37.

L'exponentielle d'un produit de deux fonctions d'une ſeule variable x, *ſe trouve en multipliant chacune d'elles par l'exponentielle de l'autre, & en ajoutant enſemble les deux réſultats.*

Soient U & Z deux fonctions de la variable x, il doit être

$$\eth UZ = U\eth . Z + Z\eth U$$

Premier cas.

Soit $U = ax^r$ & $Z = bx^n$

donc $U\eth Z + Z\eth U$

$= ax^r \eth . bx^n + bx^n \eth . ax^r$

$= ax^r . b . nx^n + bx^n . arx^r$

$= abnx^{n+r} + abrx^{n+r}$

$= ab(n+r)x^{n+r}$

Mais $U . Z = abx^{n+r}$

& $\eth . UZ = ab(n+r)x^{n+r}$

donc, dans ce cas

$$\eth . UZ = U\eth Z + Z\eth U$$

Second cas.

Soit $U = cx^p$, & $Z = ax^q + bx^r + dx^c + \ldots$

Chaque terme du produit UZ, eſt une fonction de la forme $mx^\beta . cx^p$, & $\eth . (mx^\beta . cx^p) = mx^\beta . \eth : cx^p + cx^p . \eth . mx^\beta$. (Premier cas.)

Le facteur $U = cx^p$ étant commun à tous les termes du produit il ſuit évidemment que chaque terme de Z ſera multiplié, par $\mathfrak{D} . cx^p$ & l'exponentielle de chaque terme par cx^p. Donc $\mathfrak{D} . UZ = U\mathfrak{D}Z + Z\mathfrak{D}U$.

Troiſième cas.

Soit $U = \alpha x^r + \beta x^s + \delta x^q + \ldots$,

& Z une fonction ſemblable

$$UZ = \alpha x^r Z + \beta x^s Z + \delta x^q Z + \ldots$$

donc en $\mathfrak{D} . UZ$, chaque terme de U aura un facteur $\mathfrak{D}Z$, donc auſſi dans ce cas

$$\mathfrak{D} . UZ = U\mathfrak{D}Z + Z\mathfrak{D}U.$$

Autre démonſtration plus courte.

Soit $F = U . Z$.

On aura, ſi la variable x augmente de Δx (§ 19.)

$$F + \frac{\mathfrak{D}F}{x}\Delta x + \mathfrak{P}\Delta x^2$$
$$= \left(U + \frac{\mathfrak{D}U}{x}\Delta x + \mathfrak{Q}\Delta x^2\right)\left(Z + \frac{\mathfrak{D}Z}{x}\Delta x + \mathfrak{Q}'\Delta x^2\right)$$
$$= (UZ + (U\mathfrak{D}Z + Z\mathfrak{D}U)\frac{\Delta x}{x} + \mathfrak{P}'\Delta x^2$$

donc $\mathfrak{D}F = \mathfrak{D} . UZ = U\mathfrak{D}Z + Z\mathfrak{D}U$

§ 38.

Si on diviſe les deux membres de l'équation $\mathfrak{D} . u\zeta = u\mathfrak{D}\zeta + \zeta\mathfrak{D}u$, par la fonction primitive $u\zeta$, on trouvera $\frac{\mathfrak{D} . u\zeta}{u\zeta} = \frac{\mathfrak{D}\zeta}{\zeta} + \frac{\mathfrak{D}u}{u}$; ce qui conduit facilement à l'expreſſion de l'exponentielle d'un produit compoſé d'autant de facteurs qu'on voudra.

P. e. Soit $u = xy$; nous aurons $\mathfrak{D} . u = \frac{\mathfrak{D}x}{x} + \frac{\mathfrak{D}y}{y}$; donc

$$\frac{\mathfrak{D} . u\zeta}{u\zeta} = \frac{\mathfrak{D} . xy\zeta}{xy\zeta} = \frac{\mathfrak{D}x}{x} + \frac{\mathfrak{D}y}{y} + \frac{\mathfrak{D}\zeta}{\zeta}$$

En général ſoient x, y, z, t, u . . . des fonctions d'une ſeule variable, alors

$$\frac{\partial.(x.y.z.t.u\ldots)}{x.y.z.t.u\ldots} = \frac{\partial x}{x} + \frac{\partial y}{y} + \frac{\partial z}{z} + \frac{\partial t}{t} + \frac{\partial u}{u} + \ldots$$

Si on fait évanouir les dénominateurs, on trouvera que *quel que ſoit le nombre des facteurs, les exponentielles de leur produit ſeront égales à la ſomme des produits de l'exponentielle de chacun d'eux, multipliée par tous les autres.*

Il ſuit immédiatement que ſi y^n eſt une fonction d'une ſeule variable, alors

$$\frac{\partial.y^n}{y^n} = \frac{\partial.y.y.y.y\ldots}{y.y.y.y\ldots} = \frac{\partial y}{y} + \frac{\partial y}{y} + \frac{\partial y}{y} + \ldots$$

Comme le premier membre eſt compoſé de n facteurs, le ſecond ſera compoſé d'un pareil nombre de termes égaux, & il ſe réduira par conſéquent à $n \cdot \frac{\partial y}{y}$.

On aura donc $\frac{\partial.y^n}{y^n} = n \cdot \frac{\partial y}{y}$

ainſi $$\partial . y^n = n y^{n-1} \partial y$$

c'eſt-à-dire *on trouve l'exponentielle de la puiſſance d'une fonction quelconque d'une quantité variable, en regardant la fonction ſimplement comme une quantité variable.*

Cela eſt général, quel que ſoit l'expoſant de la fonction:

car ſoit $y^{\frac{n}{m}} = z$

donc $y^n = z^m$

ainſi $\partial . y^n = \partial . z^m$

ou $n y^{n-1} \partial y = m z^{m-1} \partial z$

par conſéquent $\frac{n y^{n-1} \partial y}{m . z^{m-1}} = \partial z$

$$= \frac{n}{m} \cdot \frac{z\, y^{n-1} \partial y}{z^m} = \partial z$$

$$= \frac{n}{m} \frac{y^m . y^{n-1} \partial y}{y^n} = \frac{n}{m} y^{\frac{n}{m}-1} \partial y = \partial z = \partial . y^{\frac{n}{m}}.$$

Soit $y^{-r} = z$

$= \frac{1}{y^r} = z$

$= 1 = zy^r$

donc $0 = \partial . zy^r$

$0 = z\partial y^r + y^r . \partial z$

$-\frac{z\partial y^r}{y^r} = \partial z = -\frac{y^{-r} . ry^{r-1}\partial y}{y^r} = -ry^{-(r+1)}\partial y$

Autre démonſtration plus courte & directe.

Soit $F = (f)^n$ & f une fonction de x; ſuppoſons que x augmente de Δx, on aura d'après § 19.

$$F + \frac{\partial F}{x}\Delta x + \mathfrak{P}\Delta x^2 = \left(f + \frac{\partial f}{x}\Delta x + \mathfrak{Q}\Delta x^2\right)^n$$

$$= f^n + nf^{n-1}\frac{\partial f}{x}\Delta x + \mathfrak{P}'\Delta x^2 \text{ § 19.}$$

ainſi $\partial F = \partial . (f)^n = nf^{n-1}\partial f$

Remarque. Soit $f = x$ c'eſt-à-dire une variable abſolue, on aura

$\partial . f^n = \partial . x^n = nx^{n-1}\partial x$

$= nx^{n-1} . x$

$= nx^n$ (§ 36.)

§ 39.

Soient x & y deux fonctions d'une quantité variable u, on aura

$$\partial . \frac{x}{y} = \frac{y\partial x - x\partial y}{y^2}$$

car $\frac{x}{y}$ ſoit $= z$

donc $x = yz$

& $\partial x = y\partial z + z\partial y$

& $\frac{\partial x - z\partial y}{y} = \partial z$

ou $\frac{\partial x - \frac{x}{y}\partial y}{y} = \partial z$

ou $\frac{y\partial x - x\partial y}{y^2} = \partial . \frac{x}{y}$.

Ainſi

Ainſi *pour trouver l'exponentielle d'une fraction, il faut multiplier le dénominateur par l'exponentielle du numérateur, retrancher de ce produit celui du numérateur par l'exponentielle du dénominateur, & diviſer le tout par le carré du dénominateur.*

Autre démonſtration qui eſt directe.

Ayant $Z = \frac{X}{Y}$, & que u augmente de Δu on aura d'après § 19.

$$Z + \frac{\Im Z}{u}\Delta u + \mathfrak{P}\Delta u^2 = \frac{x + \frac{\Im X}{u}\Delta u + \Omega\Delta u^2}{Y + \frac{\Im Y}{u}\Delta u + \Omega'\Delta u^2}$$

& par la diviſion ordinaire

$$= \frac{X}{Y} + \left(\frac{\Im X}{Yu} - \frac{X\Im Y}{Y^2 u}\right)\Delta u + \mathfrak{P}'\Delta u^2$$

ainſi $\Im Z = \Im . \frac{x}{y} = \frac{y\Im x - x\Im y}{y^2}$

Soit en général une fraction $\frac{p\,q\,r\,s\,t\,\ldots}{p'q'r's't'\ldots} = Z$

ou $p\,q\,r\,s\,t\ldots = Z\,p'\,q'\,r'\,s'\,t'\ldots$

donc $\frac{\Im . Z\,p'\,q'\,r'\,s'\,t'\ldots}{Z\,p'\,q'\,r'\,s'\,t'\ldots} = \frac{\Im . p\,q\,r\,s\,t\ldots}{p\,q\,r\,s\,t\ldots}$

ou $\frac{\Im Z}{Z} + \frac{\Im p'}{p'} + \frac{\Im q'}{q'} + \ldots = \frac{\Im p}{p} + \frac{\Im q}{q} + \frac{\Im r}{r} + \ldots$

& par conſéquent

$$\Im Z = Z\left[\frac{\Im p}{p} + \frac{\Im q}{q} + \ldots - \left(\frac{\Im p'}{p'} + \frac{\Im q'}{q} + \ldots\right)\right].$$

Il ſera facile maintenant de tirer de ce réſultat l'exponentielle de la fraction propoſée.

§ 40.

Ayant démontré (§ 24. No. 7) l'expreſſion $\Im . \lg. f = \frac{\Im f}{f}$, indépendamment des propoſitions aux § 37, 38, 39, nous en tirons de nouvelles démonſtrations pour les dits théorèmes.

Car $F = UZ$; donne lg. $F =$ lg. $U +$ lg. Z;

donc $\frac{\Im F}{F} = \frac{\Im U}{U} + \frac{\Im Z}{Z}$, ou $\Im . UZ = Z\Im U + U\Im Z$

comme au § 37.

De même $Z = \frac{x}{y}$; donne lg. $z =$ lg. $x -$ lg. y;

donc $\frac{\Im z}{z} = \frac{\Im x}{x} - \frac{\Im y}{y}$ (§ 24. No. 7); ou $\Im . \frac{x}{y} = \frac{y\Im x - x\Im y}{y^2}$

comme au § 39.

ces dernières démonſtrations ont l'avantage d'être juſtes, même quand U, Z, x & y ſont des variables ou des fonctions indépendantes l'une de l'autre.

Ayant $F = f^n$, nous aurons lg $F = n$ lg. f;

donc $\frac{\Im F}{F} = n\frac{\Im f}{f}$ (§ 24. No. 7) ainſi $\Im F = n\frac{F.\Im f}{f}$

ou $\Im . f^n = nf^{n-1}\Im f$ comme au § 38.

§ 41.

f étant une fonction de la variable x, & ayant $F =$ ſin f, nous aurons en ſuppoſant que x ſe change en $x + \Delta x$

1) $F + \frac{\Im F}{x}\Delta x + \mathfrak{P}\Delta x^2 =$ ſin $\left(f + \frac{\Im f}{x}\Delta x + \Omega\Delta x^2\right)$ (§ 19.)

$=$ ſin f. coſ $\left(\frac{\Im f}{x}\Delta x + \Omega\Delta x^2\right)$

$+$ coſ f. ſin $\left(\frac{\Im f}{x}\Delta x + \Omega\Delta x^2\right)$ (ſelon la trigonométrie)

mais on oſe ſuppoſer ſin $f = \overset{1}{A}f + \overset{2}{A}f^2 + \ldots$ (§ 27.)

2) donc ſin $\left(\frac{\Im f}{x}\Delta x + \Omega\Delta x^2\right) = \overset{1}{A}\left(\frac{\Im f}{x}\Delta x + \Omega\Delta x^2\right)$

$+ \overset{2}{A}\left(\frac{\Im f}{x}\Delta x + \Omega\Delta x^2\right)^2 + \ldots$

$= \overset{1}{A} . \frac{\Im f}{x}\Delta x + \Omega'\Delta x^2$; ainſi ſin$^2\left(\frac{\Im f}{x}\Delta x + \Omega\Delta x^2\right)$

$= \Omega''\Delta x^2$

ſelon la trigonométrie

3) $\text{cof}\left(\frac{\Im f}{x}\Delta x + \mathfrak{Q}\Delta x^2\right) = (1 - \mathfrak{Q}''\Delta x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{Q}''\Delta x^2$

ſubſtituant les valeurs de No. 2 & 3 dans No. 1, nous aurons

$$F + \frac{\Im f}{x}\Delta x + \mathfrak{P}\Delta x^2 = \text{ſin } f - \text{ſin } f\,\mathfrak{Q}''\Delta x^2$$
$$+ \text{cof } f\,\overset{1}{A}\,.\,\frac{\Im f}{x}\Delta x + \text{cof } f\,.\,\mathfrak{Q}'\Delta x^2$$
$$= \text{ſin } f + \text{cof } f\,\overset{1}{A}\,.\,\frac{\Im f}{x}\Delta x + \mathfrak{P}'\Delta x^2$$

donc 4) $\Im F = \Im\,.\,\text{ſin } f = \overset{1}{A}\,.\,\text{cof } f\,.\,\Im f.$

La trigonométrie nous apprend que $(\text{cof } f)^2 = 1 - (\text{ſin } f)^2$; donc $2\,\text{cof } f\,.\,\Im\,.\,\text{cof } f = -2\,\text{ſin } f\,.\,\Im\,.\,\text{ſin } f$ (§ 38.)

$$= -2\,\text{ſin } f\,.\,\overset{1}{A}\,\text{cof } f\,.\,\Im f \quad \text{(No. 4)}$$

ainſi 5) $\Im\,.\,\text{cof } f = -\overset{1}{A}\,.\,\text{ſin } f\,.\,\Im f.$ Soit $f = x$, c'eſt-à-dire une variable abſolue, nous aurons

$\Im\,\text{ſin } x = \overset{1}{A}x\,\text{cof } x$ & $\Im\,\text{cof } x = -\overset{1}{A}x\,\text{ſin } x$ comme au § 27.

§ 42.

Il n'y aura plus de difficulté à tirer par les principes précédens, les expreſſions ſuivantes

1) $\Im\,\text{ſin } v\,.\,f = \text{ſin } f\,.\,\Im f$
2) $\Im\,\text{cof } v\,.\,f = -\text{cof } f\,.\,\Im f$
3) $\Im\,\text{tg.}\,f = \text{ſec.}^2 f\,.\,\Im f$
4) $\Im\,\text{cotg.}\,f = -\text{coſec.}^2 f\,.\,\Im f$
5) $\Im\,\text{ſec.}\,f = \text{tg.}\,f\,.\,\text{ſec.}\,f\,.\,\Im f$
6) $\Im\,\text{coſec.}\,f = -\text{cotg.}\,f\,.\,\text{coſec.}\,f\,.\,\Im f$

Soit $f = \text{arc ſin } \Phi$, ainſi $\Phi = \text{ſin } f$; nous trouverons

8) $\Im\,\text{arc ſin } \Phi = \frac{\Im\Phi}{\sqrt{(1-\Phi^2)}}$
9) $\Im\,\text{arc cof } \Phi = \frac{-\Im\Phi}{\sqrt{(1-\Phi^2)}}$

10) $\mathfrak{Z}$ arc $\sin v\,\varphi = \dfrac{\mathfrak{Z}\varphi}{V(2\varphi-\varphi^2)}$

11) $\mathfrak{Z}$ arc $\cos v\,\varphi = \dfrac{-\mathfrak{Z}\varphi}{V(2\varphi-\varphi^2)}$

12) $\mathfrak{Z}$ arc tg. $\varphi = \dfrac{\mathfrak{Z}\varphi}{1+\varphi^2}$

13) $\mathfrak{Z}$ arc cotg. $\varphi = \dfrac{-\mathfrak{Z}\varphi}{1+\varphi^2}$

14) $\mathfrak{Z}$ arc sec. $\varphi = \dfrac{\mathfrak{Z}\varphi}{\varphi V(\varphi^2-1)}$

15) $\mathfrak{Z}$ arc cosec. $\varphi = \dfrac{-\mathfrak{Z}\varphi}{\varphi V(\varphi^2-1)}$.

§ 43.

Des exponentielles secondes, troisièmes &c.

Soit f, une fonction de la variable absolue x, le premier quotient exponentiel sera $\dfrac{\mathfrak{Z}f}{\mathfrak{Z}x}$, & par analogie

le second quotient exponentiel . . . $\dfrac{\mathfrak{Z}.\frac{\mathfrak{Z}f}{\mathfrak{Z}x}}{\mathfrak{Z}x}$. Regardant l'exponentielle de la variable absolue x, c'est-à-dire $\mathfrak{Z}x$ comme invariable, nous pouvons simplifier l'expression, en adoptant la notation suivante

$$\frac{\mathfrak{Z}.\frac{\mathfrak{Z}f}{\mathfrak{Z}x}}{\mathfrak{Z}x} = \frac{\mathfrak{Z}^2 f}{\mathfrak{Z}x^2}$$

De là le quotient de l'exponentielle troisième $\dfrac{\mathfrak{Z}.\frac{\mathfrak{Z}^2 f}{\mathfrak{Z}x^2}}{\mathfrak{Z}x} = \dfrac{\mathfrak{Z}^3 f}{\mathfrak{Z}x^3}$

En général $\dfrac{\mathfrak{Z}.\frac{\mathfrak{Z}^{r-1} f}{\mathfrak{Z}x^{r-1}}}{\mathfrak{Z}x} = \dfrac{\mathfrak{Z}^r f}{\mathfrak{Z}x^r}$

§ 44.

Il me sera permis de le représenter encore d'une autre manière.

J'entends par $\mathfrak{Z} f$ l'exponentielle première de la fonction f
- - $\mathfrak{Z}^2 f$ - seconde - -
- - $\mathfrak{Z}^3 f$ - troiſième - -

- - $\mathfrak{Z}^r f$ - r tième - -

c'eſt-à-dire $\mathfrak{Z} . (\mathfrak{Z} f) = \mathfrak{Z}^2 f$
$\mathfrak{Z} . (\mathfrak{Z}^2 f) = \mathfrak{Z}^3 f$
$\mathfrak{Z} . (\mathfrak{Z}^3 f) = \mathfrak{Z}^4 f$

$\mathfrak{Z} . (\mathfrak{Z}^{r-1} f) = \mathfrak{Z}^r f.$

Si donc $\mathfrak{Z} f = P \mathfrak{Z} x$ & $\mathfrak{Z} . P = Q \mathfrak{Z} x$, on aura
$\mathfrak{Z}^2 f = Q \mathfrak{Z} x^2$ & ſin $\mathfrak{Z} Q = R . \mathfrak{Z} x$, on aura
$\mathfrak{Z}^3 f = R \mathfrak{Z} x^3$.

En général pour $\mathfrak{Z}^{r-1} f = Y \mathfrak{Z} x^{r-1}$, & $\mathfrak{Z} . Y = Z \mathfrak{Z} x$, on aura
$\mathfrak{Z}^r f = Z . \mathfrak{Z} x^r$.

De là ſuit immédiatement

$$P = \frac{\mathfrak{Z} f}{\mathfrak{Z} x}$$

donc $\mathfrak{Z} . P = \mathfrak{Z} . \frac{\mathfrak{Z} f}{\mathfrak{Z} x}$

ou $Q \mathfrak{Z} x = \mathfrak{Z} . \frac{\mathfrak{Z} f}{\mathfrak{Z} x}$

$$Q = \frac{\mathfrak{Z} . \frac{\mathfrak{Z} f}{\mathfrak{Z} x}}{\mathfrak{Z} x}$$

mais $Q \mathfrak{Z} x^2 = \mathfrak{Z}^2 f$

donc $Q = \frac{\mathfrak{Z}^2 f}{\mathfrak{Z} x^2}$

par conſéquent $\frac{\mathfrak{Z} . \frac{\mathfrak{Z} f}{\mathfrak{Z} x}}{\mathfrak{Z} x} = \frac{\mathfrak{Z}^2 f}{\mathfrak{Z} x^2}$.

& ainſi de ſuite comme ci-deſſus.

Voici une petite application. Soit n un nombre entier & x une variable abſolue

$$\frac{\mathfrak{d}.x^n}{\mathfrak{d}x} = nx^{n-1}$$

$$\frac{\mathfrak{d}^2.x^n}{\mathfrak{d}x^2} = n.n-1.x^{n-2}$$

$$\frac{\mathfrak{d}^3.x^n}{\mathfrak{d}x^3} = n.n-1.n-2.x^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\mathfrak{d}^r.x^n}{\mathfrak{d}x^r} = n.n-1\ldots(n-(r-1))\,x^{n-r}$$

$$\& \quad \frac{\mathfrak{d}^n.x^n}{\mathfrak{d}x^n} = n.n-1.n-2\ldots 2.1$$

c'eſt-à-dire une quantité conſtante.

§ 45.

Application du calcul d'expoſition à trouver la valeur qu'une fonction propoſée doit atteindre, ſi une quantité variable y eſt augmentée ou diminuée d'une quantité donnée.

Problème. Soit propoſée une fonction y de x, dans laquelle x augmenté d'une quantité donnée Δx; déterminer la valeur Y, que la fonction en doit atteindre.

Solution. La forme générale de chaque fonction de y étant

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots$$

On aura

$$Y = A(x \pm \Delta x)^\alpha + B(x \pm \Delta x)^\beta + C(x \pm \Delta x)^\gamma + \ldots$$

Si on développe chaque terme ſelon le théorème du binome, on aura

$$Y = Ax^\alpha \pm \frac{A\alpha}{1} x^{\alpha-1}\Delta x + \frac{A\alpha(\alpha-1)}{1.2} x^{\alpha-2}\Delta x^2 \pm \frac{A\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1.2.3} x^{\alpha-3}\Delta x^3 + \ldots$$

$$Bx^\beta \pm \frac{B\beta}{1}.x^{\beta-1}\Delta x + \frac{B.\beta(\beta-1)}{1.2} x^{\beta-2}\Delta x^2 \pm \frac{B.\beta(\beta-1).(\beta-2)}{1.2.3} x^{\beta-3}\Delta x^3 + \ldots$$

$$Cx^\delta \pm \frac{C\delta}{1} x^{\delta-1}\,\Delta x + \frac{C\delta(\delta-1)}{1.2} x^{\delta-2}\,\Delta x^2$$
$$\pm \frac{C.\delta(\delta-1)(\delta-2)}{1.2.3} x^{\delta-3}\,\Delta x^3 + \ldots$$

$$\begin{array}{cccccccc} + & - & - & - & - & - & - & - \\ + & - & - & - & - & - & - & - \\ + & - & - & - & - & - & - & - \\ + & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

On aperçoit d'abord que la première ſérie verticale eſt la fonction propoſée même: mais pour juger la valeur de chacune des ſuivantes, j'appellerai dans cette recherche la première ſérie verticale, celle où ſe trouve la première puiſſance de Δx, & alors il eſt évident que la r tième ſérie verticale, ſera

$$\pm \frac{A\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-r+1)}{1.2.3\ldots r} x^{\alpha-r}\,\Delta x^r$$
$$\pm \frac{B\beta(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-r+1)}{1.2.3\ldots r} x^{\beta-r}\,\Delta x^r$$
$$\pm \frac{C\delta(\delta-1)(\delta-2)\ldots(\delta-r+1)}{1.2.3\ldots r} x^{\delta-r}\,\Delta x^r$$

$$\begin{array}{cccccccc} - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{array}$$

Mais on trouve ſuivant le § précédent

$$\frac{\partial^r . Ax^\alpha}{\partial x^r} = A\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-r+1)x^{\alpha-r}$$
$$\frac{\partial^r . Bx^\beta}{\partial x^r} = B\beta(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-r+1)x^{\beta-r}$$
$$\frac{\partial^r . Cx^\delta}{\partial x^r} = C\delta(\delta-1)(\delta-2)\ldots(\delta-r+1)x^{\delta-r}$$
&c. &c.

Ainſi, on trouvera la r tième ſérie verticale, en prenant la ſomme de

$$\partial^r . Ax^\alpha + \partial^r . Bx^\beta + \partial^r . Cx^\delta + \ldots$$

multipliée par $\frac{\Delta x^r}{1.2.3.4\ldots r\,\partial x^r}$

c'eſt-à-dire

$$= \frac{\mathfrak{D}^r(y).\Delta x^r}{1.2.3.4\ldots r\,\mathfrak{D}x^r}.$$

Par cette formule générale on trouve facilement, la première, la ſeconde, la troiſième ſerie &c., en ſubſtituant $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$ &c. . . . Par là on aura

$$Y = y \pm \frac{\mathfrak{D}.y}{\mathfrak{D}x}.\frac{\Delta x}{1} + \frac{\mathfrak{D}^2.y}{\mathfrak{D}x^2}.\frac{\Delta x^2}{1.2} \pm \frac{\mathfrak{D}^3.y}{\mathfrak{D}x^3}.\frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots$$
$$\pm \frac{\mathfrak{D}^r.y}{\mathfrak{D}x^r}.\frac{\Delta x^r}{1.2.3\ldots r} \pm \ldots$$

Cette formule, qui ſert en quelque ſorte de baſe au calcul d'expoſition & ſur laquelle repoſe presqu'entièrement la théorie des ſuites, eſt connue en analyſe ſous le nom de *Théorème de Taylor*, parce que c'eſt à ce géomètre anglois qu'on en doit la découverte. Mais il me ſemble, que la manière donc j'ai trouvé le théorème ci-deſſus, par les principes de mon calcul exponentiel, ne laiſſent plus rien à déſirer ſur ſon évidence. A la rigueur il eſt vrai que ma formule n'a que la forme de celle de *Taylor*, mais elle donne par un procédé auſſi facile & court, les mêmes réſultats dans mon nouveau calcul, que l'autre dans le calcul différentiel. Savoir: elle donne la différence finie Δy par une ſérie qui procède ſuivant les puiſſances de Δx.

§ 46.

Les quotiens exponentiels $\frac{\mathfrak{D}.y}{\mathfrak{D}x}$, $\frac{\mathfrak{D}^2.y}{\mathfrak{D}x^2}$, $\frac{\mathfrak{D}^3.y}{\mathfrak{D}x^3}$ &c. ſont des quantités déterminées & dépendantes de la fonction y, qu'on ſera toujours en état de donner entièrement exactes pour chaque fonction y de x. Si la fonction y eſt de nature qu'elle donne pour un certain quotient exponentiel $\frac{\mathfrak{D}^r.y}{\mathfrak{D}x^r} = 0$; alors il eſt ſûr que tous les quotiens exponentiels ſupérieurs ſont auſſi zéro, c'eſt-à-dire

$$\frac{\mathfrak{D}^{r+1}.y}{\mathfrak{D}x^{r+1}} = 0;\quad \frac{\mathfrak{D}^{r+2}.y}{\mathfrak{D}x^{r+2}} = 0.\ \&c.$$

On

On voit auſſi qu'on peut prendre pour la *quantité variable* x, & pour la *quantité finie* Δx, tout ce qu'on veut; même on peut regarder Δx comme variable; car $\frac{\partial . y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 . y}{\partial x^2}$ &c. ſont indépendans de Δx. La ſérie pour Y converge d'autant plus que Δx ſera petit.

§ 47.

Différentes formes de ce théorème.

Si $y = f(x)$ &

$z = f(x \pm \Delta x)$

alors $z = y \pm \frac{\partial . y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 . y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} \pm \frac{\partial^3 . y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots$

$$f(x \pm \Delta x) = f(x) \pm \frac{\partial . f(x)}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 . f(x)}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} \pm \frac{\partial^3 . f(x)}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Si on ſuppoſe $\Delta x = x$, & x diminuant de Δx, on aura

$$Y = y - \frac{\partial y . x}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{x^2}{1.2} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Comme il y a des fonctions y de x qui pour $x = 0$ ſont auſſi zéro, & d'autres fonctions qui donnent pour x des valeurs A, la dernière forme donnera ou *zéro* ou A.

Si on fait $\Delta x = a - x$, on aura

$$y + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{a-x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{(a-x)^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{(a-x)^3}{1.2.3} + \ldots = A$$

C'eſt une forme générale qui donne pour $x = a$ la valeur A.

Je ne m'arrête pas à faire des applications au développement des fonctions en ſérie. Je me contente d'avoir prouvé que tout cela eſt en mon pouvoir.

Regardant ∂x comme conſtante & finie, & prenant l'expoſé comme à l'ordinaire, on aura:

$$y \pm \Delta y = y \pm \frac{\partial y}{1} + \frac{\partial^2 y}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{1.2.3} + \ldots$$

§ 48.

Soit $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}, \overset{3}{y} \ldots$ une ſérie dont le terme général ſera

$$\overset{n}{y} = 1 \cdot y + {}^n\mathfrak{A}\,\Delta' y + {}^n\mathfrak{B}\,\Delta^2 y \ldots + {}^n\mathfrak{N}\,\Delta^n y$$

${}^n\mathfrak{A}$, ${}^n\mathfrak{B}$, $\ldots$ ${}^n\mathfrak{N}$ étant les coëfficiens du binome de la n tième puiſſance, c'eſt-à-dire le premier, le ſecond $\ldots$ le n tième coëfficient.

De plus, ſoit $\overset{n}{y}$ une fonction de

x, & ſi x ſe change en $x \pm 1\,\Delta x$; $x \pm 2\,\Delta x$; $x \pm 3\,\Delta x$; $\ldots$ $x \pm n\Delta x$

y ſe change en $\overset{1}{y}$; $\overset{2}{y}$; $\overset{3}{y}$; $\overset{n}{y}$.

Nous aurons

$$\overset{1}{y} = y \pm \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} \pm \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\overset{2}{y} = y \pm \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{2\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{2^2 \Delta x^2}{1.2} \pm \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{2^3 \Delta x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\overset{3}{y} = y \pm \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{3\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{3^2 \Delta x^2}{1.2} \pm \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{3^3 \Delta x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\overset{n}{y} = y \pm \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{n\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{(n\Delta x)^2}{1.2} \pm \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \cdot \frac{(n\Delta x)^3}{1.2.3} + \ldots$$

$= f(x \pm n\Delta x)$; de là on tire facilement les différences $\Delta^1 y$, $\Delta^2 y, \ldots \Delta^r y \ldots$

§ 49.

I) Y étant $= f^m(x)$, on aura

$$f^m(x \pm \Delta x) = f^m(x) \pm \frac{\partial \cdot f^m(x)}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 \cdot f^m(x)}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \ldots$$

II) Soit $y = f^m(x) \cdot \varphi^n(x)$, on aura

$$f^m(x \pm \Delta x) \cdot \varphi^n(x \pm \Delta x) = f^n(x) \cdot \varphi^n(x) \pm \frac{\partial \cdot f^m(x) \cdot \varphi^n(x)}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 \cdot f^m(x) \cdot \varphi^n(x)}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \ldots$$

III) Soit $y = \frac{F^m(x)}{f^n(x)}$; on aura

$$\frac{F^m(x \pm \Delta x)}{f^n(x \pm \Delta x)} = \frac{F^m(x)}{f^n(x)} \pm \frac{\partial \cdot \frac{F^m(x)}{f^n(x)}}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{1} + \frac{\partial^2 \cdot \frac{F^m(x)}{f^n(x)}}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{1.2} + \ldots$$

C'eſt le théorème de *Taylor* rapporté aux *puiſſances* & à des *produits* & des *quotiens* de telles puiſſances, pour des (n) oppoſés II) & III) dépendent l'un de l'autre.

§ 50.

Pour le développement des fonctions en ſérie, on peut encore donner au théorème de Taylor une forme plus commode dans la pratique. Savoir ſi $z = f(x + \Delta x)$, & on fait d'abord $x = 0$, & après $\Delta x = x$, alors z ſe change en $f(0 + x) = f(x)$ ou y. Faites cela de même pour z dans les termes à développer dans l'équation, & vous aurez la valeur de z réduit à la valeur de y. De plus

pour $y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \ldots$

mettez $\Phi, A, B, C \ldots$

où $\Phi, A, B, C \ldots$ ſignifient *les valeurs réduites* tel qu'on l'a ſuppoſé en haut, on aura

$$y = \Phi + \frac{A}{1} x + \frac{B}{1.2} x^2 + \frac{C}{1.2.3} x^3 + \ldots$$

On voit d'abord que (y) eſt ici la fonction de x à *développer, telle qu'on l'a donnée.* Les termes à droite donnent ſon développement ſuivant les puiſſances de x, au moyen des *valeurs réduites* des coëfficiens $\Phi, A, B, C \ldots$.

Je dois pourtant remarquer qu'on ſuppoſe que y ſoit une telle fonction, dont le développement peut procéder ſuivant les puiſſances naturelles de x, quoique quelques-uns des coëfficiens $\Phi, A, B, C \ldots$ puiſſent être zéro.

§ 51.

Problème.

Développer la valeur de $(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots)^m$ en une ſérie ſuivant les puiſſances de x.

Solution.

Soit $y = (\alpha + X)^m$ ou $X = \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots$
On trouvera par la formule du No. précédent.

$$\Phi = \alpha^m$$
$$A = m\alpha^{m-1}\beta;$$
$$B = m \cdot m - 1 \cdot \alpha^{m-2}\beta^2$$
&c.

ainſi

$$(\alpha+X)^m = \alpha^m + {}^m\mathfrak{A}\alpha^{m-1}\beta x + ({}^m\mathfrak{A}\alpha^{m-1}\gamma + {}^m\mathfrak{B}\alpha^{m-2}\beta^2)x^2 + ({}^m\mathfrak{A}\alpha^{m-1}\delta + 2\,{}^m\mathfrak{B}\alpha^{m-2}\beta\gamma + {}^m\mathfrak{C}\alpha^{m-3}\beta^3)x^3$$
&c.

C'eſt donc une autre méthode que celle du § 21.

Tout ce que je viens de dire ſur ce théorème intéreſſant & remarquable fait voir la fécondité de mon nouveau calcul. Nous généraliſerons dans la ſuite les méthodes. Je me tourne à préſent d'un autre côté non moins intéreſſant que le précédent.

Application du calcul d'expoſition dans la haute Géométrie.

§ 52.

Des tangentes, des ſous-tangentes, des normales, des ſous-normales, des ſécantes & ſous-ſécantes.

Soit x l'abciſſe, y l'ordinate rectangulaire d'une courbe quelconque. Il eſt connu que

la ſous-ſécante eſt $=$ à $\frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot y$.

Mais, comme x peut être regardé comme une fonction de y, on aura ſuivant le théorème de Taylor, la tangente de l'angle que fait la ſécante avec l'ordinate

$$= \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\Delta y}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{1.2} \ldots}{\Delta y} = \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \cdot \frac{\Delta y}{1.2} + \ldots$$

Pour le point de la tangente Δx auſſi bien que Δy doit être réellement zéro

$$\text{donc la ſous-tangente} = y \cdot \frac{\Im x}{\Im y}.$$

Un autre raiſonnement nous donne ſous-séc. = ſous-tg. + complément, ce complément eſt évidemment une fonction de Δy, l'équation peut donc être exprimée par

$$\text{ſous-tg.} + \mathfrak{P}\Delta y = \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot y = \left(\frac{\Im x}{\Im y} + \Omega \Delta y\right) y$$

$$\text{donc ſous-tg.} = y \frac{\Im x}{\Im y}.$$

Il ſuit aiſément

$$\text{la tangente} = y \sqrt{\left(1 + \frac{\Im x^2}{\Im y^2}\right)}$$

$$\text{la ſous-normale} = y \cdot \frac{\Im y}{\Im x}$$

$$\text{la normale} = y \sqrt{\left(1 + \frac{\Im y^2}{\Im x^2}\right)}$$

Soit l'équation de la parabole d'un genre quelconque

$$y^m = a^{m-n} x^n$$

on aura $m y^{m-1} \Im y = n a^{m-n} x^{n-1} \Im x$

donc la ſous-tangente $= \frac{\Im x}{\Im y} \cdot y = \frac{m y^{m-1}}{n a^{m-n} x^{n-1}} \cdot y = \frac{m y^m}{n a^{m-n} \cdot x^{n-1}}$

$$= \frac{m a^{m-n} x^n}{n a^{m-n} x^{n-1}} = \frac{m}{n} \cdot x.$$

Remarque. Toutes les fois que x eſt une fonction de y, on peut regarder x comme abciſſe, & y comme l'ordinate rectangulaire d'une courbe & $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ comme la tangente de l'angle fait par la sécante & l'ordinate, donc pour $\Delta x = 0$; Δy doit auſſi être zéro & la tangente de l'angle que fait la tangente de la courbe avec l'ordinate

$= \frac{\Im x}{\Im y}$ eſt dans ce cas toujours le réſultat

donc $\frac{\Delta x^2}{\Delta y^2}$ (eſt dans le cas de $\Delta x = 0$) $\frac{\Im x^2}{\Im y^2}$

en général $\frac{\Delta x^n}{\Delta y^n}$ (eſt dans le cas de $\Delta x = 0$) $\frac{\Im x^n}{\Im y^n}$.

§ 53.

Rectification.

Nous partirons de ce principe adopté par tous les géomètres: De deux lignes courbes ou compoſées de droites qui ont la concavité tournée du même côté & mêmes extrémités, celle qui enveloppe l'autre eſt la plus longue.

Soit s l'arc en queſtion. La corde étant toujours plus petite que ſon arc, & ſa tangente toujours plus grande que lui, (V. le calcul différentiel par M. *de Tempelhoff* pag. 364) & comme l'arc eſt une fonction de x & de y il ſuit

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = (\text{corde})^2 \quad \& \quad \Delta x^2 + (\Delta y + e)^2 = (\text{tg.})^2$$

ainſi . $\Delta s^2 > \Delta x^2 + \Delta y^2$

& $\Delta s^2 < \Delta x^2 + (\Delta y + e)^2$

donc $\frac{\Delta s^2}{\Delta x^2} > 1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}$

de même $\frac{\Delta s^2}{\Delta x^2} < 1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + \left(\frac{2\Delta y + e}{\Delta x^2}\right) . e$

} cela eſt vrai, la valeur de (e) ſoit auſſi petite qu'on veut.

Si on développe ſuivant le théorème de Taylor les Δs^2 & Δy^2 en les regardant comme des fonctions de x en obſervant qu'on n'a beſoin que de développer le premier terme, on aura

$$\frac{\partial s^2}{\partial x^2} + \mathfrak{P}\Delta x > 1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \mathfrak{Q}\Delta x$$

$$< 1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \mathfrak{Q}\Delta x + Q.e \ (\S 45.), \text{ donc ſelon } (\S 15.)$$

$$\frac{\partial s^2}{\partial x^2} = 1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}$$

ou $$\partial s = V(\partial x^2 + \partial y^2)$$

$$= \partial x \, V\left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right).$$

§ 54.

Quadrature.

La ſurface ſoit z elle eſt ſûrement une fonction de x, y nous aurons. $\Delta z > y\Delta x$

$$< (y + \Delta y)\,\Delta x$$

ou $\left.\begin{array}{l} \frac{\Delta z}{\Delta x} > y \\ \quad < y + \Delta y \end{array}\right\}$ donc $\begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} + \mathfrak{P}\Delta x > y \\ \qquad\qquad < y + \mathfrak{Q}\Delta x \end{array}$ (§ 45.)

ou $\begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} > y - \mathfrak{P}\Delta x \\ \quad < y + \mathfrak{Q}\Delta x \end{array}$

donc $\frac{\partial z}{\partial x} = y$ (§ 15.)

par conſéquent $\partial z = y\,\partial x$.

§ 55.

Cubature des corps engendrés, par la révolution, autour de l'axe des abciſſes.

Soit u l'eſpace du ſolide, qui eſt évidemment une fonction de x, y

on aura $\begin{array}{l} \Delta u > y^2 \Delta x \,.\, \pi \\ \quad < (y + \Delta y)^2 \Delta x \,.\, \pi \end{array}$

ou $\begin{array}{l} \frac{\Delta u}{\Delta x} > y^2 \,.\, \pi \\ \quad < (y + \Delta y)^2 = (y^2 + \mathfrak{P}\Delta y) \quad (\S\ 19.) \end{array}$

Ceci eſt effectivement un cas tout-à-fait le même que § 54.

ainſi $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 \pi$ (§ 15.) donc $\partial u = y^2 \pi\, \partial x$.

§ 56.

Des ſurfaces de révolution.

Soit P l'aire de la ſurface ſphérique, nous aurons

$$\Delta P > (2y + \Delta y)\pi \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

& $\Delta P < \pi[(2y + \Delta y + e)\sqrt{(\Delta x^2 + (\Delta y + e)^2)} + (2y + 2\Delta y + e)e]$ (§ 53.)

mais $\sqrt{[\Delta x^2 + (\Delta y + e)^2]} : \Delta x =$ tg. : ſubtg.

ainſi $\sqrt{[\Delta x^2 + (\Delta y + e)^2]} = \Delta x \sqrt{\left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)}$ (§ 52.)

de même $\Delta y + e : \Delta x = y$: ſubtg.

ainſi $e = \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x - \Delta y = \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x - \mathfrak{P}\Delta x^2$ (§ 45.)

& comme $\Delta y = \frac{\Im y}{\Im x}\Delta x + \mathfrak{P}'\Delta x^2$

on aura $V(\Delta x^2 + \Delta y^2) = \Delta x\, V\left(1 + \frac{\Im y^2}{\Im x^2}\right) + \Omega\Delta x^2$

donc $\frac{\Delta P}{\Delta x} > 2\pi y\, V\left(1 + \frac{\Im y^2}{\Im x^2}\right) + \mathfrak{P}'\Delta x$

& en même temps $\frac{\Delta P}{\Delta x} < 2\pi y\, V\left(1 + \frac{\Im y^2}{\Im x^2}\right) + \Omega'\Delta x$

mais P eſt une fonction de l'abciſſe x

donc $\Delta P = \frac{\Im P}{\Im x}.\Delta x + \mathfrak{P}''\Delta x^2$ (§ 45.)

ainſi $\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{\Im P}{\Im x} + \mathfrak{P}''\Delta x$

& $\frac{\Im P}{\Im x} > 2\pi y\, V\left(1 + \frac{\Im y^2}{\Im x^2}\right) + (\mathfrak{P}' - \mathfrak{P}'')\Delta x$

& $\frac{\Im P}{\Im x} < 2\pi y\, V\left(1 + \frac{\Im y^2}{\Im x^2}\right) + (\Omega' - \mathfrak{P}'')\Delta x$

donc $\frac{\Im P}{\Im x} = 2\pi y\, V\left(1 + \frac{\Im y^2}{\Im x^2}\right)$ (§ 15.)

ou $\Im P = 2\pi y.\Im x\, V\left(1 + \frac{\Im y^2}{\Im x^2}\right) = 2\pi y\, V(\Im x^2 + \Im y^2)$

$= 2\pi y.\Im s$ (§ 53.)

Fin du premier mémoire.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE

DES

SCIENCES

ET

BELLES-LETTRES.

CLASSE

DE PHILOSOPHIE SPÉCULATIVE.

Digitized by Google

RÉFLEXIONS

ſur les Sens en général, et particulièrement ſur les Organes du Sens intime.

PAR M. DE CASTILLON *).

En feuilletant l'autre jour le grand Vocabulaire françois, je tombai par haſard ſur l'article *Sens*, & j'y lus ces mots:

„On ne compte ordinairement que cinq ſens; mais ſi l'on veut y „faire attention, on reconnoîtra ſans peine qu'il faut en admettre un plus „grand nombre. La faim & la ſoif ſont des ſenſations qui ont chacune „leur organe. La douleur a le ſien répandu dans toutes les parties qui „ont de la ſenſibilité. Cependant on ne met au nombre des ſens que le „tact, le goût, l'odorat, la vue, l'ouïe."

Cette propoſition, que non ſeulement il faut admettre plus de cinq ſens, mais encore qu'avec de l'attention on le reconnoît ſans peine, & ſurtout celle que la faim & la ſoif ont des organes particuliers, ces propoſitions, dis-je, me parurent au premier coup d'oeil mal-ſonnantes & presque hérétiques en philoſophie.

Si la propoſition que la faim & la ſoif ſont des ſens particuliers me choqua, ce fut bien pis quand ouvrant la partie métaphyſique de l'Encyclopédie par ordre de matières, j'y lus à l'article *Sens* ce qui ſuit:

*) Lu à l'Académie le jeudi 15 février 1798.

„Sens eſt une faculté de l'âme, par laquelle elle aperçoit les ob„jets extérieurs, moyennant quelque action ou impreſſion faite en cer„taines parties du corps, que l'on appelle les organes des ſens, qui com„muniquent cette impreſſion au cerveau."

„Quelques-uns prennent le mot Sens dans une plus grande étendue; „ils le définiſſent une faculté par laquelle l'âme aperçoit les idées ou les „images des objets, ſoit qu'elles lui viennent du dehors par l'impreſſion „des objets mêmes, ſoit qu'elles ſoient occaſionées par quelque action „de l'âme ſur elle-même."

„En conſidérant ſous ce point de vue le mot Sens, on en doit dis„tinguer de deux eſpèces, d'extérieurs & d'intérieurs, qui correſpondent „aux deux différentes manières dont les images des objets que nous „apercevons ſont occaſionées & préſentées à l'eſprit, ſoit immédiate„ment du dehors, c'eſt-à-dire par les cinq ſens extérieurs, l'ouïe, „la vue, le goût, le tact & l'odorat; ſoit immédiatement du dedans, „c'eſt-à-dire par les ſens intérieurs, tels que l'imagination, la mémoire, „l'attention &c., auxquels on peut joindre la faim, la ſoif, la dou„leur &c."

Comment! me dis-je à moi-même: non ſeulement la faim, la ſoif & la douleur ſont des ſens, mais encore l'imagination, la mémoire & l'attention! Et ſi la faim, la ſoif & la douleur ſont des ſens, apparemment le ſommeil & le plaiſir en ſont auſſi, & ſont compris ſous l'&c. qui termine cette énumération de ſens internes, dont j'avoue que je ne m'étois pas douté encore.

J'étois en train de feuilleter, & ce qui eſt dit au commencement de cet article de l'Encyclopédie, que „les organes des ſens communiquent l'impreſſion des objets extérieurs au cerveau," dirigeant mon inclination feuilletante, je cherchai l'article *Cerveau* dans le grand Vocabulaire françois, où je trouvai ces mots:

„La plupart des philoſophes regardent le cerveau comme le ſiége „des ſenſations; mais M. de Buffon, fait pour créer, ſans s'écarter de la „vraiſemblance ni des probabilités, eſt d'un avis bien différent, &

„place ce ſiége dans le diaphragme partie nerveuſe ſur laquelle portent „les impreſſions de la douleur & du plaiſir."

En liſant ce paſſage il me parut que M. de Buffon devoit plutôt conclure que le diaphragme eſt dans l'homme l'organe de la douleur & du plaiſir, en un mot du ſentiment, & réſumant dans ma tête tout ce que je venois de lire, je me fis à moi-même ces deux queſtions:

Faut-il effectivement reconnoître plus de cinq ſens externes & un ſens intime?

Le cerveau eſt-il bien le ſiége excluſif des ſenſations, ou ſeroit-ce le diaphragme, comme le prétend Buffon?

J'ai cru devoir faire précéder les recherches que je vais ſoumettre au jugement de cette ſavante aſſemblée, d'un expoſé hiſtorique de la manière dont mon esprit y fut conduit; peut-être un recueil d'expoſés ſemblables fourniroit-il à un homme de génie un fil capable de le guider dans le dédale qu'offrent les écarts de l'esprit humain, ſurtout en métaphyſique.

§ 1. Deux ſens différens ſuppoſent manifeſtement deux ſenſations intrinſéquement différentes; car deux ſenſations abſolument ſemblables, & qui, pour parler le langage de l'école, ne ſeroient que numériquement différentes, ne ſeroient qu'une même ſenſation répétée, & par conſéquent ne pourroient pas provenir de deux ſens différens.

§ 2. Mais il ne ſuffit pas que deux ſenſations ſoient différentes autrement que numériquement, pour qu'elles proviennent de deux ſens différens; car la ſenſation du froid n'eſt pas celle de la chaleur répétée, la ſenſation du ſec n'eſt pas celle de l'humide répétée, & cependant elles ſont toutes quatre du reſſort du toucher.

Il faut donc quelqu'autre choſe que la différence intrinſèque des ſenſations pour qu'on puiſſe dire qu'elles ſuppoſent des ſens différens.

§ 3. Ce quelqu'autre choſe c'eſt ſans doute, que préciſément la même partie du corps ne ſoit pas ſuſceptible des deux ſenſations intrinſéquement différentes; car vu que chacune des parties (du moins des parties ſenſibles) du corps eſt ſuſceptible des deux ſenſations intrinſé-

quement différentes du froid & du chaud, du ſec & de l'humide, on attribue ces ſenſations diverſes à un même ſens, au toucher.

§ 4. Ainſi, pour que deux ſens ſoient différens, il faut la réunion des deux marques ſuivantes:

1) Il faut que les ſenſations ſoient intrinſéquement différentes, c'eſt-à-dire qu'on ait la conſcience (le ſentiment intérieur) que l'une n'eſt pas une ſimple répétition de l'autre.
2) Il faut que la même partie du corps ne ſoit pas le ſiége de l'une & l'autre ſenſation, c'eſt-à-dire ne ſoit pas ſuſceptible de nous les transmettre l'une & l'autre.

§ 5. Mais eſt-il bien vrai que ces deux marques ſoient les véritables caractériſtiques de l'identité ou de la diverſité de deux ſens? Voici comme je m'en aſſure par le raiſonnement & par l'expérience.

Certainement il n'implique pas plus contradiction de dire que deux ſenſations intrinſéquement différentes peuvent provenir de la même partie du corps, que de dire que la même ſenſation peut provenir de deux parties du corps différentes: dans le premier cas les ſenſations ſont différentes, mais le ſens demeure le même; dans le ſecond la ſenſation demeure la même, mais les ſens ſont différens.

Mais quoique la concluſion de l'acte à la puiſſance ſoit bonne, il n'en eſt pas de même de la puiſſance à l'acte ou à la réalité (*de poſſe ad eſſe non valet conſequentia*); ainſi quoiqu'il n'implique pas contradiction d'attribuer une même ſenſation à deux parties différentes du corps, ni deux ſenſations intrinſéquement différentes à une même partie du corps, ce n'eſt pas à dire que cela puiſſe avoir effectivement lieu; il faut le prouver par expérience.

L'expérience nous a déjà montré plus haut que deux ſenſations intrinſéquement différentes peuvent provenir de la même partie du corps (§ 2.); reſte à voir ſi elle nous enſeigne que deux parties différentes du corps peuvent nous transmettre la même ſenſation: or le pied & la main nous transmettent également la ſenſation du froid, celle du chaud, celle de la ſolidité ou réſiſtance.

Maintenant, ſi deux ſenſations intrinſéquement différentes peuvent provenir de la même partie du corps, tandis que deux parties différentes du corps peuvent nous transmettre la même ſenſation, il eſt manifeſte qu'on ne peut être ſûr que deux ſens ſont différens, qu'en réuniſſant ces deux marques.

§ 6. Je ne diſſimulerai pas qu'il ſe préſente ici une difficulté; la voici. Il règne une ſi grande affinité entre les ſens d'ailleurs ſi voiſins de l'odorat & du goût, qu'ils ſemblent l'un & l'autre ſuſceptibles de nous transmettre une ſeule & même ſenſation, par exemple celle de l'acide. Flairez de bon vinaigre, & vous reſpirez une odeur acide; goûtez de ce même vinaigre & vous aurez un goût acide; l'odeur acide vous fera venir l'eau à la bouche tout comme la ſaveur acide; du moins cela m'eſt-il arrivé aſſez ſouvent, ſurtout en reſpirant l'odeur de l'oſeille fraîche, & en mâchant une feuille de cette plante. Souvent une odeur cauſe des nauſées tout comme un vomitif: il paroît donc ici que l'on reconnoît la diverſité des deux ſens, de l'odorat & du goût, uniquement à la diverſité de leurs organes, & non à celle des ſenſations qu'ils nous transmettent; d'où il ſuit évidemment que la première des marques poſées ci-deſſus eſt ſuperflue, du moins dans ce cas, & qu'il faut s'en tenir à la ſeconde.

J'avoue ingénûment que je ne ſaurois trop comment lever cette objection, ſi l'on perſiſtoit à ſoutenir qu'effectivement la ſenſation de l'acidité d'une odeur n'eſt point intrinſéquement différente de la ſenſation que cauſe l'acidité d'une ſaveur; mais après avoir attentivement flairé & goûté du vinaigre, je trouve que quelque ſemblables que puiſſent être ces ſenſations, elles ſont cependant intrinſéquement différentes, en ſorte que c'eſt non ſeulement à la diverſité des organes, mais encore à celle des ſenſations, que je diſtingue l'odorat du goût.

Les réflexions ſuivantes viennent à l'appui de l'expérience. On ſait que ni le nez ni la langue & le palais ne ſont exactement parlant les organes de l'odorat & du goût, mais que ce ſont les nerfs qui tapiſſent ces parties de notre corps, & qui par cette raiſon s'appellent nerfs ol-

factifs & nerfs guſtatifs. Or ſi ces nerfs étoient exactement conſtitués les uns comme les autres, ils n'admettroient abſolument que les mêmes impreſſions, en ſorte qu'un objet n'agiroit point du tout ſur les nerfs olfactifs ou ſur les guſtatifs, ou bien agiroit ſur les uns comme ſur les autres, & ne feroit naître en nous que la ſenſation de l'odorat ou celle du goût, ce qui eſt contraire à l'expérience. La conſtitution, interne ou externe n'importe! la conſtitution des nerfs olfactifs n'eſt pas celle des nerfs guſtatifs; ces nerfs ne peuvent donc nous cauſer des ſenſations identiques.

Et j'eſpère qu'on ne m'accuſera pas d'avoir fait un cercle vicieux dans mon raiſonnement, & d'avoir conclu de l'expérience que la ſenſation de l'odorat n'eſt pas celle du goût, pour en conclure la diverſe conſtitution des nerfs olfactifs & des guſtatifs, pour en conclure encore la diverſité des ſenſations que ces nerfs nous transmettent, car je n'ai pas, je crois, raiſonné tout-à-fait auſſi puérilement. De l'expérience journalière, que la ſenſation de l'odorat n'eſt point celle du goût, j'en conclus la diverſité de conformation des nerfs olfactifs & des guſtatifs; & de cette diverſité je conclus l'invraiſemblance, ou plutôt l'impoſſibilité que dans aucun cas particulier leur effet puiſſe être préciſément le même.

§ 7. Cependant, pour éviter toute diſpute inutile, tombons d'accord qu'il eſt peut-être des cas dans leſquels on reconnoît uniquement la diverſité des ſens à celle des organes; il n'en ſera pas moins vrai qu'on eſt d'autant plus ſûr que deux ſens ſont différens, lorſqu'à la diverſité des organes ſe joint celle des ſenſations, en ſorte qu'on peut poſer les deux principes ſuivans:

1er Principe. Deux ſens ſont différens, lorſque leurs organes ſont en deux endroits différens du corps, & qu'ils nous transmettent deux ſenſations intrinſéquement différentes.

2^d^ Principe. Deux ſens peuvent être différens, lorſque leurs organes étant en deux endroits différens du corps, ils nous transmettent cependant une même ſenſation.

§ 8. Examinons d'après ces principes combien de ſens il faut admettre; & d'abord faut-il admettre un ſens intime?

Cer-

Certainement, quand je penſe, ou que je veux, ou que j'éprouve du plaiſir ou de la douleur; quand mon âme eſt calme & tranquille, ou quand elle eſt agitée par la colère, abattue par la triſteſſe, émue par un transport de joie, j'ai la conſcience de quelque choſe qui ſe paſſe en moi, & je trouve une différence intrinſèque entre une penſée & une volonté, le plaiſir & la douleur, le calme, la tranquillité de l'âme, & les transports de la colère & de la joie, ou l'abattement de la triſteſſe. Si donc je donne & peux donner le nom de ſenſation à chacune des conſciences (qu'on me paſſe l'expreſſion), qui accompagne ces divers états, il n'eſt pas douteux que j'éprouve des ſenſations intrinſéquement différentes.

Si maintenant je me demande en général dans quel endroit de mon corps j'éprouve toutes ces ſenſations? Si c'eſt quelque part à la ſurface extérieure, ou bien ſi c'eſt en dedans? je ne peux que me répondre à moi-même que c'eſt en dedans: il paroît donc que l'on eſt très-fondé à admettre en général un ſens intime, un ſens intérieur, par le moyen duquel on aperçoit ce qui ſe paſſe en nous-mêmes.

§ 9. Si continuant à m'interroger moi-même je me demande dans quelle partie interne de mon corps j'aperçois, je ſens, ſi l'on veut, la penſée qui m'occupe & qui me détermine, qui me fait vouloir; je me vois forcé de répondre: dans la partie ſupérieure de ma tête, dans le cerveau.

Et dans quelle partie du corps ſens-je le plaiſir ou la douleur, & ſurtout les paſſions? En vérité il me ſemble que c'eſt vers la région du cœur, & que ce pourroit bien être dans le diaphragme. Tout le monde dit: mon cœur nage dans la joie; mon cœur eſt oppreſſé de douleur; mon cœur eſt navré de triſteſſe; mon cœur eſt embraſé d'amour ou de colère; mon cœur eſt plein d'amertume, d'indignation: & il n'eſt pas étonnant que vu le voiſinage du cœur & du diaphragme, on attribue au premier ce qui pourroit bien n'appartenir qu'au dernier, tout comme il ſeroit très-étonnant qu'on eût attribué tous ces mouvemens au cœur, ſi ce n'étoit pas du moins tout près de lui qu'ils nous agitent.

Quoique je ſois paſſablement ignorant en anatomie, comme en bien d'autres choſes, il me ſemble pourtant qu'avant notre confrère M. Scarpa, on regardoit le cœur comme entièrement dépouillé de nerfs, au lieu que le diaphragme eſt une partie ſans contredit nerveuſe. Or l'expérience nous a bien convaincus qu'en dernier reſſort ce ſont les nerfs qui ſont les véritables organes de la faculté ſenſitive externe; il eſt donc très-vraiſemblable qu'ils le ſont auſſi de la faculté ſenſitive interne, & que par conſéquent le diaphragme pourroit bien être l'organe du ſentiment & des paſſions que je ne ſépare point, parce qu'à coup ſûr toute paſſion ſuppoſe un ſentiment, ou porte ſur un ſentiment.

Si cependant M. Scarpa ſe trouvoit avoir raiſon en attribuant des nerfs au cœur, il faut croire que ces nerfs ſont très-fins & très-déliés pour avoir échappé ſi long-temps à l'oeil des obſervateurs; & quoi de plus naturel que de les regarder comme les organes du ſentiment & des paſſions, organes qui très-probablement doivent être plus fins & plus délicats que ceux de la faculté ſenſitive externe, faite pour être affectée par des objets matériels & plus groſſiers.

§ 10. Du cœur je monte au cerveau, dans lequel je crois bien diſtinctement ſentir que ſe forment mes penſées, & je conclus qu'il en eſt l'organe, vu qu'à coup ſûr j'ai de mes penſées une perception que je ne confonds point avec les autres perceptions.

Et ici je me ſens preſſé par deux adverſaires.

D'un côté, le premier me dit: vous avez vous-même poſé pour principe (§ 4. No. 1.) que deux ſenſations intrinſéquement différentes ſuppoſent la conſcience que l'une n'eſt pas une répétition de l'autre; or les penſées proviennent toutes de nos diverſes ſenſations; elles en ſont donc des répétitions, & n'en ſont point intrinſéquement différentes.

De l'autre côté, le ſecond me dit: pour conſtituer un ſens particulier, il faut de votre propre aveu (§ 4. No. 2.) que la partie du corps qui lui ſert d'organe, ne ſoit ſuſceptible que des ſenſations propres à ce ſens; or toutes les ſenſations ont lieu dans le cerveau, auquel il manque par

conſéquent une des marques caractériſtiques qui ſont eſſentielles pour le conſtituer l'organe de la penſée.

Depuis que le jeune Horace nous a montré que le meilleur moyen de ſe défaire de pluſieurs ennemis qui nous attaquent à la fois, c'eſt de les ſéparer, il eſt tout ſimple d'avoir recours à cet artifice. Je commence donc par mon premier adverſaire, & celui-ci dépêché, j'espère que le ſecond ſuccombera bien auſſi.

Il ſe peut que toutes nos penſées proviennent effectivement de nos ſenſations, tant celles qui nous viennent de dehors, que celles qui nous viennent de dedans; mais cela ne fait pas encore que toute penſée ne ſoit qu'une ſimple répétition de nos ſenſations. Un pommier provient d'un pepin ſemé en terre, & cependant le pommier n'eſt pas une répétition du pepin, tout comme celui-ci n'étoit pas une répétition du pommier dont il étoit provenu à ſon tour. Pour qu'une ſenſation ſoit la véritable répétition d'une autre, il faut qu'il n'y ait entre la ſeconde & la première d'autre différence que celle des temps dans lesquels elles ont lieu; dès qu'il y a quelque autre différence, une de ces ſenſations reſſemble à l'autre, a quelque choſe de commun avec l'autre, mais n'en eſt pas la ſimple répétition. Cela poſé, il eſt clair que non ſeulement l'idée que je peux me faire de la douleur qui accompagne l'action imprudente d'empoigner étourdiment un fer chaud, n'eſt pas une véritable répétition de cette douleur, mais encore, & qui plus eſt, que l'eſpèce de douleur factice qui accompagne le tableau imaginaire de cette action, n'eſt pas même une répétition de la ſenſation douloureuſe réelle; car dans ce cas je ne diſtinguerois point la douleur factice de la douleur effective. La penſée n'eſt donc point une ſimple répétition des ſenſations, quoiqu'elle provienne des ſenſations & s'y rapporte, & je ſuis par conſéquent très-fort en droit de dire, que lorsque j'ai une penſée, ou que je penſe, la conſcience qui accompagne cette penſée, eſt une tout autre conſcience que celle qui accompagne les ſenſations dont cette penſée eſt déduite.

Défait du premier de mes adverſaires, je me tourne vers le ſecond, & je lui dis: quand bien même le cerveau ſeroit le ſenſorium commun,

comme vous l'avancez ſi leſtement, il ne s'enſuit nullement que ce ſoit le même endroit du cerveau; cela ne ſuivroit pas même de la ſuppoſition que ce fût la glande pinéale comme le veut Descartes, ou le corps calleux comme le veut la Peyronie, car l'une & l'autre ont de l'étendue, en ſorte que ce pourroit être par un endroit particulier de cette glande ou de ce corps que l'homme eût la perception de ſes penſées. Il eſt vrai que je ne ſuis en état ni d'aſſigner cet endroit précis, ni même d'en avoir la conſcience diſtincte; mais vous non plus n'êtes en état de m'aſſigner ni l'endroit précis de votre ſenſorium où vous avez la conſcience de la couleur de la roſe, ni celui où vous avez la conſcience ſi différente de ſon parfum délicieux. Donc de deux choſes l'une: ou bien avouez que la conſcience de la différence intrinſèque des ſenſations ſuffit pour diſtinguer un ſens de l'autre, ou bien avouez que ce ſont différens endroits de votre ſenſorium par leſquels vous apercevez les odeurs, les couleurs, les ſaveurs & les ſons. Dans le premier cas je ſuis pleinement autoriſé à regarder la perception de la penſée comme provenant d'un ſens particulier, dont le ſiége eſt, comme celui de tous les autres ſens, dans le cerveau; dans le ſecond, je le ſuis également pour peu que vous ſoyez un loyal champion, car de quel droit me refuſerez-vous un tout petit coin de la glande pinéale ou du corps calleux, pour y établir l'endroit où ſe fait la perception de la penſée, tandis que je vous accorde tout le reſte du terrain diſputé pour y établir les ſiéges de l'odorat, de la vue, du goût & de l'ouïe; quant au toucher je n'y touche pas; il pourroit devenir un nouveau ſujet de litige, & au milieu des combats mêmes il faut ne ſonger qu'à la paix.

Le voilà donc désarmé ce ſecond adverſaire, qui, je l'avoue, me paroiſſoit à moi-même le plus redoutable, & en vainqueur généreux je m'abſtiens de l'accabler de mon triomphe; ſans quoi je pourrois, inſultant à ſa défaite, lui dire: c'eſt en vous laiſſant vos armes que je vous ai contraint de me céder la victoire; qu'eût-ce été ſi j'avois commencé par vous désarmer? Et ne pouvois-je pas vous les ôter vos armes, en vous diſant, d'après des gens plus inſtruits que moi en anatomie: com-

ment ſe pourroit-il que la cervelle, ſubſtance molle, inactive & inſenſible, dont une partie même conſidérable peut être enlevée ſans que l'animal ceſſe de ſentir, ſoit l'organe des ſenſations? Vous vous retranchez dans la glande pinéale ou dans le corps calleux; mais votre retranchement eſt abſolument iſolé relativement aux nerfs, organes indubitables des ſens; il eſt par-tout environné de la ſubſtance molle & inſenſible de la cervelle, comment celle-ci pourroit-elle lui transmettre l'ébranlement des nerfs? *).

Je vois d'ici le coup de jarnac que vous me préparez. Si le cerveau, dites-vous, eſt une ſubſtance inactive & inſenſible, incapable par conſéquent de ſenſation, il ne peut être l'organe de la penſée. Et pourquoi non, s'il vous plaît? Si la penſée diffère intrinſéquement des ſenſations, du ſentiment, des paſſions, la perception de la penſée doit différer intrinſéquement de celle des ſenſations, du ſentiment, des paſſions; or la penſée en diffère intrinſéquement; donc la perception de la penſée diffère intrinſéquement de celle des ſenſations, du ſentiment & des paſſions; donc le cerveau, quoiqu'inhabile à cette dernière perception, pourroit bien être très-habile à la première. Et l'expérience vient à l'appui de mon raiſonnement; à moins de vouloir vous mentir à vous-même, vous êtes forcé d'avouer que quand vous penſez, vous ſentez auſſi diſtinctement que c'eſt dans le ſommet de la tête, dans l'emplacement qu'occupe le cerveau que vous penſez, que vous ſentez diſtinctement que c'eſt dans le nez qu'eſt l'endroit du corps où ſe forment les ſenſations de l'odorat. Avouez donc: ou bien que le cerveau eſt l'organe de la penſée, ou bien niez que le nez ſoit celui de l'odorat, car il ſe trouve ici parité entière. Vous ſentez que c'eſt l'endroit du corps qu'on appelle nez, qui eſt affecté par cette ſenſation intrinſéquement différente de toute autre qu'on appelle odeur: vous ſentez que c'eſt l'endroit du corps qu'on appelle cerveau, qui eſt affecté par cette perception intrinſéquement différente de toute autre qu'on appelle penſée.

*) Grand Vocabulaire françois, article *Cerveau*.

Au reſte, je me ſers tout exprès du mot perception en parlant de la penſée, pour indiquer par le mot même que la conſcience d'une penſée eſt intrinſéquement différente de celle d'une ſenſation.

§ 11. Il me paroît donc effectivement que par les mêmes raiſons qui nous font admettre cinq ſens externes, il faut encore admettre deux ſens internes; le ſens du ſentiment & des paſſions, dont l'organe ou le ſiége eſt le diaphragme ou le cœur, & le ſens de la penſée & de la volonté, dont l'organe ou le ſiége eſt le cerveau.

Mais l'imagination, la mémoire, l'attention, la faim, la ſoif &c.?

Prenons tous ces objets en conſidération, mais les uns après les autres, & commençons par la faim & la ſoif, comme deux ſenſations très-incommodes quand elles ſe font ſentir, & dont il eſt par conſéquent bon de ſe débarraſſer.

§ 12. Certainement perſonne ne confond la modification interne qu'il éprouve lorsqu'il a faim ou ſoif, avec aucune autre modification interne; on ne confond pas même la faim avec la ſoif: la faim & la ſoif ſont donc bien deux ſenſations intrinſéquement différentes de toute autre & entr'elles.

Or il me ſemble que quand j'ai faim, c'eſt bien dans l'eſtomac que j'éprouve le beſoin de manger, tout comme il me ſemble que c'eſt bien dans la bouche, & ſurtout vers le fond de la bouche ou vers le goſier, que j'éprouve le beſoin de boire; du moins eſt-il ſûr qu'on peut étancher ſa ſoif en prenant de l'eau dans la bouche, en l'y gardant quelque temps, & la rejetant enſuite.

Il paroît donc qu'on ſeroit aſſez fondé à dire que la faim & la ſoif ſont deux ſens différens, dont les organes ſont l'eſtomac pour la première, & le goſier pour la ſeconde.

§ 13. Il eſt vrai que quelques-uns regardent la troiſième tunique de l'eſtomac, qu'on appelle, je crois, tunique ou membrane vasculaire, comme le ſiége propre de la faim & de la ſoif. En ſuppoſant qu'ils ayent raiſon, la faim & la ſoif ſeroient deux ſenſations d'un même organe, tout comme la couleur & la figure ſont deux ſenſations de la vue;

& toujours faudroit-il avouer que la faim & la ſoif conſtituent un ſens interne particulier, dont l'organe ſeroit la tunique vasculaire.

Je laiſſe de plus habiles que moi décider cette queſtion, me contentant d'avoir du moins frayé la route, en montrant qu'on eſt autoriſé à regarder la faim & la ſoif ſoit comme deux ſens différens dont les organes ſont l'eſtomac & le goſier, ſoit comme un ſeul ſens capable de deux ſenſations différentes & dont l'organe eſt la tunique vasculaire; j'avouerai cependant que je penche pour la première alternative.

§ 14. Quand l'homme a fait taire la faim & la ſoif, ces deux grandes ennemies du genre humain, ordinairement un doux ſommeil vient s'emparer de ſon être. Ce bienfaiſant reſtaurateur de nos forces épuiſées eſt précédé d'aſſoupiſſement, état particulier dont la perception n'eſt la répétition d'aucune autre, & qui conſtitue par conſéquent bien une ſenſation intrinſéquement différente de toute autre. Et cette ſenſation dans quel endroit du corps ſe fait-elle ſentir? Mais dans le cerveau il me ſemble: lorsque je ſuis près de m'endormir, ne ſens-je pas une espèce de preſſion ou de peſanteur au ſommet de la tête? Et puis, ne cite-t-on pas différentes expériences qui prouvent qu'on peut cauſer un aſſoupiſſement artificiel, en preſſant de manière ou d'autre le cerveau? *).

Je ne ſaurois qu'y faire; je me vois forcé de convenir que l'aſſoupiſſement eſt une ſenſation intrinſéquement différente de toute autre, qui ſe fait ſentir dans le cerveau, & dont par conſéquent celui-ci eſt l'organe.

E: le cerveau eſt déjà l'organe de la penſée; il faudra donc dire que le cerveau eſt un organe dans les perceptions propres ſont la penſée & l'aſſoupiſſement.

§ 14. Encore ici j'emploie le mot perception & non celui de ſenſation, pour indiquer une conſcience différente de celle qu'entraîne l'impreſſion des objets matériels & externes. Je remarque cependant que quoique le cerveau ſoit une ſubſtance molle, inactive par elle-même

*) Encyclopédie par ordre de matières: Médécine, article *Aſſoupiſſement.*

& inſenſible, elle pourroit pourtant bien cauſer des ſenſations ſans être elle-même capable de les apercevoir; il ſuffit pour cet effet que cette ſubſtance agiſſe ſur les nerfs qui viennent s'y perdre tous, & elle peut agir ſur les nerfs ſans être active en elle-même, pourvu qu'elle puiſſe transmettre l'action d'une autre ſubſtance active, & ne ſeroit-ce pas ce qui arrive dans l'aſſoupiſſement? Perſonne ne pourroit ſans doute mieux décider cette queſtion que le médécin philoſophe dont s'honore cette Académie; quant à moi je me contente d'ajouter ici cette réflexion.

§ 16. Peut-on dire que l'âme qui aperçoit l'aſſoupiſſement précurſeur du ſommeil, en ait la ſenſation? Je ſerois tenté de dire que non, l'aſſoupiſſement conſiſtant préciſément en ce que toutes les ſenſations s'affoibliſſent & s'émouſſent. Cependant l'âme aperçoit encore, a la conſcience de la modification qu'elle éprouve, modification qui diffère tellement de celle qu'on appelle ordinairement ſenſation, qu'elle eſt plutôt comme une éponge qui l'efface, ou comme un voile qui l'obſcurcit. Il paroît donc qu'il faut diſtinguer la perception de la ſenſation: la perception eſt l'acte général par lequel l'âme a connoiſſance des modifications qu'elle ſubit, quelle que ſoit la cauſe de ces modifications; la ſenſation eſt l'acte particulier par lequel l'âme a connoiſſance des modifications qu'elle ſubit par le moyen des objets externes & matériels: la perception eſt compriſe dans la ſenſation; la ſenſation n'eſt pas compriſe dans la perception, mais elle eſt compriſe ſous la perception: en un mot, la perception eſt le genre dont la ſenſation eſt l'eſpèce; auſſi dit-on fort bien j'ai la perception des couleurs, des odeurs, des tons, des ſaveurs, de la réſiſtance, de la penſée, de la volonté; mais on trouveroit aſſez étrange que quelqu'un dît: j'ai la ſenſation de ma penſée, de ma volonté.

§ 17. J'en reviens encore à l'aſſoupiſſement qui n'eſt à ſtrictement parler ni la fatigue, ni la laſſitude, ni la langueur, ni l'abattement, vu qu'on peut être fatigué, las, languiſſant, abattu ſans être encore aſſoupi, quoique la fatigue, la laſſitude, la langueur & l'abattement puiſſent mener & mènent d'ordinaire à l'aſſoupiſſement. Ne pourroit-on pas dire

que

que la fatigue, la laſſitude, la langueur, l'abattement ſont des avant-coureurs de l'aſſoupiſſement, comme celui-ci eſt l'avant-coureur du ſommeil? De plus, la fatigue, la laſſitude, la langueur, l'abattement ſuppoſent toujours un ſentiment désagréable, tandis que l'aſſoupiſſement eſt toujours plutôt agréable que désagréable; la fatigue, la laſſitude, la langueur, l'abattement ſe font ſentir par tout le corps, & ſi ce que j'ai dit plus haut (§ 14.) eſt vrai, l'aſſoupiſſement ne ſe fait ſentir qu'au cerveau.

Il eſt encore un précurſeur de l'aſſoupiſſement; c'eſt l'ennui, ſur lequel je me garderai bien de m'appeſantir, de peur de le réveiller dans mon auditoire.

§ 18. Quant au ſommeil proprement dit, tant s'en faut qu'on puiſſe en faire un ſens particulier, qu'il conſiſte préciſément, du moins quand il eſt profond, dans l'abſence totale de toute ſenſation & de toute perception. Des rêves tantôt agréables & tantôt désagréables, viennent aſſez ſouvent, il eſt vrai, rompre la monotonie de cette mort paſſagère, mais la perception de ces tableaux fantaſtiques n'eſt point la perception du ſommeil même; elle tient à celle que Montagne nommoit la folle de la maiſon, folle qui pourroit bien m'avoir joué plus d'un tour dans le cours de ces recherches; on comprend que c'eſt de l'imagination que je veux parler.

§ 19. On entend par imagination la faculté qu'a l'homme de ſe retracer un objet qui n'agit point effectivement ſur ſa faculté ſenſitive, ſoit que cet objet ait agi ſur cette faculté, ſoit que cet objet ſoit de la création même de l'imagination qui ſe le retrace. Ainſi, je peux me retracer un cheval ou un arbre que j'ai vus, & le premier qui imagina un cheval ailé, ſe retraça un objet de ſa propre création. Cependant il eſt important d'obſerver que même en créant une image, l'imagination ne fait que raſſembler en un ſeul tableau des ſenſations éparſes, réellement éprouvées.

§ 20. C'eſt une obſervation auſſi fondée que peu nouvelle, qu'en ſe retraçant ainſi l'image d'un objet abſent, ſoit que cet objet ſoit réel,

ſoit qu'il ſoit factice, tantôt l'image eſt l'effet d'un acte de la volonté, & tantôt l'image eſt involontaire. Mais puisque cette image, volontaire ou involontaire, n'importe! n'eſt qu'un aſſemblage de ſenſations éprouvées (§ 19.), il eſt manifeſte qu'elle ne peut être qu'un aſſemblage, non de ſimples répétitions de ces ſenſations, mais d'espèces de copies de ces ſenſations, copies qui ſont du reſſort du ſens auquel chacune de ces ſenſations eſt particulière. Il ne paroît donc pas que l'imagination ſuppoſe un ſens particulier. Dans l'image volontaire les organes des ſens ſont mis en jeu par la volonté; dans l'image involontaire par une cauſe inconnue, il eſt vrai, mais la perception de l'image eſt compoſée de ſenſations factices, copies des ſenſations réelles.

Et l'expérience prouve la vérité de ce que je viens d'avancer. Quand je me retrace l'image d'un cheval blanc avec toute la vivacité dont je ſuis capable, il me ſemble voir ce cheval, encore que pour mieux monter mon imagination, je tienne les yeux fermés: quand je me retrace un air connu, il me ſemble l'entendre, & l'on ſait qu'un Anglois eſt parvenu à ſe donner de cette manière un concert fictif, qui ne coûte rien à ſa bourſe, mais fatigue d'autant plus ſon imagination. L'homme qui ſoit dans les rêves menſongers qu'enfante ſouvent le ſommeil, ſoit dans le délire de la fièvre chaude, croit reſpirer des parfums délicieux ou des odeurs empeſtées, ſavourer des mets ſucculens ou des drogues empoiſonnées, tenir entre ſes bras l'objet de ſes voeux ou lutter avec un monſtre, cet homme accorderoit-il de la réalité à ces tableaux fantaſtiques, ſi quelque cauſe cachée agiſſant ſur ſes nerfs, n'y produiſoit pas des effets analogues à ceux qui proviennent des objets odorans, ſavoureux, tactiles?

§ 21. Et ſi l'imagination ne conſtitue pas un ſens particulier, la mémoire, qui n'eſt que l'imagination accompagnée de la conſcience que l'objet retracé eſt une répétition, ou n'eſt pas retracé pour la première fois, la mémoire conſtitueroit-elle un ſens particulier?

Dans ce cas il faudroit que la perception de la répétition dont on vient de parler, fût une perception intrinſéquement différente de toute

autre, & c'eſt bien réellement ce qu'elle me paroît être. Je vois quelqu'un que j'ai déjà vu, & que je me rappelle avoir déjà vu; cette réminiscence eſt ſans doute une perception particulière; quand même on ſuppoſeroit que pour que la mémoire ait lieu, il faut outre l'impreſſion préſente ou réelle que l'objet fait ſur les nerfs, une impreſſion imaginaire du même objet, toujours la perception que cette dernière impreſſion eſt une répétition d'une impreſſion eue autrefois, n'eſt point la répétition d'une autre perception.

§ 22. Quand on cherche à ſe reſſouvenir de quelque choſe, on ſent, il me ſemble, bien diſtinctement que c'eſt dans le cerveau que ſe fait une eſpèce d'effort, en ſorte que celui-ci ſeroit encore l'organe de la mémoire, comme il eſt déjà celui de la penſée & de la volonté (§ 11.), & celui de l'aſſoupiſſement (§ 14.) *).

§ 23. Et de l'attention, qu'en ferons-nous? Il faudra voir. On appelle attention la faculté qu'a l'homme d'avoir parmi pluſieurs perceptions ſimultanées, une ou plus d'une perception plus vive & plus diſtincte que les autres; l'attention n'eſt donc que le plus grand degré d'intenſité de quelques perceptions comparées à d'autres, & n'eſt par conſéquent point une perception particulière, une perception intrinſéquement différente de toute autre.

§ 24. Reſte le ſens moral. Il eſt ſans doute des cas où l'homme agit, & agit moralement bien par ſentiment, tout comme il eſt des cas où nous taxons les actions d'autrui de moralité ou d'immoralité, où nous parlons de juſtice & d'injuſtice, ſans avoir clairement préſens à l'eſprit les principes d'après leſquels nous portons nos jugements, quelquefois même ſans être capables de nous rendre compte après coup de ces principes. Sans doute encore que la perception de la moralité ou de l'immoralité, de la juſtice ou de l'injuſtice d'une action, eſt très-dif-

*) Le cerveau eſt compoſé de nombre de parties différentes, ſans compter les nerfs qui en partent; une de ces parties pourroit bien être l'organe en queſtion, tandis qu'une autre ſeroit celle de la penſée & de la volonté, & une troiſième l'organe de l'aſſoupiſſement.

férente de la perception de cette action même; il eſt donc vrai que la conſcience que réveille la moralité des actions humaines, differe de toute autre perception.

Et où ſe fait ſentir cette conſcience, lorsqu'elle ſeule influe ſur nos actions ou ſur nos jugemens des actions d'autrui? Toujours dans la région du diaphragme ou du coeur, ſi je ne me trompe. C'eſt même encore là que ſe fait ſentir la modification agréable, compagne de ce qu'on appelle une bonne conſcience, qui n'eſt que la perception de la bonté morale de nos actions; comme c'eſt encore là que ſe font ſentir les remords, les bourrèlemens d'une mauvaiſe conſcience, qui n'eſt que la perception de la méchanceté morale de nos actions. Je crois donc être autoriſé à reconnoître dans l'homme un ſens moral dont l'organe eſt le diaphragme ou le coeur, ſi par ſens moral on entend ſimplement, comme je le fais, un endroit particulier du corps qui nous ſemble affecté d'une manière toute particuliere par les objets ſuſceptibles de faire impreſſion ſur cet endroit.

Cependant je déclare bien expreſſément, & pour cauſe, que je ne prétends pas réduire toute la morale au ſentiment moral, ni même affirmer que l'origine de ce ſentiment doive uniquement ſe chercher dans la faculté ſenſitive; je me contente de dire qu'il eſt un ſentiment moral dont la perception eſt intrinſéquement différente de la perception de tout autre ſentiment, & que le ſiége ou l'organe de ce ſentiment eſt le diaphragme ou le coeur.

Je me réſume, & je finis.

L'homme diſtingue cinq ſens externes, parce que chacun de ces ſens lui transmet des ſenſations intrinſéquement différentes des ſenſations de tout autre ſens, & parce que, lorsqu'il s'en tient bonnement à l'expérience, ſans ſubtiliſer & ſans raiſonner à perte de vue, il éprouve ces ſenſations par cinq endroits différens de la ſurface extérieure de ſon corps, endroits qu'il regarde en conſéquence comme les organes des cinq ſens.

Cela poſé, l'homme doit par les mêmes raiſons diſtinguer quatre ſens internes, ſavoir le ſens de la penſée, de la volonté, de la mémoire

& de l'aſſoupiſſement, dont l'organe eſt le cerveau (§§ 10, 11, 14 & 22), le ſens du ſentiment tant phyſique que moral & des paſſions, dont l'organe eſt le coeur ou le diaphragme (§§ 9 & 24), le ſens de la faim dont l'organe eſt l'eſtomac, & le ſens de la ſoif dont l'organe eſt le goſier (§ 12.), à moins que ces deux ſens n'en ſoient qu'un dont l'organe commun ſeroit la tunique ou membrane vasculaire (§ 13.), ce qui réduiroit à trois les ſens internes.

On peut donc, diviſant la faculté ſenſitive en externe & interne, dire que la première renferme les cinq ſens de nature, & la ſeconde les trois ou quatre ſens intimes dont nous venons de parler.

Si quelqu'un plus accoutumé à ſentir qu'à réfléchir ſur les différentes manières dont il ſent & ſur les divers organes par leſquels il ſent, ſi quelqu'un, dis-je, trouvoit étrange, & peut-être même mauvais, que je porte ainſi juſqu'à 8 ou 9 le nombre de nos ſens, je lui répliquerai qu'il ne tiendroit qu'à moi d'en augmenter encore le nombre. Effectivement, ne commence-t-on pas à parler d'un ſens tout particulier, d'un ſens réſervé uniquement à quelques mortels privilégiés, qui ſans lui ne ſauroient pénétrer les obſcures profondeurs d'une certaine philoſophie, dont probablement l'auteur lui-même ne ſoupçonnoit pas ce 9me ou 10me ſens?

Et le deſir, ou plutôt le beſoin impérieux de procréer ſon ſemblable, cette partie phyſique de l'amour, qui ſuivant ce Buffon que j'ai déjà tant cité, eſt ce que l'amour a de bon, tandis que le moral n'en vaut rien, ne faudroit-il pas en conſcience en faire un dixième ou un onzième ſens? Ne réunit-il pas les deux caractères qu'il faut réunir pour pouvoir y prétendre? Mais jetons un voile ſur cette matière délicate, & n'abuſons pas plus long-temps de la patience de notre auditoire.

SUR

la proportion entre la Moralité et le Bonheur, relativement à un nouvel argument pour l'Exiſtence de Dieu.

PAR M. J. C. SCHWAB *).

Il y avoit un temps, où l'on fondoit la Métaphyſique ſur des *axiomes;* aujourd'hui on la fonde ſur des *poſtulats. Euclide* fonde ſa Géométrie ſur ces deux ſortes de principes, & perſonne, que je ſache, n'a encore révoqué en doute ni ſes axiomes ni ſes poſtulats. C'eſt que ſes axiomes ont une évidence qui n'a pas beſoin de démonſtration; & ce qu'il *poſtule,* ou ce qu'il demande, eſt non ſeulement poſſible, mais très-aiſé à faire. Quoi de plus évident que: *deux lignes droites ne peuvent ſe couper que dans un point?* Quoi de plus faiſable que: *d'un point donné tirer une ligne droite à un autre point?*

Voilà donc ce qu'on eſt en droit d'exiger d'un axiome ou d'un poſtulat, qui doivent ſervir de fondement à une démonſtration ou à un raiſonnement quelconque. Il faut que tout homme qui entend un axiome, & qui en comprend le ſens, convienne, ſans héſiter, de ſa vérité; & qu'en entendant prononcer un poſtulat, il puiſſe dire ſans balancer: cela peut ſe faire. Examinons d'après cette règle un poſtulat dont la nouvelle Philoſophie ſe ſert pour démontrer une propoſition de la plus grande importance.

M. *Kant*, après avoir rejeté comme des ſophismes, tous les argumens dont les philoſophes ſe ſont ſervis jusqu'ici pour démontrer

*) Lu à l'Académie le 20 ſeptembre 1798.

l'exiſtence de Dieu, raiſonne, pour établir cette vérité, de la manière ſuivante:

„*La Raiſon pratique poſtule, qu'il y ait une proportion exacte entre „la Moralité et le Bonheur.*"

„*Or cette proportion ne ſauroit avoir lieu ſans un être intelligent, „qui ſoit le Créateur et le ſouverain Maître de l'univers, c. à d. „ſans Dieu.*"

La Raiſon pratique poſtule donc, qu'il y ait un Dieu, ou ce qui revient au même, l'homme, comme être moral, peut dire: je veux que Dieu exiſte.

L'exiſtence de Dieu dépend donc de la volonté de l'homme.

Je n'entreprends pas ici d'examiner tout cet argument, ſur lequel il y auroit bien des choſes à dire: je me borne à quelques réflexions ſur le *poſtulat de la Raiſon pratique* qui lui ſert de fondement.

La première queſtion qui ſe préſente, eſt ſans doute: ſi cette exacte proportion entre la Moralité & le Bonheur eſt une choſe poſſible. Puiſque M. *Kant* fait une ſi grande différence entre la Raiſon *théorique* & la Raiſon *pratique*, celle-là peut dire à celle-ci: „Vous pouvez *poſtuler* „bien des choſes; mais c'eſt à moi de juger, ſi ce que vous poſtulez „eſt faiſable." „Lorsqu'*Euclide* poſtule de tirer d'un point donné une „ligne droite à un autre point, je le lui accorde volontiers, car rien „de plus aiſé: mais vous poſtulez-là une choſe qui paroît ſujette à de „grandes difficultés. Permettez-moi du moins de douter de ſa poſ„ſibilité."

En effet, il ne ſuffit par de *poſtuler;* il faut montrer qu'on en a le *droit.* Ce droit dans la philoſophie, ce ſont les *raiſons* par leſquelles on prouve que ce qu'on demande eſt *raiſonnable.* M. *Kant* a beau refuſer à la Raiſon théorique l'entrée dans la Philoſophie par la porte de devant; elle y entre par la porte de derrière qu'il ne ſauroit lui fermer.

La queſtion ſe réduit donc à celle-ci:

„Quelles raiſons a-t-on de regarder le Bonheur comme devant „être proportionné à la Moralité?"

D'abord, l'*Expérience* ne nous autoriſe point à une telle ſuppoſition: elle paroît plutôt prouver le contraire. L'homme vertueux, loin d'être toujours heureux à proportion de ſa vertu, paroît quelquefois malheureux; & le méchant, loin d'être toujours malheureux à proportion de ſa méchanceté, paroît quelquefois jouir d'un grand bonheur. Je dis, que tout cela *paroît;* car l'expérience ne donne que des *apparences*, & ne ſauroit par conſéquent décider la queſtion.

Il faut donc conſulter la *Raiſon*, c. à d. comparer les idées de Moralité & de Bonheur, pour voir ſi leur rapport eſt tel qu'on en puiſſe inférer légitimement une exacte proportion entre l'une & l'autre.

Pour cela, on pourroit analyſer les deux idées de Moralité & de Bonheur; mais on peut ſe borner dans cette recherche à analyſer & déterminer celle du Bonheur: & comme les différens ſyſtèmes de philoſophie varient beaucoup là-deſſus, il ſera juſte de prendre ce terme dans le ſens que lui donne M. *Kant.*

Or ſelon cet auteur, le Bonheur conſiſte à pouvoir *ſatisfaire tous ſes penchans, eu égard à leur étendue, à leur intenſité et à leur durée* *). Dans un autre endroit **) il dit, que pour être vraiment heureux, il faut que *tout nous ſuccède au gré de nos voeux.* Cette théorie du Bonheur diffère eſſentiellement de celle des Stoïciens; choſe qu'il faut bien remarquer ici.

En ſoutenant donc, que la Raiſon lie tellement les idées de Moralité & de Bonheur qu'elle mette une exacte proportion entre l'une & l'autre, on ſoutient évidemment qu'à meſure que l'homme vertueux avance dans la carrière de la vertu, ſes penchans doivent être plus ſatisfaits dans le triple rapport mentionné, c. à. d. que ſes ſenſations agréables doivent s'accroître en *nombre*, en *vivacité* & en *durée;* de même qu'à

*) V. *Vernunftkritik p.* 834. *2de Edit.*

**) V. *Kritik der praktiſchen Vernunft, p.* 224.

qu'à meſure que l'homme devient plus vicieux, ſes ſenſations désagéables doivent s'accroître dans le même rapport.

J'avoue que ma Raiſon ne voit point ce rapport entre la Moralité & le Bonheur, & que cette combinaiſon d'idées me paroît renfermer des aſſertions non ſeulement arbitraires, mais tout-à-fait fauſſes.

Pour faire voir cela, remarquons que notre Bonheur ſe compoſe de deux espèces de plaiſir, l'un *ſpirituel*, l'autre *ſenſible*.

Le plaiſir *ſpirituel* ſe ſubdiviſe en celui qui naît de la pratique de la vertu, & en celui dont la ſource eſt la connoiſſance de la vérité. On peut appeler le premier le plaiſir *moral*, le ſecond le plaiſir *intellectuel*.

Parmi les plaiſirs *ſenſibles*, les plaiſirs *corporels* occupent le premier rang; ils ont cela de particulier, que leur ſiége paroît être dans certaines parties de notre corps.

Il y a encore des plaiſirs qu'on peut appeler *mixtes*, parce qu'ils tiennent à l'*esprit* & aux *ſens*. Tel eſt le plaiſir que la plupart des hommes trouvent à poſſéder des richeſſes, à commander aux autres, à avoir de la célébrité &c. Les objets qui en ſont la cauſe étant hors de nous, on les appelle des *biens extérieurs*, & le Bonheur qui réſulte de leur poſſeſſion, s'appelle le *Bonheur extérieur*.

Faiſons-en maintenant l'application à notre ſujet, & commençons par le plaiſir *moral*. Ce plaiſir étant intimement lié avec la pratique de la vertu, on peut dire qu'il s'accroît à meſure que l'homme devient plus vertueux. A cet égard donc le Bonheur peut être enviſagé comme proportionné à la Moralité.

Il n'en eſt pas de même du plaiſir *intellectuel*, qui n'a point de liaiſon naturelle avec la vertu. Un homme peut être très-vertueux, & manquer de talens & de connoiſſances; un autre peut avoir des talens & des connoiſſances, ſans être vertueux. L'homme à talens & à connoiſſances aura des jouiſſances, que celui qui en manque n'aura pas. Suppoſons un homme auſſi vertueux que *Newton*, mais n'ayant pas ſon grand talent pour la géométrie, ni ſes connoiſſances; *Newton* aura in-

finiment plus de jouiſſances que lui, ſans compter le poulet qu'il mangeoit tous les jours. Le Bonheur intellectuel n'eſt donc point proportionné à la Moralité. Si la Raiſon *pratique* s'aviſe de *poſtuler* une telle proportion, ſa demande eſt déraiſonnable.

Elle l'eſt encore davantage à l'égard des plaiſirs *corporels*. L'homme raiſonnable ne demandera jamais de faire meilleure chère, de boire du vin plus exquis, de jouir d'une plus belle femme &c. à meſure qu'il devient *plus vertueux*. Ces choſes n'ont point de liaiſon naturelle. Les lier, c'eſt contredire l'expérience, & faire une combinaiſon d'idées entièrement arbitraire.

Enfin le Bonheur *extérieur* ne ſauroit être proportionné à la Moralité. Il eſt vrai qu'il y a des vertus qui mènent à cette eſpèce de Bonheur: mais en y regardant de près, on trouvera que ces vertus doivent être ſoutenues par des *talens* ou de *l'intelligence*, & accompagnées de *circonſtances* heureuſes. Un négociant ne parviendra jamais aux richeſſes par ſa vertu ſeule, p. ex. par ſa probité, ſa bonne foi, ſa bienveillance pour les autres &c. Il faut qu'il ait de l'induſtrie & de l'intelligence, & qu'il ſoit ſecondé dans ſes ſpéculations par des circonſtances favorables, qui manqueront à cent autres, auſſi gens de bien que lui. Il ne ſuffit donc pas de dire: je *veux* & je *poſtule* que l'homme le plus vertueux ſoit le plus riche, le plus puiſſant, le plus élevé en rang &c. J'aimerois autant la *baguette magique* que cette volonté & ces poſtulats de la Raiſon pratique.

Si la nouvelle Philoſophie reſtreignoit l'idée de Bonheur au bonheur *moral*, la proportion entre la Moralité & le Bonheur pourroit être admiſe: mais alors cette philoſophie ſeroit *ſtoïcienne*. Or elle ne l'eſt point à cet égard; M. *Kant* dit expreſſément, que la théorie des Stoïciens ſur le Bonheur n'eſt point aſſortie à la nature d'un Être qui n'eſt pas tout raiſon, mais qui a des beſoins à ſatisfaire, & des deſirs à remplir. — Cela me donne lieu d'enviſager la choſe du côté des *penchans*, pour en venir au même réſultat.

On peut diſtinguer dans l'homme trois ſortes de penchans, de déſirs & de voeux,

1) Ceux qui ſont contraires à la raiſon & à la morale, par exemple l'avarice, la volupté &c.
2) Ceux qui y ſont conformes, p. ex. le penchant à la bienfaiſance.
3) Ceux qu'on peut regarder comme indifférens à l'égard de la morale, c.-à-d. qui ne ſont commandés ni défendus par elle. Tel eſt p. ex. le voeu de vivre dans une certaine aiſance, celui de voyager pour connoître les hommes, le déſir d'avoir une femme aimable &c. Aucun homme n'eſt ſans ces ſortes de déſirs & de voeux, & la Morale les permet.

Quant à la *première* ſorte de penchans, il eſt clair qu'étant réprouvés par la Raiſon & la Morale, l'homme raiſonnable & vertueux ne fera point conſiſter ſon bonheur à les ſatisfaire: il ne *poſtulera* donc point qu'ils ſoient contentés à meſure qu'il deviendra plus vertueux. Lorsque M. *Kant* dit, que le Bonheur conſiſte à ſatisfaire *tous* ſes penchans, le mot de *tous* eſt de trop; car les penchans vicieux ne ſauroient nous procurer un véritable bonheur.

A l'égard de la *ſeconde* ſorte de penchans, remarquons, que l'homme vertueux, & qui veut ſincèrement le bien, aura toujours bien des penchans qu'il ne pourra pas ſatisfaire; qu'il formera bien des voeux qu'il ne pourra pas remplir. Je ne veux pour exemple qu'un *bon Roi*, qui n'a rien tant à coeur que de rendre ſon peuple heureux. Que d'efforts inutiles! que de projets manqués! que de voeux qu'il ne pourra jamais remplir! La même choſe arrive aux hommes en place, & à cent autres perſonnes qui n'ont jamais la ſatisfaction de faire autant de bien qu'elles ſouhaitent. Si la Raiſon pratique dit: „il eſt vrai que cela *n'eſt pas*, mais cela *devroit* être;" la Raiſon théorique lui répliquera froidement: „cela vous paroît; mais ni vous ni moi ne ſavons ce qui *doit* être dans ce monde."

Enfin, c'eſt la *troiſième* eſpèce de penchans qui montre le plus combien la Raiſon pratique a tort de poſtuler une exacte proportion

entre la Moralité & le Bonheur. D'un côté, ces penchans entrent eſſentiellement dans notre bonheur; de l'autre, il n'eſt pas en notre pouvoir de les ſatisfaire. Comment une choſe qui ne dépend pas de nous, & qui n'a rien de commun avec la Moralité, peut-elle lui être proportionnée?

Cela ſe verra peut-être encore mieux par le dialogue ſuivant entre la Raiſon pratique & la Raiſon théorique, (qui ayant une mère commune, ſe traiteront de *ſœurs*, quoiqu'elles ne ſoient pas d'accord.)

Raiſon pratique.

Y a-t-il quelque choſe de plus choquant, ma ſœur, que de voir ce fripon, ce fat, ce pied-plat &c. nager dans l'opulence, pendant que cet homme de bien n'a pas de quoi vivre?

Raiſon théorique.

D'abord, ma chère ſœur, je ne connois aucun homme de bien qui n'ait pas de quoi vivre; mais ſuppoſons que le fait ſoit vrai; je ne vois-là rien de choquant. Qu'a de commun l'argent avec la vertu?

Raiſon pratique.

Sans doute, ces deux choſes ſont très-hétérogènes: mais vous conviendrez, ma ſœur, qu'on ne peut pas être heureux, ſans avoir de l'argent.

Raiſon théorique.

Je trouverois bien des raiſons pour nier cela, ſi je me piquois d'être Stoïcienne: mais je veux bien vous accorder qu'une certaine aiſance contribue au bonheur. Que s'enſuit-il?

Raiſon pratique.

C'eſt que l'homme de bien doit avoir de l'argent.

Raiſon théorique.

Je ne vois pas cette conſéquence; & je vois encore moins qu'il doit avoir d'autant plus d'argent qu'il a plus de vertu.

Raiſon pratique.

Mais moi, je le *veux*, je le *poſtule*.

Raiſon théorique.

Prenez-y garde, ma ſoeur; vous pouvez vouloir & poſtuler ce qui ne s'accorde pas avec l'ordre des choſes, c. à d. avec cet *enchaînement de cauſes et d'effets*, qui a lieu dans le ſyſtème de l'univers.

Raiſon pratique.

C'eſt juſtement ce ſyſtème que je ne veux pas; j'en poſtule un autre.

Raiſon théorique.

Oh! nous y voilà. Vous voulez donc un ſyſtème où l'homme de bien ait autant d'argent qu'il ſouhaite?

Raiſon pratique.

Sans doute.

Raiſon théorique.

Mais d'où ſavez-vous, ma ſoeur, que l'homme de bien, qui eſt pauvre dans le ſyſtème actuel, ſeroit plus heureux dans un autre où il auroit autant d'argent qu'il ſouhaite?

Raiſon pratique.

Vous parlez toujours de *ſavoir*, de *raiſons:* moi, en qualité de Raiſon pratique, je *veux* les choſes, & ma volonté me tient lieu de raiſon.

Raiſon théorique.

A la bonne heure; les volontés ſont libres: mais avec toute votre volonté & tous vos poſtulats, ma ſoeur, vous ne changerez pas l'ordre des choſes, & votre homme de bien n'en ſera pas plus riche.

On voit par le dialogue précédent (qu'on pourroit bien alonger s'il étoit néceſſaire) que la nouvelle démonſtration pour l'exiſtence de Dieu s'embarraſſe, dès le premier pas qu'elle fait, dans les queſtions les plus épineuſes. Une de ces queſtions eſt celle ſur l'*imperfection du ſyſtème actuel*, qu'il eſt impoſſible de prouver. On peut bien dire, que ceci ou cela dans le monde *moral* devroit être autrement; mais on ne prouvera jamais que cela ſoit poſſible, & encore moins qu'un autre ſyſtème, où telle ou telle choſe n'eût pas lieu, fût *meilleur*. Auſſi la nouvelle Philoſophie ſe garde-t-elle bien d'entreprendre une pareille dé-

monſtration: elle coupe court, en faiſant dire à la Raiſon pratique: *je le veux.*

Que l'homme de bien ſouhaite d'être mieux, & ſur tout d'être délivré des *peines de l'eſprit et du corps* qui troublent ſon bonheur, & dont ſa vertu ne le garantit pas toujours, cela eſt très-naturel, comme il eſt naturel à l'homme en général d'aſpirer à être plus heureux. Mais pour l'eſpérer, il lui faut des *raiſons*, s'il ne veut pas ſe livrer à de chimériques eſpérances.

Or en faiſant abſtraction de l'exiſtence d'un Être ſouverainement juſte, bon & ſage, & qui ſoit le Maître de l'Univers, l'homme de bien n'a aucune raiſon d'eſpérer qu'il ſera délivré des peines qui ont leur ſource dans un ſyſtème *qui ne dépend pas de lui.* Car dans ce cas, ce ſyſtème eſt ou l'ouvrage du haſard, ou celui de la néceſſité. S'il l'eſt du haſard, le ſort de l'homme de bien peut s'améliorer, mais il peut auſſi empirer. L'homme de bien n'a pas plus de raiſon d'eſpérer l'un que de craindre l'autre. Si le ſyſtème actuel eſt l'effet de la néceſſité; quelle force rompra la chaîne de ſes adverſités, forgée par les mains d'une aveugle fatalité? Voilà le cas où ſe trouve la Raiſon pratique de M. *Kant*, dans un argument qui commence par poſtuler une exacte proportion entre la Moralité & le Bonheur, *ſans établir auparavant l'Exiſtence de Dieu, qui n'en doit être que la conſéquence.*

Jusqu'ici, on a lié ſes idées d'une autre manière. On a commencé par établir l'exiſtence de Dieu, & l'on en a inféré que l'homme de bien a lieu d'eſpérer qu'il ſera mieux. Cette ancienne ſubordination d'idées vaut mieux, à mon avis, que la nouvelle.

Pour le montrer, mettons les deux raiſonnemens l'un à côté de l'autre:

Ancien Raiſonnement.

Si Dieu exiſte, l'homme de bien ſera tôt ou tard heureux.
Or, Dieu exiſte.
Donc, l'homme de bien ſera tôt ou tard heureux.

Nouveau Raiſonnement.

Si la Raiſon pratique poſtule une exacte proportion entre la Moralité & le Bonheur, Dieu exiſte.

Or, la Raiſon pratique poſtule une exacte proportion entre la Moralité & le Bonheur.

Donc, Dieu exiſte.

Nous avons vu que la mineure dans ce dernier raiſonnement, non ſeulement ne ſauroit être démontrée, mais qu'elle renferme de grandes incongruités, à moins qu'on ne prenne le Bonheur dans le ſens des Stoïciens.

Il en eſt tout autrement du premier raiſonnement, où l'on a de très-bonnes raiſons pour ſoutenir la mineure, & dont la majeure s'appuie ſur une liaiſon d'idées très-naturelle.

En effet, s'il exiſte un Être ſouverainement bon, juſte & ſage, Créateur & Ordonnateur de l'Univers, on peut ſuppoſer avec raiſon, que la *perfection toujours croiſſante* de ſes créatures, qui ſont douées de ſenſibilité & d'intelligence, eſt un de ſes principaux buts. Sa *bonté* lui fera vouloir tout ce qui peut contribuer à la perfection de ces êtres: ſa *juſtice* écartera d'eux toutes les peines qu'ils n'auront pas méritées; ſa *ſageſſe* ſaura choiſir les moyens les plus propres à ce but: enfin ſa ſouveraine *puiſſance* arrangera l'Univers de manière, que les choſes extérieures concourent au bonheur de ces êtres. Ce bonheur ne ſe bornera pas uniquement à celui dont la ſource eſt la vertu; car, comme *Leibnitz* dit très-bien *), „la vertu eſt la plus noble des qualités des choſes créées, mais ce n'eſt pas leur ſeule bonne qualité."

Cependant ce raiſonnement ne nous mène pas à cette *exacte proportion* entre la Moralité & le Bonheur, poſtulée par la Raiſon pratique moderne. C'eſt que le Bonheur n'eſt pas déterminé par la Moralité ſeule, & qu'à moins d'être Stoïcien, la vertu ne ſuffit pas à

*) *Théodicée*, § 124.

l'homme de bien (tant qu'il eſt *homme,*) pour le rendre heureux. Or quelles raiſons avons-nous d'eſpérer que la ſouveraine puiſſance, jointe à une ſageſſe infinie, arrangera les choſes dans l'Univers de manière, que l'homme de bien ſoit plus heureux *préciſément* à proportion qu'il eſt plus vertueux? De quel droit puis-je exiger de la juſtice de Dieu, qu'étant auſſi vertueux que *Newton* & *Leibnitz*, je ſois auſſi grand mathématicien que l'un, & auſſi grand métaphyſicien que l'autre? Il n'eſt pourtant pas douteux que les talens & les connoiſſances contribuent beaucoup à notre bonheur.

Il me ſemble que tout ce qu'un être ſenſible & intelligent peut raiſonnablement demander à l'Auteur de l'Univers, dont la bonté égale la ſouveraine puiſſance, c'eſt que la ſomme de ſes ſenſations agréables *ſurpaſſe* celle de ſes ſenſations désagréables. Mais cet *excédent* eſt une *quantité variable*, comme l'*x* des Algébriſtes; dans tel individu il eſt plus grand, dans tel autre il eſt moindre. On me demandera peut-être: mais par quoi cet excédent de bonheur eſt-il déterminé? Je réponds avec *Leibnitz:* par des *raiſons ſyſtématiques;* c. à d. que pour déterminer la portion de bonheur qui doit échoir à chaque individu, l'Auteur & l'Ordonnateur de l'Univers a eu égard au ſyſtème où il a placé cet individu, & qu'il s'eſt propoſé de rendre auſſi parfait que poſſible. C'eſt à cette *perfection ſyſtématique* que le bonheur même des êtres ſenſibles & intelligens doit être ſubordonné: car, comme *Leibnitz* dit encore *): „il n'eſt pas vrai à la rigueur, quoiqu'il paroiſſe plauſible, que les bienfaits que Dieu communique aux créatures qui ſont capables de félicité, ne tendent uniquement qu'à leur bonheur. La félicité de toutes les créatures raiſonnables eſt un des buts où il viſe, mais *elle n'eſt pas tout ſon but, ni même ſon dernier but.*" Suppoſons par exemple que chez *Newton*, l'excédent des ſenſations agréables ſur les désagréables ait été plus grand que chez aucun autre mortel; *Newton* aura été l'homme le plus heureux. Si l'on me demande: pourquoi cette

*) *Théod.* § 119.

cette grande différence entre *Newton* & d'autres hommes? je répondrai: c'eſt que le ſyſtème du monde, pour être le meilleur, exigeoit la découverte du *Calcul différentiel*, celle de la *Gravitation univerſelle*, l'*Analyſe des couleurs* &c.; par conſéquent l'exiſtence de *Newton*.

Je n'ai plus que deux réflexions à faire.

1°. Les anciens argumens pour l'exiſtence de Dieu ont ſans doute auſſi leurs difficultés; mais les idées dont ils ſe compoſent, & les principes ſur lesquels ils s'appuient, ſont plus ſimples, & leur liaiſon plus naturelle que dans l'argument dont ſe ſert la Philoſophie moderne pour prouver cette vérité.

Ils ont encore l'avantage de commencer par des *faits*, par exemple par le *Mouvement*, ou en général par les *changemens* qui ont lieu dans l'Univers; par l'*ordre* qu'on y obſerve; par cette *ſubordination de cauſes et d'effets* qu'on ne peut s'empêcher de regarder comme des *moyens* & des *fins*; au lieu que la nouvelle philoſophie commence par *poſtuler* des choſes qu'on ne lui accordera pas facilement, parce qu'elles ſont contraires à l'expérience.

2°. Il n'eſt peut-être pas indifférent de rectifier les idées ſur cette prétendue proportion entre la Moralité & le Bonheur, dans un temps où tant d'hommes croient qu'ils ne ſont pas auſſi heureux qu'ils mériteroient de l'être. On s'imagine communément, qu'il n'y a rien de plus aiſé que d'être homme de bien, & on ſe flatte qu'on eſt *meilleur* que les autres. Dites à un homme qui ſe fait cette illuſion, que la Raiſon pratique veut abſolument une exacte proportion entre la Moralité & le Bonheur; non ſeulement il ſera mécontent de ſon ſort, mais il ſe croira encore en droit de l'améliorer par des moyens illégitimes: car la vertu (par l'hypothèſe) ne lui procurant pas, dans l'ordre actuel des choſes, le bonheur auquel il aſpire, & qu'il croit lui être dû, il eſt naturel qu'il tâche d'y parvenir par *toutes ſortes de moyens* en ſon

pouvoir. Sans doute que l'homme vraiment vertueux, pour lequel la vertu, jointe à la recherche de la vérité, eſt une ſource intariſſable des plus douces jouiſſances, n'aura pas de pareilles tentations, ou du moins les vaincra facilement: mais combien d'hommes qui ſe piquent peu de vertu, & qui préféreroient le poulet de *Newton* à la découverte du Calcul différentiel!

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE

DES

SCIENCES

ET

BELLES-LETTRES.

CLASSE

DE BELLES-LETTRES.

Digitized by Google

SUR
les traces anciennes du Caractère des Nations modernes.

PAR M. L'ABBÉ DENINA *).

SECOND MÉMOIRE.

Nation Allemande.

§ 1. *Des cercles du Rhin, de la Suabe, de la Baſſe- et de la Haute-Saxe.*

D'aucune nation, ni européenne ni aſiatique, les auteurs anciens ne nous ont transmis un tableau auſſi achevé que l'eſt celui de l'allemande, que nous avons de Tacite, l'hiſtorien le plus politique, le plus exact & le plus vrai de toute l'antiquité, ſi l'on excepte Thucydide. Les Allemands modernes regardent avec raiſon ce tableau comme un des plus précieux monumens de l'antiquité. Céſar & Strabon avant Tacite, Zoſime & Ammien Marcellin long-temps après, ont parlé des Allemands, & ne les ont pas repréſentés ſous un aſpect différent. Les poëtes grecs n'eurent aucune connoiſſance de la Germanie, mais les latins, & Horace ſurtout, qui par des traits piquans a caractériſé pluſieurs des nations connues de ſon temps, n'a nommé que les Rhétiens & les Vindéliciens, c'eſt-à-dire les Tyroliens & les Bavarois. Mais lorsqu'il peignit les Scythes avec de ſi belles couleurs, peut-être a-t-il voulu parler des Germains, qu'anciennement on ne diſtinguoit guères des Scythes. Juvenal qui en parle quelquefois dans ſes ſatyres, eſt aſſez d'accord avec Tacite. L'un & l'autre oppoſoit aux moeurs corrom-

*) Lu à l'aſſemblée publique du 25 janvier 1798.

pues des Romains, la ſimplicité & les vertus des nations que d'ailleurs ils appeloient barbares. Claudien eut auſſi occaſion de parler de ſoldats & de capitaines ſortis de l'Allemagne, & n'en parle pas autrement que Tacite. C'eſt donc à celui-ci principalement qu'il faut s'en tenir pour connoître les ancêtres des Allemands, & comparer les anciens habitans de ce vaſte pays avec les modernes. Nous devons d'abord avouer que ce n'eſt plus que ſous quelques rapports que les Allemands reſſemblent encore aux anciens Germains; & c'eſt par un ſyſtème de gouvernement qui tient eſſentiellement de l'ariſtocratie, par l'inclination aſſez générale au métier de la guerre, par la condition des femmes *plus* avantageuſe en Allemagne qu'en tout autre pays; ajoutons l'état des payſans qui ſe rapproche beaucoup de celui des ſerfs des anciens Germains; le goût immodéré pour la boiſſon qu'on a tant de fois reproché aux Allemands, & qui cependant dans ce ſiècle a infiniment diminué; enfin le penchant au repos & à l'inaction (hors dans la guerre) dont on remarque encore les veſtiges dans les jeux ſédentaires & les amuſemens du bas peuple. Voilà en quoi les Allemands diffèrent des autres nations, & reſſemblent encore aux Germains du ſiècle de Trajan. Au reſte, ni les moeurs privées, ni l'esprit public, ni les pratiques religieuſes, ni la manière de faire la guerre, ni les armes, n'ont plus qu'un rapport éloigné aux anciennes coutumes, aux anciens uſages, aux anciennes moeurs. Quant à la guerre, il reſte à la nation encore quelque choſe de ce vieux temps lorsqu'elle n'avoit ni villes, ni châteaux, ni maiſons en maçonnerie, & n'avoit par conſéquent point de fortereſſes. C'eſt de là que tire ſon origine ce qu'on a obſervé tant de fois au ſujet des militaires allemands. Un très-fameux auteur (Machiavel) parlant d'eux ſous l'empereur Maximilien, dit qu'ils étoient à cet égard totalement divers des François. „Ceux-ci, dit-il, ſont habiles & vaillans dans les ſiéges, & foibles dans les batailles rangées; au lieu que les Allemands & les Suiſſes n'ont pas leurs égaux en bataille, mais ne valent rien pour défendre ni pour attaquer les places." Cette obſervation a lieu peut-être encore aujourd'hui; tous ceux qui ont parlé des guerres

de Fréderic II, de ſa tactique ſi célébre, de ſes réglemens, de ſes établiſſemens militaires, des généraux qu'il trouva & de ceux qu'il forma, conviennent généralement que ni lui ni ſes officiers n'excelloient autant dans les ſiéges que dans les autres opérations militaires. Je ne ſais ſi les Autrichiens & les autres Allemands ſe diſtinguent davantage dans cette partie, mais je ſais bien que ceux qui s'y diſtinguèrent contre les Pruſſiens, étoient ou François ou Italiens. Le général de Guasco étoit Piémontois. A d'autres égards, aucune des nations que les Romains ont connues n'a dû changer de caractère autant que la germanique, parce que l'air, le ſol & les objets de nourriture n'ont nulle part tant changé que dans ce pays. Cependant, ſi nous prenons ſéparément ce que Céſar, Strabon, Tacite & Ammien Marcellin nous diſent des différens peuples de l'Allemagne, nous y trouverons encore quelques traces du caractère de ceux qui habitent à préſent les mêmes contrées.

Les *Ubiens* occupoient du temps de Céſar le pays où un demi-ſiècle après on bâtit la ville de Cologne. Céſar dit que ce peuple étoit plus commerçant que guerrier; ce qui le rendit tributaire des Suéves, plus belliqueux & moins civiliſés qu'eux *). Auſſi l'hiſtoire ni d'Allemagne, ni de France, ni du pays particulier où ſe trouve Cologne, ne préſente que peu de faits qui puiſſent nous donner quelque idée des qualités militaires des habitans, tandis qu'il eſt ſouvent parlé de leur commerce. Auſſi cette ville eſt très-avantageuſement ſituée à cet égard; & comme les peuples commerçans, plus que les agricoles & guerriers, aiment la liberté, Cologne eut l'habileté de maintenir ſon indépendance, tandis que Trèves & Maïence ne le firent point.

Les écrivains du temps de Céſar & des premiers empereurs ont ſouvent fait mention des *Sicambres*, comme d'un peuple guerrier. Ceux qui leur ont ſuccédé, tels que les comtés de Gueldres & de la Lippe, ne ſemblent point avoir dégénéré. Les anciens Romains n'ont rien dit particulièrement des Maïençois ni des peuples qui habitoient les rives du

*) De bell. Gall. Lib. IV. C. 3.

Main, où eſt Francfort; mais les chroniqueurs & les romanciers françois du XIIème ſiècle, & les poëtes italiens qui les ont ſuivis & ſouvent copiés, n'en parlent pas avantageuſement. Comme ils ont été les premiers policés, ils ont auſſi les premiers contracté les vices qui ſuivent la civiliſation. Ils avoient dès avant le règne de l'empereur Julien commencé à bâtir des maiſons à la romaine, imité autant qu'ils pouvoient la nation dominante, & en ont contracté les qualités tant bonnes que mauvaiſes. Dans les deux poëmes ſi connus du comte Boyardo & de l'Arioſte ſur les amours & les fureurs de Roland, on ne nomme jamais les Maïençois qu'en les appelant traitres ou perfides. Ils auroient dû dire probablement, fins, adroits, ruſés. Ils devoient l'être plus que les autres Germains. Au reſte nous trouvons encore dans le caractère que Tacite nous trace des *Catti*, le portrait des Heſſois de nos jours, très-connus pour d'excellens ſoldats & habiles guerriers.

Le nom de la Saxe paroît tard dans l'hiſtoire ancienne. Il ſemble avoir remplacé en particulier celui des Suéves, dont les limites furent toujours indéterminées, ainſi que le ſont celles des Saxons du moyen age. Les Saxons que Charlemagne eut tant de peine à ſubjuguer, étoient ceux de la Baſſe-Saxe, qui comprend pricipalement les états de la maiſon de Brunswic & Lunebourg, ſitués entre le Weſer & l'Elbe. Les habitans de ce pays s'appeloient les uns *Cauces* & les autres *Chérusques*. L'éloge que Tacite fait des premiers, & ſes remarques ſur les autres, paroiſſent annoncer ce que les ſouverains de ces peuples ont fait dans les ſiècles ſuivans, lorsque la foible & inepte poſtérité de Charlemagne donna lieu à un nouveau rétabliſſement de l'empire d'Occident.

Les *Hermundures* ſont les anciens habitans de la Misnie, de la Thuringe & de la Franconie. Ce que Tacite en rapporte, nous indique la première origine du commerce de Leipſic, d'Erfurt, de Nuremberg & d'Augsbourg, & les progrès que la civiliſation & les arts ont faits dans ces contrées plutôt que dans les autres cercles d'Allemagne.

Mais la nation peu nombreuſe qui habitoit les rives droites peu fertiles de l'Elbe & la gauche de l'Oder, eut une ſi grande part à la révolution qui renverſa le premier empire d'Occident, & enſuite une ſi grande influence dans le troiſième, qu'il eſt trop à propos de rappeler ici ce que Tacite en dit. Aucun hiſtorien, aucun géographe ne met en doute que les Lombards n'ayent habité le pays où nous vivons, & qui fut enſuite appelé la Moyenne-Marche de Brandebourg. Probablement leur pays comprenoit auſſi une partie du duché de Magdebourg & de la principauté de Halberſtadt. „Les Lombards, dit-il, tirent leur gloire de leur foibleſſe apparente; quoiqu'environnés de redoutables voiſins, ils ne rampent devant perſonne, & ſe ſoutiennent en combattant & risquant tout pour la liberté." C'eſt ainſi que la Bletterie traduit ces deux lignes de Tacite. „*Longobardos paucitas nobilitat; quod plurimis ac valentiſſimis nationibus cincti, non per obſequium, ſed praeliis et periclitando tuti ſunt.*" (C. XL.) Y a-t-il aucun trait de plume ancienne qui ait peint plus exactement le caractère d'une nation? Les *Longobardi* que Tacite nous repréſente ſi vaillans & ſi ſages, étoient pourtant encore loin dans ce temps-là, de la célébrité qu'ils acquirent dans la ſuite. Leur population s'accrut tellement par un effet naturel de leurs moeurs, que le ſurcroît en fit émigrer une partie; & ce peuple brave auparavant & ferme pour ſe défendre, devint fort & puiſſant pour conquérir. Il envahit toute l'Italie occidentale, & fonda un royaume qui porta pendant plus de douze ſiècles le nom des conquérans. Le pays des *Longobardi* ſe trouva aſſez peuplé dans la ſuite; & le rôle que les ſouverains qui l'ont poſſédé jouèrent dans l'empire Germanique, prouve bien que les vertus des ancêtres s'y étoient conſervées au milieu des révolutions qui firent paſſer la couronne impériale aux Saxons, Franconiens, Suabes, Bavarois, Luxembourgeois & Autrichiens. Pluſieurs princes d'Allemagne poſſédoient des province plus grandes & plus riches que le Brandebourg, mais aucune des maiſons ſouveraines qui eurent la gloire de voir chez elles la couronne, le manteau & le ſceptre de Charlemagne, ne conſerva plus conſtamment

ſes anciennes poſſeſſions & ſon influence que celle du Hohenzollern-Brandebourg. Le portrait que Tacite traça des Lombards rappellera encore long-temps le rôle que le ſouverain de ce pays a joué dans le dix-huitième ſiècle. Trois grandes puiſſances, chacune desquelles ſurpaſſoit en nombre de ſujets & en revenus l'état pruſſien, ne purent lui enlever la moindre portion des provinces nouvellement conquiſes, & bien moins de ſes anciennes poſſeſſions. Ne diſſimulons pas que les troupes qui ont le mieux ſervi Fréderic dans ſes guerres, étoient des descendans de trois ou quatre nations anciennes dont l'hiſtoire des guerres romaines a diſtingué la valeur, & toutes établies dans les Cercles les moins riches de la Germanie. Car on ſait bien qu'outre les Brandebourgeois, iſſus des anciens Lombards, il y avoit des Weſtphaliens du comté de la Marche & du comté de Meurs, pays habités jadis par des Sicambres & des Belges que Céſar appeloit les plus valeureux des Gaulois. L'on ſait qu'une partie des troupes de Fréderic II dans la guerre de ſept ans à jamais mémorable, étoient Poméraniens. Or les Poméraniens qui depuis un ſiècle forment une partie ſi ſûre, ſi redoutable de l'armée pruſſienne, n'habitent-ils pas la même région ſablonneuſe qu'occupoient les *Semnones*, l'élite des Suéves, nation brave & belliqueuſe dont la domination s'étendoit depuis les bords de la Viſtule jusqu'au Rhin? ou ne ſont-ils pas iſſus de la race des Bourguignons, des Goths & des Vandales, qui ont conquis ou fondé des royaumes dans les Gaules & dans l'Espagne, & qui firent même admirer leurs vertus aux Romains? C'eſt d'eux que Salvien fait un magnifique éloge que je ne puis m'empêcher de rapporter dans ſes propres termes: „*Tantum apud illos (Vandalos) perfecit ſtudium caſtimoniae, tantum ſeveritas disciplinae, non ſolum quod ipſi caſti ſint, ſed, ut rem dicamus novam, rem incredibilem, rem paene etiam inauditam, caſtos etiam Romanos eſſe facerent.*"

La Siléſie, poſſeſſion nouvelle à l'époque de la guerre dont elle étoit le ſujet, ne pouvoit guères y avoir une part active. Cependant c'eſt à un Siléſien qu'on fut redevable de quelques victoires auſſi utiles qu'éclatantes. On ne doute pas que la Siléſie ne ſoit le pays qu'ont habi-

habité les *Quades*, qui ne furent connus des Romains que ſous les Antonins, & qui ſe firent aſſez connoître pour un peuple actif & guerrier. Le nom (*Slaz*) que leur ont donné les Sarmates ou les Polonois, leurs voiſins, nous autoriſe à croire qu'ils les trouvoient fins & adroits, car *Zla* qui en leur langue, dans la bouche du rival ou de l'ennemi, veut dire méchant, ne ſignifie ordinairement que fin ou ruſé.

Qu'il me ſoit permis d'obſerver en conſidération de ce qui fait l'objet de cette aſſemblée *), que ce pays des Quades eſt le théâtre où ont particulièrement déployé leurs talens & leur caractère, deux grands monarques qui ſeuls ont mérité le ſurnom de philoſophes, Marc-Aurèle & Fréderic II. Le premier fit deux fois la guerre aux Quades & aux Marcomans, c'eſt-à-dire en Siléſie, en Bohème & en Moravie; & c'eſt dans une de ces guerres qu'il ſe trouva réduit à de grandes extrémités dont il ſortit heureuſement par une pluie qu'on regarda comme miraculeuſe. C'eſt en Siléſie & en Bohème que Fréderic II remporta les victoires les plus ſignalées, les plus déciſives, & où il ſe trouva auſſi quelquefois dans de grandes détreſſes, où des événemens inattendus, mais d'une nature différente de la pluie qui ſauva l'armée romaine, contribuèrent beaucoup à faire triompher le monarque pruſſien. C'eſt encore ſur les rives de l'Oder, ou dans des contrées peu éloignées d'elle, que Marc-Aurèle écrivit, comme on a lieu de le croire, la principale partie des *Penſées philoſophiques;* & c'eſt en Siléſie ou dans ſes frontières, que Fréderic dans l'intervalle de ſes opérations militaires s'occupoit de philoſophie auſſi bien que de poéſie.

J'irois plus loin que je ne dois, ſi en continuant ce parallèle, je voulois raconter comment Marc-Aurèle après la première expédition contre les Quades & les Marcomans, ſouffrit les outrages & les inſolences de ſon ami Hérode Atticus, le plus grand ſavant de ce temps-là, & ſe réconcilia avec lui après la ſeconde expédition. Et nous ſa-

*) Ce mémoire a été lu dans l'aſſemblée publique inſtituée pour célébrer l'anniverſaire du rétabliſſement de l'Académie des Sciences de l'an 1745 ſous Fréderic II.

vons tous également, que Fréderic ſecond eut ſujet de s'indigner contre Voltaire après la ſeconde guerre de Siléſie, & lui rendit auſſi ſon amitié & ſes bonnes grâces après la troiſième, qu'on nomme la guerre de ſept ans.

L'empereur-philoſophe, pour perpétuer le témoignage de ſon eſtime à ceux qu'il regardoit comme ſes maîtres en philoſophie, fit placer dans la chapelle de ſon palais leurs images; notre grand Fréderic, qui regardoit Voltaire comme ſon maître en littérature, en fit faire & placer le buſte dans la ſalle de l'Académie, qui eſt en quelque ſens un ſanctuaire des ſciences & belles-lettres.

§ 2. *Des Bavarois et des Bohèmes.*

Les auteurs Saxons, Suabes & Palatins ne comptent pas les Bavarois & les Bohèmes parmi les Germains. Il eſt vrai que le Danube d'un côté, & les montagnes de l'autre, ſéparent ces deux provinces de la Germanie. Cependant depuis pluſieurs ſiècles elles ſont comptées pour les premiers membres du corps Germanique. Au ſurplus il n'eſt pas de mon ſujet de marquer les anciennes & les nouvelles frontières de l'Empire; mais bien de voir quel étoit & quel eſt l'esprit des nations qui en occupoient & qui en occupent le ſol. Les premiers habitans connus de la Bavière s'appeloient *Vindelici*. Les hiſtoriens Grecs & Romains n'en ont parlé que ſous le règne d'Auguſte, quoique cette partie de l'Europe ne dût pas être inconnue à Polybe. C'eſt par les victoires que remportèrent ſur les Vindéliciens & ſur les Rhétiens, Druſus & Tibère, que ces deux princes de la famille de Céſar commencèrent leur brillante carrière. Les Vindéliciens ne réſiſtèrent pas long-temps aux armées Romaines. Mais quoique ſubjugués en peu de temps, ils ne ſe montrèrent pas moins braves & moins courageux. Car c'étoit beaucoup d'oſer paroître en campagne contre une puiſſance qui tomboit ſur eux de trois côtés avec des forces immenſes, dans un temps où les Romains étoient plus aguerris que jamais, & la tactique portée chez eux au plus haut degré qu'elle eût jamais atteint. Les chefs de l'armée

Romaine qui après avoir ſoumis la Rhétie où le Tyrol, pouſſèrent vers le Danube contre les Vindéliciens ou Bavarois, étoient dans la première ardeur, dans cette vigueur de l'âge, au déclin duquel on retrouve rarement le héros. Cependant les deſcendans des Vindéliciens ne ſe préſentent jamais dans toutes les révolutions que l'empire Romain, puis l'empire Germanique, éprouvèrent après. Les ducs de Bavière qui ont le plus figuré dans l'hiſtoire d'Allemagne, n'étoient pas proprement Bavarois. Ce pays, qui eſt plat & fertile, a produit comme les autres de même nature, plutôt des ſoldats féroces que ces hommes de génie nés pour conduire des entrepriſes militaires, ou pour contribuer par leurs talens au progrès des arts. Les princes ſe ſont plus diſtingués par le luxe que par des exploits, & la nation en général par une ſuperſtition groſſière & des moeurs brutales & féroces. On trouveroit en Grèce & en Italie des peuples avec leſquels les Bavarois ont quelque reſſemblance. Mais les provinces tant de la Grèce que de l'Italie, dont les habitans pourroient ſe comparer à ceux de la Bavière, produiſent du vin; & cette production, accompagnée de l'air tempéré ſans lequel le vin ne croît pas, met de la différence entre les Béotiens, les Picéniens & les Vindéliciens. Deux frontières oppoſées de la Bavière, Saltzbourg au levant, & Augsbourg au ſud-eſt, diffèrent conſidérablement par leur ſol & leur poſition de la partie intermédiaire, où eſt la capitale. Auſſi les Saltzbourgeois & les Augsbourgeois ne reſſemblent pas trop aux habitans de Munich & de Paſſau.

Les Bohémiens, & par leur origine & par la qualité du pays qu'ils habitent, ſont auſſi différens des autres Allemands, que ceux-ci le ſont des Gaulois. Les plus anciens habitans connus étoient des Boïens, peuple gaulois que Céſar, juge compétent ſans doute, eſtimoit plus braves que les Allemands. Les Marcomans, dont Marobode étoit le chef & le roi, étoient auſſi comptés parmi les plus vaillans peuples de la Germanie, de l'aveu des Romains mêmes. Ils s'établirent alors ſi bien dans leur nouvelle patrie, que 150 ans après, l'empereur Marc-Aurèle qui entreprit de les ſoumettre, fut ſur le point d'y voir périr l'ar-

mée qu'il avoit conduite lui-même contr'eux. Des Illyriens, des Sarmates, peuples belliqueux, ſe mêlèrent aux Marcomans & au reſte des Boïens, & le pays ſe trouva peuplé de trois ou quatre races différentes, mais toutes également d'un caractère bien marqué. L'air du pays entouré de montagnes riches en minéraux dont les exhalaiſons ſont favorables aux qualités intellectuelles, arroſé par des rivières, traverſé par un grand fleuve, concourut encore à donner une trempe avantageuſe à la nation, qui par le local même devoit être diſtinguée de tous les peuples dont elle eſt entourée. Car aucune région de l'Europe n'eſt mieux conſtituée pour former, non pas un vaſte empire, mais un beau royaume, & donner aux habitans un caractère tout propre & particulier. Auſſi les Bohémiens, quoique formant une partie de l'empire Germanique, ont conſtamment été diſtingués des Allemands, non ſeulement par les priviléges de leurs rois, mais par leur propre caractère. Le bas peuple a donné de bons ſoldats, & la claſſe privilégiée de très-habiles généraux. Les Bohémiens cultivèrent tous les arts les plus utiles avec autant de ſuccès que les Allemands les plus ingénieux. Car non ſeulement ils ſe ſont diſtingués dans tous les métiers auquel le règne minéral fournit la matière, mais dans tous les autres. Le ſeul peintre non-Italien qui ait approché à quelques égards de la hauteur de Raphaël, du Titien, du Corrége, eſt Mengs natif Bohémien. Dans la littérature, la Bohème a produit des hommes d'une imagination vive & d'un caractère fortement prononcé, quoiqu'aucun d'eux ne ſoit compté parmi les auteurs généralement lus & eſtimés. L'uſage ordinaire de deux ou trois langues très-différentes entr'elles, empêche probablement les Bohèmes de compoſer avec ſuccès des livres de goût, dont le mérite principal eſt le ſtile; mais dans les ſciences, où l'on ne s'arrête pas autant à la diction, ils ne ſe font pas moins eſtimer que les nations voiſines, inférieurs cependant aux François & aux Anglois.

Aucune ville, aucune province de la Bohème ne ſe conſtitua jamais formellement en république, comme beaucoup de villes de la haute de la baſſe Allemagne & les cantons Suiſſes. Mais la nation conſerva

long-temps ſon indépendance & une conſtitution mixte avec une ſorte de liberté politique. Ce ne fut que par le rare bonheur de la maiſon d'Autriche, joint à une politique profonde, qu'on vint à bout d'en faire un état héréditaire, & d'en former une province de monarchie abſolue.

Les Zingari, diſeurs de bonne aventure, ne ſont-ils pas une eſpèce de poëtes ou de prophètes, plus ſemblables aux nations orientales & méridionales, aux Chaldéens, aux Égyptiens & ſans doute aux Provençaux, qu'à aucun des peuples allemands, ni même des Eſclavons?

Si les Bohèmes deſcendent de ces Marcomans auxquels Marc-Aurèle fit la guerre, ils n'ont pas à rougir de leur origine, & ſi les Marcomans avoient été conduits par Marobode comme nous venons de le dire, ils auroient un titre de plus pour s'en glorifier, & jamais de leur côté ils n'ont paru indignes deſcendans de ces braves ancêtres. Mais il eſt bien plus croyable que le gros de la nation ſoit d'origine illyrienne. Auſſi la langue eſclavonne eſt plus répandue dans le pays & plus commune que l'allemande, quoique tant de relations politiques & commerciales ayent dû répandre celle-ci & l'y établir ſeule, comme elle l'eſt en Siléſie. Dans cette ſuppoſition trop raiſonnable & trop fondée, on ſe perſuadera facilement que la nation Bohémienne conſerve encore l'eſprit & le caractère des Eſclavons, & plutôt des Eſclavons méridionaux, particulièrement des Dalmatiens, que de ceux du nord, Ruſſes & Polonois. Les colonies, qui du temps des Romains ſont venues des rives du Rhin s'établir ſur celle de l'Elbe, n'ont pas trouvé un ſol moins fertile, un air moins pur que celui qu'elles avoient quitté. Supérieure à tout autre égard aux cercles du Rhin, excepté pour l'abondance & la qualité du vin, la Bohème le trouve dans les pays qui confinent avec elle, l'Autriche & la Hongrie, & pour tous les autres moyens de ſubſiſtance, elle peut même en fournir aux autres.

Sous quelques rapports & dans quelque claſſe qu'on conſidère la nation, depuis que l'hiſtoire nous la préſente, on lui trouve un caractère des plus marquans. Hommes, femmes, guerriers, magiſtrats, miniſtres du culte, docteurs, artiſtes, citadins, payſans, laboureurs, artiſans,

ſe diſtinguent des autres peuples, tant par leur eſprit & leurs talens, que par leurs vertus & leurs vices. Je ſuppoſe bien qu'il y a beaucoup de fabuleux dans ce que les hiſtoriens rapportent des premiers ſouverains de la Bohème; mais le peu de fond vrai qui s'y trouve, ſuffit pour nous prouver que leur caractère original & primitif étoit fier, féroce, ſingulier, de l'aveu des chroniqueurs mêmes qui ont imaginé & débité ces faits. Voilà d'abord que le fondateur de la nation eſt un aventurier Croatien, obligé de quitter ſon pays, à cauſe d'un meurtre qu'il avoit commis. Sa fille Libuſſe montre un caractère plus que viril. Aucune des femmes célébres de l'antiquité ne lui eſt comparable en ſageſſe & en valeur. Une de ſes filles-de-chambre nommée *Velasca*, plus adroite que les Tyndarides, s'élève contre le ſouverain que Libuſſe avoit appelé de la charrue au trône, & établit une dynaſtie féminine plus fière que ne fut ou qu'on n'imagina celle des Amazones. Une troiſième femme ſe préſente, nommée *Sarea*, qui unit la ruſe atroce & l'impudicité d'une Médée & d'une Sémiramis; lorsqu'après cinq ou ſix ducs qui ſuccèdent à l'uſurpation de ces trois femmes, le caractère de la nation prend un autre aſpect par l'introduction du chriſtianisme, mais elle ne conſerve pas moins ces diſpoſitions qui la portent à des extrêmes oppoſés. Deux princeſſes ſe diſputent la régence, l'une ſouverainement bonne & pieuſe, l'autre extrêmement féroce & impie, Ludmilla & Drahomiva. Deux frères, fils de cette dernière, Wenceslas & Boleslas, premiers de ce nom, ſuccèdent à leur père & à la régence de leur mère. Wenceslas ſe ſignale par une piété qui le fait après ſa mort mettre au nombre des ſaints; l'autre, d'un caractère ambitieux & atroce, immole ſon propre père, puis ſon frère, à ſon ambition. Parmi ſes descendans les uns préfèrent la vie monaſtique à l'éclat du trône, d'autres ſe livrent à tous les transports de l'ambition & aux fureurs de la jalouſie du pouvoir. Udalric égaré par des courtiſans flatteurs & traitres, après avoir fait crever les yeux à ſon frère aîné pour reſter ſeul ſur le trône, s'amourache d'une payſanne qu'il trouve par haſard lavant ſon linge près d'un puits, & il l'épouſe. Son fils Bretislas conçoit de la paſſion pour la fille d'un empereur ſans

l'avoir vue & va l'enlever. Ottocar ſignale ſon orgueil & ſa fierté en refuſant l'Empire, parce qu'il regarde ſa couronne comme au-deſſus du diadème impérial. Le roi Jean de la race de Luxembourg, au contraire, ne dédaigne pas d'aller combattre comme un paladin pour les rois de France, qui alors n'étoit guères une plus grande puiſſance que la Bohème. Son fils Charles IV élu empereur, porta le faſte & la manie de la repréſentation à un degré inouï. C'eſt lui qui pour le plaiſir de ſe voir entouré & ſervi par des princes & de puiſſans prélats, publie en deux ſuperbes & faſtueuſes diètes la fameuſe bulle d'or, qui donna à l'Empire la forme & la conſtitution qui dure depuis quatre-cents ans, & qui court risque d'être renverſée au moment où j'écris ceci. Wenceslas VI qui lui ſuccéda ſur les deux trônes, porta l'inſouciance, le libertinage & la débauche auſſi loin que ſon père avoit porté l'ambition & le faſte. Dans la ſérie d'une centaine d'empereurs que l'hiſtoire de l'Europe nous rappelle, il ne s'en trouve aucun de plus vil & de plus mépriſable. Son frere Sigismond ſe diſtingue comme roi & comme empereur par une modération & une complaiſance ſans exemple, dans l'hiſtoire des empereurs, des rois & des maris de femmes infidèles & galantes. Il alloit d'un pays à l'autre trouver les autres rois, les papes, les prélats, pour négocier des accords & des réunions; il fut ſur le point de ſtipuler une convention avec Ziska ſon ſujet, qui auroit mis ſur la tête de ce fameux rebelle la plus grande partie de l'autorité ſouveraine. Il toléra presque ſans le moindre reproche & ſans reſſentiment les déſordres ſcandaleux de l'impératrice ſa femme, dont le libertinage de coeur & d'eſprit alla auſſi loin que la proſtitution de ſon corps. L'ancienne conſtitution du royaume étoit auſſi ſingulière que l'étoit le caractère de ſes ducs & de ſes rois, jusqu'à l'époque où la couronne paſſa à la maiſon d'Autriche. Jusqu'à Marie Thérèſe, c'étoit un état héréditaire, & cependant la nobleſſe en diſpoſoit, plaçant ſur le trône, & prêtant obéiſſance à ceux qu'elle jugeoit lui convenir, & l'on dépoſoit & maſſacroit ceux qu'elle avoit reconnus. Les nobles jouiſſoient d'une grande influence, comme partout où la couronne eſt élective; & ceux de cette claſſe qui s'avancèrent

dans la carrière militaire, ſurpaſſèrent ceux des autres nations par leur habileté & leurs ſuccès. Aucun monarque n'eut jamais à ſon ſervice un général qui le gênât ſi fort, comme *Wallenſtein* ſervit & gêna Ferdinandu. L'Allemagne, ſans en excepter les ſouverains les plus illuſtres par leurs exploits, n'a jamais eu un général d'auſſi grand caractère que le fut ce fier Bohémien.

L'eſprit religieux du peuple ne s'eſt pas montré moins extraordinaire que la fierté & la bravoure des princes & des grands. Le caractère des deux ſectaires ſi fameux, Jean Hus & Jérome de Prague, fut des plus exaltés & des plus féroces qu'on puiſſe trouver dans l'hiſtoire des novateurs en fait de religion, ainſi que de perſécution. A peine les plus illuſtres martyrs de la primitive égliſe ont-ils déployé plus de courage, plus de fermeté dans les ſouffrances *).

Dans les ſciences, & plus encore dans les arts, les Bohémiens ont pour le moins égalé les autres peuples de la nation tant Germanique qu'Esclavonne. Il eſt vrai que ſouvent indécis ſur le choix des langues dont ils pouvoient ſe ſervir également, en ſe livrant à l'étude & à la compoſition des ouvrages de quelque genre que ce ſoit, ils ont eu depuis trois ſiècles moins de facilité que les Allemands pour ſe diſtinguer & acquérir de la célébrité hors de leur pays.

§ 3. *Les Moraviens.*

La riche province qu'on nomme depuis ſix ſiècles Moravie, faiſoit partie de l'immenſe département de la Pannonie & de l'Illyrie, mais il eſt difficile de dire de quelle race étoient les peuples qui l'habitoient lorsque les Romains en firent la conquête ſous Trajan & ſous Marobode. Il eſt aſſez probable que ces *Marcomanni* qui ont occupé la Bohème, & les *Quadi* ancêtres des Siléſiens, ſe ſoient auſſi répandus ſur la rive gauche du Danube, où le March, qui donne le nom

*) *Aeneas Sylvius hiſt. Bohemica cap. XIII. et de Europa cap. 23 item in epiſt. 164 ad Nicolaum Quintum.*

nom à la Moravie, va groſſir ce grand fleuve. Mais c'eſt choſe certaine d'après tous ceux qui ont parlé des antiquités de ce pays, que la nation n'eſt pas d'origine germanique, mais eſclavonne: c'eſt pourquoi les Moraviens ſont comptés parmi les peuples non-allemands qui habitent l'Allemagne, & dans ce cas on entend par Allemagne tous les pays qui ſont partie de l'empire Germanique, & où l'allemand eſt la langue vulgaire & naturelle, ſeule ou dominante également avec un autre idiome, comme le ſont tant en Moravie qu'en Bohème la langue allemande & l'eſclavonne. Il n'eſt pas douteux au reſte, que la langue eſclavonne ne ſoit l'ancienne & propre langue des Moraviens, puisque le peuple ſouhaitant d'exercer le culte & de faire ſes prières en langue vulgaire, demanda & obtint du pape que les prêtres diſſent la meſſe & fiſſent l'office en cette langue. L'allemande ne fut introduite dans ce pays qu'après que des princes allemands s'en furent emparés & y régnèrent par longues ſucceſſions. Le caractère de la nation dut par conſéquent tenir plus de la férocité eſclavonne que de la bravoure germanique.

Etant d'origine la même race que celle des Bohémiens, leur caractère naturel ne doit pas être bien différent. Cependant les Moraviens n'ont jamais manifeſté autant de génie, autant de talent ſoit pour les arts ſoit pour les lettres, que l'on en remarque dans la nation Bohémienne. Cette différence peut avoir deux cauſes de nature diverſe. Deux races d'hommes à des époques différentes ſe ſont mêlées aux anciens habitans des deux rives de la Muer ou Muro, & de la haute Elbe; des Celtes, appelés Boji ou Marcomanni, nations Celtiques plus ſpirituelles & de temps immémorial plus civiliſées que l'Eſclavonne dans des temps poſtérieurs; depuis une race étrangère à l'Europe, venue de l'Egypte s'eſt répandue dans la patrie des anciens Boji & Marcomanni, & doit avoir cauſé quelqu'altération à l'ancien fond du caractère national.

Mais la cauſe principale de la différence que l'on trouve dans l'eſprit national des Bohémiens & des Moraviens, eſt ſans doute dans la différence phyſique de leur pays. La Moravie, province pour la plupart

graſſe, humide, & même un peu marécageuſe, n'influe pas de la même manière ſur l'eſprit des habitans, que les montagnes qui entourent la Bohème, & les grandes rivières qui la traverſent au beau milieu, & qui donnent à l'atmosphère une autre oscillation que ne peuvent lui donner les ruiſſeaux bourbeux & les plates prairies de la Moravie. Auſſi nous trouvons dans l'hiſtoire des ſciences & des arts pluſieurs Bohémiens depuis la première renaiſſance des lettres jusqu'à nos jours, & à peine quelques Moraviens. Dans le quatorzième ſiècle, lorsque tous les cercles d'Allemagne eurent au moins des ſcolaſtiques, & dans le quinzième, lorsque la Bohème & la Siléſie eurent des littérateurs & des ſavans de tout genre, la Moravie ne put compter que deux ou trois écrivains dont le nom ait pu paſſer à la poſtérité, car qui connoît Dalemil Mezritzky? Dans le ſiècle de Charles V tous les cercles de l'Allemagne ont produit des ſavans qui ont acquis de la renommée dans le reſte de l'Europe. La Moravie ne peut citer qu'un évêque d'Olmutz qui paſſa pour ſavant, & deux autres écrivains dont le nom paſſa à peine dans les villes autrichiennes, & n'arriva pas jusqu'en Italie.

Mais ce qu'on trouve de bien marqué dans les Moraves, c'eſt la férocité antiſociale que l'on a eu beaucoup plus de peine à bannir de cette province que de toutes les autres, ſujettes à la même domination, ou formant partie de l'empire Germanique. Dans le quinzième ſiècle peu de cercles d'Allemagne avoient pu ſe voir délivrés des brigandages qu'y exerçoient les petits ſeigneurs & barons & autres claſſes de voleurs de grands chemins. Mais ce fléau fut plus ſenſible dans la Moravie. C'eſt ce qu'Aeneas Sylvius a remarqué, lui qui connut ſi bien toutes les provinces de la maiſon d'Autriche & toute l'Allemagne.

§ 4. *Réflexions ſur l'orgueil, la jactance et l'ivrognerie que l'on reproche aux Allemands; ſur leur franchiſe et leur hoſpitalité.*

Pluſieurs hiſtoriens allemands accuſent la nation Autrichienne d'orgueil & de jactance; & les nations étrangères font le même reproche

aux Allemands en général. Arioviſte, le premier nom illuſtre que l'hiſtoire de la nation nous ait transmis, eſt auſſi le premier qui donna aux Romains l'idée de l'orgueil national. Sa réponſe à Céſar qui l'avoit invité à conférer avec lui, nous le prouve *). Arminius après lui en montra bien davantage; & Marobode, autre illuſtre Germain, fit bientôt après remarquer ſa jactance plus encore que ſon orgueil. *Neque Maroboduus jactantia ſui abſtinebat,* dit Tacite **). Ce même hiſtorien parlant ailleurs de Civilis, rappelle encore la vanité des Germains ***). Pluſieurs autres auteurs anciens nous apprennent que ce peuple ſe croyoit le premier peuple du monde. Mais les Carthaginois, les Romains, pour ne pas parler des autres peuples anciens, étoient-ils moins orgueilleux dans leur proſpérité, & même dans leurs revers? Ce début ſi ſouvent cité du discours d'Hannibal à Scipion, *Hannibal peto pacem;* n'eſt-il pas une ſorte de jactance? A combien d'autres peuples de leurs voiſins, aux Grecs ſurtout & aux Liguriens, les Romains n'ont-ils point reproché cette vanité? Et les Romains ont-ils jamais été bien modeſtes ou moins glorieux en parlant d'eux-mêmes? On peut le voir dans vingt endroits des ouvrages de Cicéron. Enfin toutes les nations qui ſe ſont trouvées dans un état floriſſant, après avoir remporté des victoires ſur leurs ennemis, n'ont pu s'empêcher de montrer de l'orgueil, & de vanter leurs exploits & leur puiſſance. Les Grecs & les Romains à différentes époques & à différens égards, s'annonçoient pour la nation la plus ſpirituelle, la plus ſage, la plus raiſonnable, la plus brave, la plus généreuſe. Les Vénitiens dans le quatorzième ſiècle, n'ont-ils pas indiſpoſé par leur orgueil tous les peuples & tous les ſouverains de l'Europe? Les Eſpagnols ſous Philippe II n'ont-ils point traité avec faſte & avec hauteur les autres nations? C'eſt préciſément du temps de Philippe III, que l'Eſpagne viſoit encore à la monarchie univerſelle; c'eſt du temps de la reine Eliſabeth, reine d'Angleterre, & dans les beaux jours de Henri IV,

*) De bello Gall. Lib. I, cap. 33. 34.
**) Tacit. Annal. Lib. I.
***) Ibid. Lib. II. *ſuperinſitam genti vanitatem.*

que le célébre Cluverius ayant pris à tâche de faire connoître l'Allemagne ancienne, a remarqué que presque tous les peuples d'Europe paroiſſoient avoir corrigé les Allemands de ce vice de jactance pour ſe l'approprier, en voulant ſe donner pour ſupérieurs les uns aux autres. Il eſt vrai qu'alors la nation allemande ſe voyoit éclipſée par les autres, & que l'orgueil national ſe trouvoit humilié par l'éclat dont brilloient les nations voiſines ſous différens rapports. Car les ſuccès & la prospérité ne manquent jamais d'enfler le coeur, d'inſpirer de l'orgueil; & la jactance eſt aſſez naturellement compagne de l'orgueil. Mais dans le ſiècle ſuivant, ſous le règne de l'empereur Charles VI, heureux jusqu'aux dernières années, enſuite par les victoires & les ſuccès de Fréderic II, la nation parut reprendre l'esprit de l'ancien temps, lorsqu'elle échappa au joug auquel les autres nations avoient été ſoumiſes par les Romains; & c'eſt depuis vingt ou trente ans préciſément qu'elle fait paroître une fierté qu'on ne lui trouvoit pas dans les ſiècles précédens, & qui donne lieu à l'ancien reproche de jactance.

L'ivrognerie qu'on lui a reprochée bien plus conſtamment que l'orgueil, n'eſt pas, non plus que l'orgueil, un vice particulier à la nation allemande, puisqu'on l'a reprochée aux Grecs, & que bien des Romains illuſtres ont mérité la réputation de fiers buveurs & d'ivrognes. Et quel eſt le pays connu où l'on n'en trouve pas? Cependant c'eſt aux Allemands que l'on a fait ce reproche dans le ſiècle d'Auguſte, avant qu'il y eût en Allemagne de la vigne, qui n'y a été introduite que deux ſiècles après. L'empereur Julien les trouva & les peignit auſſi comme grands buveurs. A meſure que le vin eſt devenu moins rare, par la facilité d'en avoir de France & d'Eſpagne, & la propagation des vignes au-delà du cinquantième degré de latitude, l'ivrognerie a dû être plus commune. Au commencement du XVIIème ſiècle elle l'étoit encore tellement, que Cluverius qui tâcha de juſtifier la nation des autres reproches, avoua clairement que ce vice régnoit encore plus que jamais; cependant les progrès ultérieurs de la civiliſation, & le com-

merce des Indes qui a introduit le café, ont ſenſiblement diminué l'ivrognerie, qui eſt plus naturelle, plus habituelle aux nations barbares qu'aux nations policées, & plus aux guerrières qu'aux commerçantes & pacifiques.

La franchiſe qui fit long-temps partie du caractère allemand, s'aſſocie aſſez bien avec l'ivrognerie; de là l'ancien proverbe *in vino veritas*. Ce mot de franchiſe eſt d'ailleurs à quelques égards ſynonyme de ruſticité, & cette qualité qu'on louoit autrefois dans les Allemands, ne put que diminuer à meſure que la nation devint plus polie. La franchiſe qu'on y trouve encore, ne ſe préſente guère qu'avec un reſte de ruſticité & de groſſièreté. D'ailleurs, la franchiſe ainſi que l'ivrognerie cauſe ſouvent des querelles; d'où eſt venue la réputation qu'ont les Allemands d'être querelleux. *Crebrae, ut inter vinolentos, rixae,* dit Tacite. Mais Diodore *) & Strabon **) diſent la même choſe des Gaulois, lorsque ceux-ci reſſembloient encore ſous bien des rapports aux Germains.

On vante encore à préſent l'hoſpitalité allemande, & certes non ſans raiſon, & c'eſt de cette vertu que l'on voit les traces très-marquées dans la deſcription de l'Allemagne ancienne. Mais cette hoſpitalité a dû auſſi ſe reſtreindre à meſure que l'Allemagne étendit ſon commerce & ſes relations avec les pays étrangers, & ſurtout depuis que les autres nations voyagent en Allemagne. Car l'hoſpitalité eſt plus cordiale, plus libérale dans les pays peu fréquentés. Auſſi les Polonois, chez qui l'on voyage moins qu'en Allemagne, ſont plus hoſpitaliers que les Allemands; & l'on dit que les Ruſſes & les Tartares plus hoſpitaliers encore que les Polonois, chacun pourtant à ſa façon & ſuivant ſes moyens. Dans les villes capitales d'un état on eſt moins hoſpitalier que dans les villes provinciales, & dans les villages plus que dans les villes. L'hoſpitalité eſt toujours en raiſon inverſe du luxe & de cet égoïsme dont on accuſe la génération actuelle des nations Européennes.

*) Biblioth. Lib. IV.
**) Geographia. Lib. IV.

§ 5. *Des Pannoniens et Hongrois.*

Les peuples qui ont habité la Hongrie, ſoit du temps d'Alexandre ſoit du temps de Céſar, pourroient bien être ſortis de l'Aſie, auſſi bien que d'autres nations européennes; mais ils n'avoient rien de commun avec les Daciens, les Moeſiens, & moins encore avec les Thraces, quoique ceux-ci fuſſent également originaires de la Scythie aſiatique. Ils avoient plus de rapport avec les Sarmates Jazyges avec lesquels ils confinoient au levant & au nord, & ſemblent n'avoir fait qu'une ſeule grande nation avec les Illyriens. Au moins eſt-il certain qu'ils avoient la même langue.

La Pannonie, qui étoit la partie ſeptentrionale de l'Illyrie, fut une des dernières conquêtes que firent les Romains, & celui qui ajouta cette province à l'empire, fut Trajan, le plus vaillant & le plus heureux empereur que Rome ait eu depuis Céſar. L'hiſtoire des guerres que les Romains ont faites aux Illyriens ou aux Pannoniens, nous aſſure que ces peuples étoient auſſi braves, mais moins féroces que les Thraces; nous trouvons enſuite que pluſieurs habiles généraux des armées romaines, dont quelques-uns parvinrent à l'empire, tels que Valérien & Dioclétien, étoient de ce pays-là. Dioclétien montra encore de grands talens dans l'art de gouverner, & de ſon temps ſes compatriotes montrèrent auſſi du penchant & des diſpoſitions aux arts pacifiques. Cependant on ne trouve pas un ſeul nom d'auteurs ni d'artiſtes que l'on puiſſe croire natif du pays compris ſous le nom de Hongrie, excepté Saint Jérôme, qui fut l'homme le plus ſavant de ſon ſiècle. Ce très-célébre docteur de l'égliſe, quoiqu'il eût été transporté à Rome dès ſon enfance, & qu'il y eût paſſé la plus grande partie de ſa jeuneſſe, a bien du rapport avec l'empereur Dioclétien, par une certaine énergie & fermeté dans ſes réſolutions, & même par une louable ſingularité de vie, quoique dans des principes & des vues extrêmement différentes.

Une irruption formidable de barbares ſortis des Scythes aſiatiques, apelés Huns ou Hungres, qui s'empara tellement de la Pannonie, qu'elle y

fit disparoître l'ancienne langue qui étoit l'eſclavonne, dut extrêmement changer le caractère des habitans, comme elle changea auſſi le langage. La ſeule férocité martiale ſe perpétua dans la nouvelle race d'hommes qui peuplèrent ces riches contrées, ſoit dans la portion reſtante des anciens habitans, ſoit dans les nouveaux venus, ſoit dans les races mêlées de l'ancienne nation ſubjuguée & de la nouvelle dominante. Cette nation compoſée doublement de races Scythiques & Tartares, puisque tant les habitans primitifs de l'Illyrie que les Huns étoient venus de la Tartarie, ſignala aſſez long-temps par des incurſions & des ravages, une barbarie par où Attila, premier fondateur du royaume de Hongrie, n'avoit pas méconnu les deſcendans des hordes qu'il avoit conduites en Europe. C'étoit l'inſtinct, ce n'étoit pas la pauvreté ni le manque de ſubſtances, qui les pouſſoit à des incurſions, à des ravages. L'Allemagne qu'ils parcoururent en brigands, n'étoit pas à beaucoup près un pays auſſi abondant de moyens de ſubſiſtance que leur nouvelle patrie. Après avoir embraſſé le chriſtianisme vers la fin du dixième ſiècle, ils ſe formèrent en nation civiliſée, à-peu-près comme la Bohème & la Pologne, & furent gouvernés par des rois qui étoient ou prétendoient être deſcendans d'Attila. Leurs lois, leurs moeurs ne ſe diſtinguoient pas beaucoup des autres nations chrétiennes. Ils montrèrent moins de férocité, moins de bravoure dans les Croiſades, les ſeules expéditions où les Européens avoient occaſion de ſignaler leur bravoure. Cependant pluſieurs de ces rois & de ces vaivodes qui étoient les gouverneurs de la Tranſylvanie, firent la guerre aux Ruſſes, aux Polonois avec ſuccès. Mais la valeur Hongroiſe ne ſe montra avec éclat, que lorsque les Turcs maîtres de la Valachie & de la Moldavie, menaçoient la Hongrie voiſine. Alors ce pays devint le théâtre de guerres continuelles entre les empereurs d'Allemagne qui étoient presque tous rois de Hongrie, & les Turcs. Depuis lors, en commençant par Ferdinand premier, les Hongrois ne peuvent qu'être guerriers, & il paroît à la vérité qu'ils n'étoient guères autre choſe; & ils continuoient d'être guerriers de la même manière

que l'étoient les Tartares leurs ancêtres, mais plus disciplinés & moins féroces que les Coſaques. Les peuples d'Italie & d'Allemagne ne connoiſſent les troupes Hongroiſes que comme troupes de cavalerie legère, qui ſe font plus craindre comme maraudeurs que comme guerriers combattans en bataille rangée. C'eſt en partie une conſéquence naturelle de leurs chevaux petits & légers. Leurs habits retracent encore viſiblement l'ancienne ſimplicité ou barbarie. Car on ſait que tant les ſoldats que le bas peuple Hongrois ſont vêtus de peaux de brebis ou d'autres animaux laineux; ce qui eſt l'ancien vêtement de l'homme dans les premiers âges du monde. Habitant d'un climat tempéré & poſſeſſeur d'un ſol fertile en toute production, tant du règne végétal que de l'animal & minéral, le Hongrois n'eſt guères porté à s'évertuer dans ſon propre pays, ni à ſe transférer dans un autre pour chercher ſa ſubſiſtance. Etienne Battori, Mathias Corvin & quelques autres rois de Hongrie ont favoriſé les lettres, les ſciences & les talens de tous genres, & pluſieurs riches & puiſſans ſeigneurs les ont aimés paſſionnément, & ont ſtipendié & nourri des artiſtes. Malgré cela le nombre des hommes illuſtres par leurs talens, excepté celui de la guerre, eſt incroyablement petit; & parmi le petit nombre, il n'en eſt pas un ſeul qu'on puiſſe dire ſavant, poëte, auteur, littérateur d'une certaine claſſe; presque tous ceux qui figurent le plus dans l'hiſtoire littéraire de Hongrie jusqu'à la fin du dernier ſiècle, étoient de la Dalmatie, province qui peut bien être compriſe dans le royaume de Hongrie, mais de nature fort différente du reſte de la Pannonie, car c'eſt un pays montagneux & ſtérile. Flaccus Illyricus & Paul Vergerius étoient même de l'Iſtrie. Cette portion de la Hongrie eſt pays eſclavon, & la nation, ainſi que la langue eſclavonne, eſt bien différente de la nation Hongroiſe. Le très-fameux George Martinuſius eſt le plus grand génie, quoiqu'il n'entre point dans la claſſe des auteurs que la Hongrie puiſſe vanter, comparable ſous pluſieurs rapports à Sixte-quint & au cardinal Ximenès, parce que de la condition la plus abjecte il parvint à gouverner avec une énergie admirable un grand état

ſous

ſous le ſimple habit & le titre de moine. Car il ne fut archevêque de Strygonie & cardinal qu'à la fin de ſes jours terminés par un exécrable aſſaſſinat. Or ce moine George Martinuſius étoit de la Croatie, province, encore plus que la Dalmatie, éloignée du centre du royaume Hongrois & de la Tranſylvanie qui en fait une partie eſſentielle. L'hiſtoire de trois ſiècles de culture ne datant que du règne de Matthias Corvinus, n'offre que ſix ou ſept hommes remarquables par leur ſcience & leur littérature, tels que Michel Bulyovsky, Nicolas Iſtvanfi, Paul Scalichius, Jean Sambuc, David Frölich, Daniel Moller & Thomas Jourdan; encore Frölich & Moller étoient Allemands d'origine, Jourdan François tant d'origine que d'éducation. Un pays ſi avantageuſement favoriſé de la nature, pourquoi ne s'eſt-il point diſtingué par aucune ſorte d'induſtrie, par aucun genre d'arts? Pourquoi la Hongrie, ſous la même latitude que la Bourgogne, la Suiſſe & la Suabe, eſt-elle reſtée ſi loin, je ne dis pas de ces trois pays, mais même de l'Écoſſe, ſi pauvre à tant d'égards & ſi éloignée du berceau des arts & du centre de la civiliſation? C'eſt premièrement par la même raiſon que l'eſprit Béotien eſt reſté loin de l'Athénien; c'eſt enſuite par l'effet de ſa conſtitution tant civile que religieuſe & de ſa poſition. Mais c'eſt ſurtout le voiſinage des Turcs, ignorans & ennemis jurés & obſtinés des ſciences, qui a été la cauſe principale du peu de progrès qu'elles ont fait en Hongrie & dans la Tranſylvanie. Aucune ſorte ni d'émulation ni d'encouragement ne pouvoit venir du côté de la Turquie aux Hongrois & Tranſylvaniens, au lieu que la Dalmatie, l'Eſclavonie, la Croatie en recevoient de l'Italie.

§ 6. *Les Tranſylvaniens.*

Ce pays reſſerré de trois côtés par trois grandes puiſſances, l'Autriche, la Ruſſie & la Turquie, comprend la Bulgarie, la Servie, la Valachie, la Moldavie; toutes enſemble elles équivalent à toute la Gaule Cisalpine & à la Vénétie, tant par l'étendue que par leurs richeſſes naturelles. Les deux premières formoient autrefois la Moeſie, les deux au-

tres la Dacie. L'une & l'autre ont produit des ſoldats robuſtes & courageux, ce qui ne fait point un titre d'éloge particulier, puiſqu'il n'y a point de pays fertile qui n'ait droit à un tel éloge. Au reſte, les Moeſiens ne ſe firent remarquer que par l'extrême ſaleté qui eſt aſſez naturelle aux habitans d'un pays gras & fertile, & par un très-grand penchant pour la muſique. Ce goût, ce talent ne paroit guères l'attribut d'un peuple qui a ſes habitations ſous le fumier, & qui ne ſe lave, ou n'eſt lavé, que trois fois, ou plutôt une ſeule fois dans la vie. (Car il eſt dit des Moeſiens qu'ils n'étoient lavés qu'à leur naiſſance, à leur mariage, & à leur mort.) Mais un peuple à qui la fertilité du ſol donne tous les moyens de ſubſiſter, un peuple qui ſe trouve facilement dans l'aiſance, n'a d'autre penchant naturel qu'à chanter, comme il en a pour la guerre par l'impatience du repos.

Les Daces, avant d'être conquis par les Romains, n'étoient connus que par la quantité d'eſclaves que les Grecs en avoient tirés, ſoit du temps des républiques d'Athènes & de Syracuſe, ou ſous les rois Macédoniens. C'eſt ce qui nous donne lieu de changer en *Dacus*, ou *Davus*, l'eſclave, ſerf ou domeſtique régulièrement introduit dans toutes les comédies de Plaute & de Térence, & qui devoit l'être dans celles de Ménandre, de Philemon & d'autres Grecs, auteurs de comédies, que les Latins ont imités ou copiés. Les Grecs appeloient *Davos* ceux que les Latins ont appelés *Dacos*. Ce perſonnage comique, ſot & ruſé prouve que les montagnards de la Moldavie, de la Moeſie & de la Valachie étoient pour les anciens ce que les habitans des Alpes ont été depuis & ſont encore à préſent, groſſiers & ruſés. Les habitans de ces quatre riches & malheureuſes contrées, ne ſont plus qu'en partie de l'ancienne race des Moeſiens & des Daces; car des hordes de Tartares, des colonies de Slaves, des Grecs & des Romains s'y ſont établies ſous les empereurs ſucceſſeurs de Trajan, d'autres ſous les ſucceſſeurs de Conſtantin. Mais il paroît que la ſervitude eſt l'état que la nature a deſtiné à ce pays. Anciennement les Daces étoient conduits & vendus eſclaves chez les autres nations. A préſent ils portent le joug que les puiſſances voiſines

& la Porte Ottomane particulièrement, leur impoſent de deux manières, en leur donnant un despote qui les opprime, & en les laiſſant encore opprimer, piller, accabler d'impoſitions paſſagères par ſes officiers & ſes miniſtres. Les individus qui s'expatrient ne changent que le mode de leur eſclavage: ils vont à Conſtantinople, où ils ſont forcés de ramper ſervilement ſous les Turcs, quel que ſoit l'emploi auquel ils ſe deſtinent. S'ils vont en Ruſſie, que peuvent-ils devenir? Ils n'ont ni la volonté ni la liberté d'aller ailleurs à cauſe de la religion qu'ils profeſſent.

SUR
le caractère des Peuples qui ont habité et de ceux qui habitent les îles de l'Archipel et de la Méditerranée.

PAR M. L'ABBÉ DENINA *).

TROISIÈME MÉMOIRE.

Un ancien proverbe ſemble nous prouver que les Grecs & les Italiens avoient une mauvaiſe opinion des inſulaires, & ſurtout des Siciliens, peuple compté long-temps parmi les Grecs, enſuite parmi les Italiens.

Cet adage fut ſans doute dicté par la jalouſie & la haine nationale, & prouve ſeulement que les peuples inſulaires étoient plus actifs, plus fins, & en général plus ſpirituels que ceux du continent, & que leur esprit ne différoit guères de celui des habitans des côtes montagneuſes de la mer, à qui la nature inſpire les mêmes penchans & diſpoſitions qu'aux habitans des îles, qui ſont ordinairement des pays montueux, & ont plus qu'aucune partie du continent de l'inclination pour le commerce. Au reſte, les peuples inſulaires diffèrent les uns des autres par les moeurs, les uſages, les goûts, autant au moins que les autres peuples; leurs caractères tiennent à la différence de leur origine, à celle de leur conſtitution, & ſurtout à la différence du produit de leur ſol & de leur voiſinage. Les habitans des trois principales îles de l'Archipel, Cypre, Crète ou Candie, & Rhodes, ſe ſont fort diſtingués par les

*) Lu à l'Académie le 22 novembre 1798.

mêmes talens & les mêmes moeurs. Cypre, tout proche de l'Égypte & de la Syrie, fertile en toutes ſes productions, tant en blé qu'en vin, en fruits, en métaux, eſt renommée par la vie délicieuſe qu'on y menoit, & c'eſt pour cela qu'on la ſuppoſa la patrie & le royaume de Vénus. Auſſi les peuples qui l'habitoient, ne ſe firent remarquer ni par de grands exploits maritimes, qu'ils ne négligèrent pourtant pas, ni par leur bravoure guerrière ni par la culture des ſciences & des arts. Trois autres îles moins grandes ont de quoi ſe vanter par ces titres, beaucoup plus que la délicieuſe Cypre. Rhodes, par exemple, pour ne pas parler de Samos, de Chio, de Cos & de Mitylène, Rhodes s'eſt rendu célébre à tous égards. Les Rhodiens ont ſurpaſſé les Athéniens & les Phéniciens dans l'art de la navigation, & ont balancé leur commerce. Ils ont porté chez eux tous les arts à la plus haute perfection; la ſculpture, la peinture, l'architecture ont fleuri chez eux avec éclat. L'éloquence, la poéſie, la philoſophie y ont été cultivées avec ſuccès, & même plus long-temps qu'à Athènes. Leur politique porta rarement à faux. Auſſi habiles politiques que valeureux guerriers, ils ne ſe ſont pas engagés ſouvent dans des guerres étrangères avec les grandes puiſſances de leur temps; & ils ont fait reſpecter leur neutralité pendant la guerre des Carthaginois & des Romains, & ſous les ſucceſſeurs d'Alexandre. La puiſſance Romaine menaçant tout l'Orient depuis que Carthage fut détruite, les Rhodiens crurent en prévenir les ſuites en ſoutenant Perſée roi de Macédoine, & ſe rendant médiateurs entre lui & le ſénat de Rome, ils le firent, dit-on, avec trop de hauteur, & indiſpoſèrent ces fiers conquérans. Les déroutes qu'eſſuya le roi de Macédoine obligèrent les Rhodiens à changer de ton; ils obtinrent d'être reçus comme alliés, mais il leur fallut abandonner au plus puiſſant leurs belles provinces dans le continent de l'Aſie-mineure, la Carie & la Lycie. L'acquiſition qu'ils avoient faite de ces deux provinces, eſt le ſeul fait qui nous montre que les Rhodiens ne furent pas exempts de l'esprit de conquêtes. On ne les taxa jamais ni de brigandages ni de pirateries; & ils furent pourtant les ſeuls inſulaires de l'an-

tiquité qui poſſédèrent des provinces en terre-ferme. Aucune des îles, ni de l'Archipel ni de la Méditerranée ni de l'Océan, excepté l'Angleterre, quoiqu'incomparablement plus grande que Rhodes, n'obtint cette gloire & cet avantage. Rhodes, comme tout le reſte de l'Aſie occidentale & de l'Europe orientale & méridionale, dut plier ſous le joug des Romains; mais elle conſerva plus qu'aucune des provinces conquiſes, ſes lois & une ſorte d'indépendance. Sous l'empereur Claude, ils avoient fait condamner & exécuter à mort des citoyens Romains, c'eſt-à-dire des hommes qui jouiſſoient du droit de bourgeoiſie romaine. Leurs parens ou leurs amis eurent aſſez de crédit pour obtenir vengeance de cette action, qu'on repréſentoit à l'empereur comme attentatoire à la majeſté du peuple romain. Claude les dépouilla de leur liberté, en les aſſujettiſſant à des gouverneurs & des magiſtrats qu'on leur envoya. Mais par de puiſſans amis & protecteurs, parmi leſquels ſe trouvoit le beau-fils & fils adoptif de l'empereur Néron, alors bien différent de ce qu'il devint après qu'il fut parvenu à l'empire, les Rhodiens recouvrèrent leur liberté, & Rhodes continua encore longtemps à être regardée comme république, ſous la protection de Rome, maîtreſſe de l'univers connu. La forme de ſon gouvernement étoit ariſtocratique, & même oligarchique, après avoir été anciennement une démocratie des plus furieuſes. Cependant la claſſe dominante ſe conduiſit avec tant de modération & de ſageſſe, que la conſtitution n'éprouva aucune forte ſecouſſe dans l'eſpace de pluſieurs ſiècles. Elle étoit ſous Auguſte & ſous Tibère encore la même qu'elle avoit été avant Philippe & Alexandre, rois de Macédoine, bonheur certainement aſſez rare dans tout état républicain. Mais il eſt plus rare encore qu'une nation floriſſante & puiſſante conſerve & ſes anciennes lois & ſes moeurs, comme ont fait les Rhodiens. Car il eſt impoſſible que la bonté du ſol & la proſpérité d'un commerce fort étendu n'amènent quelque ſorte de luxe, & à la ſuite du luxe, la molleſſe & le libertinage qui enfantent trop ſouvent la férocité. Cependant le luxe ne dut pas être effréné chez les Rhodiens; & la corruption des moeurs gagna chez eux beaucoup

moins & beaucoup plus tard que chez toutes les nations riches de leur fonds ou par leur commerce. Au moins nous voyons qu'à peine on a parlé de la ſomptuoſité & des excès de leurs repas, & on n'a nulle part reproché à Rhodes ni la galanterie ou la proſtitution des femmes, ni les débauches & le libertinage des hommes, ni même l'avarice ou la perfidie, comme on l'a fait aux autres peuples inſulaires, & particulièrement aux Crétois. Quelle pouvoit être la cauſe d'un caractère ſi généralement louable du peuple Rhodien? On ne l'attribue point à la ſageſſe particulière d'un législateur connu; car on ne le nomme point. Rhodes n'a pas non plus emprunté ſes lois d'un autre peuple, quoiqu'il eſt à préſumer que les auteurs de leur conſtitution ayent profité de l'exemple de quelque nation plus ancienne. Je ſerois porté à croire que c'eſt la ſageſſe flegmatique des Égyptiens, dont il eſt probable qu'une colonie ait peuplé cette île, jointe à l'eſprit grec & aux qualités phyſiques de pluſieurs ſortes, que les habitans ont trouvées dans l'île, qui contribua le plus à former un peuple plus ſpirituel que l'Égyptien, moins inquiet & moins turbulent que le Grec. Il eſt à remarquer que parmi les objets de la richeſſe de Rhodes, on n'a cité ni l'abondance de blé ni de gras pâturages ni de gros bétail, ſources ordinaires de la férocité & de la ſtupidité. C'eſt peut-être l'abondance de cet aliment qui acquit aux Crétois une réputation ſi différente de celle des Rhodiens.

Un vers que leur poëte Epiménide inſéra dans un certain ouvrage intitulé le Livre des Oracles, & qui fit regarder ce poëte comme ayant le don de prophétie, nous peint en peu de mots les Crétois, comme des menteurs éternels, de méchantes bêtes, des eſprits groſſiers & tardifs. Cette mauvaiſe réputation des Crétois étoit répandue dans toute l'Aſie & l'Afrique. Callimaque de Cyrène y donna encore de la vogue, en transportant dans une de ſes pièces le premier hémiſtiche du fameux vers. St Paul, quoique médiocrement verſé dans la lecture des poëtes grecs, l'avoit retenu, & c'eſt par lui qu'il nous a été transmis. Car au reſte les oeuvres d'Epiménide ne ſont pas parvenues jusqu'à nous. Il eſt ſingulier que cette nation dont on a ſi hautement prôné les lois,

ait été ſi généralement diffamée pour ſes moeurs, ſi peu conſidérée pour le peu de durée de la grandeur où elle étoit parvenue par quelques heureux ſuccès ſur les côtes de l'Aſie & de la Grèce. Cela nous rappelle cette belle ſentence d'Horace: *Quid leges ſine moribus vanae proficiunt?* Auſſi les légiſlateurs Crétois, quoiqu'ils ayent été regardés comme les modèles de Lycurgue, ont été blâmés d'avoir plus travaillé à punir les crimes qu'à les prévenir, en négligeant de former les moeurs de la nation à laquelle ils donnoient des lois. Mais ſait-on bien ſûrement, que Minos ou Rhadamante, ou quels que ſoient les vrais auteurs de la conſtitution Crétoiſe, n'ayent point ſongé à former les moeurs? Et n'eſt-ce pas pour cet objet qu'ils établirent des lois ſévères, & décernèrent des peines graves contre les délits même les plus légers? Il eſt probable que les moeurs, depuis long-temps corrompues, ou le caractère rétif de la nation, ayent été peu ſuſceptibles de réforme & d'amélioration. Ce qui eſt bien certain, c'eſt que placés au milieu de peuples policés, civiliſés & humains, civiliſés eux-mêmes depuis le ſiècle où vivoit Homère, les Crétois n'ont jamais figuré avantageuſement ſoit dans la guerre ſoit dans la paix; quoiqu'ils fuſſent aſſez bons ſoldats, très-habiles ſurtout à faire uſage de l'arc & des flèches. Ils devoient peut-être ce talent à quelque arbre ou roſeau propre à cette eſpèce d'arme, qui les rendit à cet égard ſupérieurs aux arbalêtriers grecs, italiens & de toute autre nation, ſans excepter les Parthes & les Scythes. La partie dominante de la nation, qui étoit la claſſe des riches, tiroit parti de l'habileté du peuple dans l'uſage de cette arme. Contens de régner chez eux, les ariſtocrates Crétois ne prirent part aux guerres de la Grèce, qu'en vendant aux Athéniens des troupes d'arbalêtriers pour les employer contre les Lacédémoniens, quoique leur conſtitution dût les attacher à Sparte plutôt qu'à Athènes. Mais les Spartiates étoient leurs voiſins, & voiſins devenus très-puiſſants, de ſorte que c'étoit l'intérêt des Crétois de favoriſer la puiſſance rivale de Sparte. En cela leur politique n'étoit pas fauſſe, hormis que pendant la grande querelle de

ces

ces deux républiques qui partageoient le reſte de la Grèce, ils euſſent pris le parti de la neutralité armée comme ont fait les Rhodiens.

Long-temps avant cette époque, qui eſt celle du progrès le plus remarquable des arts & des lettres chez les Grecs, la Créte avoit donné à la Grèce un de ces ſept Sages ſi renommés & ſi peu connus. Eſt-ce pour s'être trouvés également écartés de l'Aſie mineure & de l'Attique, ces deux grands berceaux de la littérature grecque, que les Crétois ont eu ſi peu de part dans ces progrès, ou eſt-ce par la nature du pays peu favorable à l'esprit des habitans? Il eſt vrai que les Laconiens & les Meſſéniens, qui étoient les peuples les plus voiſins de la Créte, ne pouvoient leur donner d'émulation par rapport aux études de la philoſophie, de la poéſie, de l'éloquence, de l'hiſtoire, comme auroient fait Smyrne, Colophon, Halicarnaſſe, Cos, Mitylène & Rhodes, ou les villes de l'Attique. Mais il eſt bien probable auſſi que la richeſſe naturelle du ſol Crétois n'ait pas été favorable aux qualités ſpirituelles, ni propre à éveiller ni à exercer vivement l'induſtrie des habitans. L'opulence de pluſieurs grandes villes Crétoiſes fut auſſi une des principales cauſes que la nation en commun ne fit ni des exploits brillans ni des conquêtes utiles hors de l'île, comme elle en auroit pu faire, & qu'elle fut bien ſouvent troublée, quelquefois enſanglantée par des guerres inteſtines. Dans l'île de Créte, parmi les quatre-vingt-dix ou cent villes qui lui font donner le nom de Centapole, on en comptoit cinq fort peuplées & fort puiſſantes, Gnoſſe, Gortyne, Cydonie, Phyſtus & Lyctus, lesquelles ne voulant dépendre l'une de l'autre, & rivaliſant ſans ceſſe, ne purent jamais ſe concerter pour aucune entrepriſe. La loi fondamentale du ſyncrétisme, qui obligeoit les différentes peuplades à prendre les armes toutes d'accord, au moment où une d'elles ſeroit attaquée par une puiſſance étrangère, fut à peine obſervée pour la défenſe, & ne paroît jamais avoir eu quelqu'effet pour prévenir les attaques, en portant la guerre chez l'étranger de qui l'on avoit à craindre; & cette loi qui auroit dû les réunir conſtamment, au moins pour la défenſe commune, ne put jamais éteindre les diviſions & les haines inteſtines.

Ces guerres & la nature du pays, ſervoient à entretenir l'eſprit martial, qu'on y trouva même encore ſous le gouvernement des empereurs de Conſtantinople, & ſous la domination des Vénitiens.

Si l'eſprit de conquête qui demandoit néceſſairement de l'union entre les différentes peuplades, n'anima pas les Crétois, l'eſprit de commerce inné chez toute nation maritime, & plus encore chez les inſulaires, fit ſortir de l'île, ſinon des colonies nombreuſes, du moins beaucoup d'individus & de familles entières, pour chercher ailleurs des établiſſemens; c'étoient ſurtout les Crétois de la partie montagneuſe que l'eſprit de commerce faiſoit expatrier, comme parmi les Italiens ce ſont les habitans des Alpes, & parmi les Bretons ce ſont les Ecoſſois, qui ont fait hors de leur pays des exploits, des affaires de négoce, des fondations, comme nous le dirons ailleurs.

Les Siciliens.

Les négocians, les artiſans, les ouvriers ou laboureurs Crétois n'avoient pas beſoin de naviguer bien loin, pour trouver du pain & de la fortune. La grande & fertile Sicile ſi voiſine leur offroit tout ce qu'ils pouvoient ſouhaiter. C'eſt le pays, où dans une antiquité très-reculée, ſont allés s'établir le plus grand nombre des colonies & des aventuriers ſortis de toutes les îles de l'Archipel & de la Méditerranée, & où ſe forma par conſéquent la nation la plus mélangée. On ne ſait par rapport à la Sicile, comme on ne le ſait guère d'aucun autre pays, quels ont été ſes premiers habitans. Thucydide, Ephore & d'autres anciens Grecs les font venir de l'Eſpagne. Silius Italicus adopta cette opinion, & les fait partir des Pyrénées *). Mais il eſt bien plus probable que l'Italie ait commencé à peupler l'île voiſine. Ce qui eſt ſûr, c'eſt que des Liguriens y étoient établis d'un temps immémorial, de même que des Phéniciens **) & des Grecs ***). Les Mégariens bâtirent Sélinonte, les Gélois Agrigente, les Ioniens de Samos Meſſine, mais c'étoit ſurtout ceux de Corinthe, ceux de Mégare, de l'Argolide, de la

*) Lib. XIV cap. 1. *Pyrene miſit populos.*

**) Thucydid. Lib. VI.

***) Vid. Marian. ap. Cluver. pag. 191.

Doride, & particulièrement les Crétois, qui allèrent s'établir en Sicile, comme nous venons de le dire.

Des colonies de ces mêmes Phocéens qui ont fondé Marſeille, concoururent également à peupler la Sicile, il en vint auſſi de la Theſſalie *). Lorsque l'hiſtoire de l'Europe commença à acquérir de la certitude par le travail du ſage Thucydide, on diſtinguoit en Sicile particulièrement trois claſſes d'habitans; les primitifs d'origine incertaine, qu'on appeloit *Siculos* & *Opicos*, les Grecs de différentes contrées, les Phéniciens que l'on confondoit ſouvent avec les Carthaginois **). Il étoit donc naturel que du temps des deux fameux Denys, tyrans de Syracuſe, devenue la ville principale de toute l'île, les Siciliens tinſſent un peu du caractère des trois nations, comme ils parloient trois langues différentes, c'eſt-à-dire 1° l'ancienne du pays, qui devoit reſſembler à l'Osque, ou Italienne méridionale, mêlée avec l'Etrusque & la Ligurienne, 2° la grecque & particulièrement le dialecte Dorique, 3° la phénicienne peu différente de la carthaginoiſe. Il paroît que du temps de Denys le jeune & de Dion, tous deux contemporains de Platon, c'étoit la langue phénicienne qui étoit la plus répandue; du moins nous voyons que Platon qui avoit paſſé quelque temps en Sicile, trouvoit que la langue grecque y étoit moins parlée que les deux autres. Les Carthaginois qui acquirent vers le même temps beaucoup d'influence & de pouvoir dans l'île, y donnèrent encore plus de vogue à l'idiome phénicien ou punique ***). C'eſt peut-être alors que les Siciliens ont donné ſujet au proverbe ſi ſouvent cité: *Inſulani mali, Siculi autem peſſimi*, puisque les Phéniciens & les Carthaginois ont toujours eu la réputation de ruſés & de perfides.

La Sicile a donné à la république des lettres des auteurs très-eſtimés, qui écrivoient en grec, & des génies ſupérieurs, qui n'écrivoient

*) Strab. Lib. VI.

**) Plato epiſt. ad Dionyſ. propinqu. apud. Cluver. pag. 28.

***) Apulée appeloit encore les Siciliens, peuple à trois langues, & cela deux ſiècles après que Diodore avoit écrit qu'on ne parloit plus en Sicile d'autre langue que la grecque.

pas dans une autre langue, tels que le médecin poëte Epicharme qui fut depuis l'âge de trois ans élevé en Sicile; Moſchus, Théocrite, l'hiſtorien Philiſtus, & l'incomparable mathématicien Archimède. L'uſage de la langue grecque ſe ſoutint même un ſiècle après que l'île paſſât ſous la domination romaine, car les Romains, quoique jaloux de propager leur langue, ne la rendirent jamais auſſi commune en Sicile qu'en Espagne & dans les Gaules. Dans les cinq ou ſix ſiècles qui s'écoulèrent depuis Marcellus qui conquit l'île, jusqu'à la translation de l'Empire à Conſtantinople, il n'y eut aucun Sicilien qui ait pris place ſur le Parnaſſe latin; les auteurs Siciliens que nous connoiſſons ont tous écrit en grec, dans le temps que la langue latine étoit déjà dominante. L'hiſtoriographe Diodore de Sicile écrivit en grec dans le temps même que Trogue Pompée Gaulois, auteur totalement du même genre, écrivoit en latin.

Si les Siciliens, par quelques perfidies, ont mérité d'être appelés des voiſins jaloux & envieux, les plus méchans des inſulaires, ils ont encore plus généralement acquis la réputation de peuples ſpirituels, & c'eſt des pays naturellement riches, celui à qui la richeſſe a le moins inſpiré de pareſſe ou de ſtupidité. C'eſt peut-être que la peſanteur qui naît d'un ſol gras & fertile, eſt contre-balancée par l'atmosphère ſulphureuſe qu'exhale le très-fameux volcan de l'Etna ou Mongibel.

A la première renaiſſance des lettres dans le 13me ſiècle, les Siciliens ont tellement paru avec diſtinction, que beaucoup de littérateurs les ont regardés comme les premiers reſtaurateurs de la poéſie, & même les inventeurs de la rime, caractère diſtinctif de la poëſie moderne. V. *Mongitor. Bibl. Sicula.*

La Sicile a eu des armées & des flottes du temps des anciens rois ou tyrans; cependant la nation ne fut jamais ni fièrement guerrière ni hardiment navigatrice.

Des Sardes, des Corſes, et des habitans des îles Baléares.

Un proverbe plus ancien peut-être & plus conſtaté que n'eſt celui qui traite les Siciliens comme un très-méchant peuple, préſente encore

les Sardes ſous un plus mauvais aſpect; le proverbe eſt exprimé en deux mots: *Sardi venales.* Nous le trouvons cité dans une épître de Cicéron, où indépendamment de ce qui donna lieu au proverbe, il parle aſſez mal de la nation; mais le proverbe *Sardi venales*, en le conſidérant dans ſon origine, nous ſert plutôt à fixer la cauſe & l'époque de la dépopulation de la Sardaigne, qu'à marquer le caractère des Sardes. Les Carthaginois, lorsqu'ils ſe furent rendus maîtres de la Sicile, voulurent s'emparer auſſi de la Sardaigne, dont la poſition leur étoit à quelques égards plus avantageuſe que celle de la Sicile, à cauſe de la proximité & de la commodité de ſes ports dans leurs guerres avec les Romains. Ils trouvèrent d'abord de la réſiſtance; car Magon fut vaincu & repouſſé. Cependant ils s'emparèrent ſans trop de peine de cette île, qu'ils furent quelque temps après forcés de céder aux Romains. Nous n'avons rien à dire ſur l'état de la Sardaigne & de ſes habitans avant l'époque des guerres puniques, à la ſeconde desquelles l'occupation de cette île paroît avoir donné lieu. Car les Carthaginois ayant été forcés de la céder aux Romains, après une grande déroute où Asdrubal perdit la vie, firent tous leurs efforts pour la recouvrer. Mais lorsqu'ils ſe virent contraints de l'abandonner, ils détruiſirent tout ce qui pouvoit donner de la valeur à cette poſſeſſion, en abattirent les arbres & les maiſons, exterminèrent les habitans autant qu'ils purent, comblèrent les canaux & les foſſés qui ſervoient à l'écoulement des eaux. Les inſulaires de leur côté ſoit pour reſter ſous la domination des Carthaginois leurs anciens maîtres, ſoit pour maintenir, pour recouvrer ou conſerver leur liberté, reprirent les armes contre les Romains, & furent vaincus. Le nombre des priſonniers & des eſclaves qu'on transporta à Rome & que l'on vendit à l'enchère, étoit ſi conſidérable, que cette vente dut ſe continuer long-temps; & le crieur ne ceſſoit de répéter ces paroles: Sardes à vendre! *Sardi venales!* Il falloit pour s'en défaire les donner à bas prix, de ſorte qu'on employa ces mots dans la ſuite pour marquer des choſes fort communes & de peu de valeur. Il faut pourtant convenir que puisqu'on eut plus de peine à trouver des ache-

teurs, que dans les autres encans du même genre, les eſclaves Sardes durent jugés être bons à peu de choſe. La réputation de peu de talens, de férocité & de barbarie leur reſta; c'eſt l'idée que Cicéron en avoit lorsqu'il parla de Tigellius à ſon ami Fabius Gallus. „C'eſt le ſeul homme, diſoit-il, qui ne me faſſe pas la cour comme tant d'autres, depuis que Céſar nous gouverne. Je compte ceci pour un gain, puiſque je ſuis ainſi dispenſé de ſupporter un homme plus abominable encore que ſa patrie, (*peſtilentiorem patria ſua*) vous ſavez le proverbe" (*habes Sardos venales, alium aliis nequiorem*). Cependant ce Tigellius étoit un très-célébre muſicien, non moins chéri pour ſon talent de Céſar que de l'empereur Auguſte, & qui paroît avoir été généralement aimé à cauſe de ſon caractère bienfaiſant & de ſa libéralité. C'eſt de lui qu'Horace parle dans la deuxième ſatyre du ſecond livre; & c'eſt le premier individu Sarde, dont il ſoit fait mention nommément dans les ouvrages qui nous reſtent des anciens. Seroit-ce donc dans l'art propre aux hommes efféminés, que les Carthaginois, & les Sardes iſſus d'eux, ſe diſtinguèrent le plus dans l'ancien temps? Il eſt remarquable que le plus illuſtre chanteur de Rome au ſiècle le plus floriſſant, ait été un Sarde & d'une nation des plus méridionales de l'Europe; mais cela peut être un cas particulier; & d'ailleurs ce Tigellius devoit être d'origine grecque, à en juger par le nom d'Hermogène qu'il portoit auſſi, quoique de la manière dont Horace en parle une troiſième fois, on ait lieu de croire que le goût de ce chantre en fait de poéſie ne fût pas le plus pur: *queis manus inſudet vulgi Hermogenisque Tigelli.*

On diſtinguoit en Sardaigne du temps de Céſar & d'Auguſte trois races d'habitans; les uns iſſus des colonies africaines, les autres d'origine Eſpagnole & Ligurienne; les troiſièmes de Phéniciens & de Grecs. Les deux premières étoient les plus connues par leur bravoure martiale. Ils eſt ſûr qu'ils ſe défendirent vaillamment, lorsque Mazeus, après avoir ſoumis la Sicile, alla les attaquer; car il fut tellement battu & repouſſé que les Carthaginois le condamnèrent à l'exil, malgré ſes victoires rem-

portées ailleurs *). La partie de la nation Sarde ſortie de l'Eſpagne & de l'Afrique, conſerva ſon indépendance lorsque l'autre ſubit le joug des Carthaginois, puis des Romains; elle gagna les montagnes & ſe roidit ſi fortement contre la rigueur de l'atmosphère, la ſtérilité du ſol & les attaques des ennemis, qu'elle étoit encore libre ſous les empereurs **). Mais ceux qui paſſèrent ſous la domination étrangère, pour couvrir la honte de leur ſoumiſſion, appeloient ceux qui s'étoient retirés & qui ſe maintenoient libres dans les montagnes, *Balari*, mot qui dans leur langue ſignifioit émigrés ou exilés. Il ſeroit naturel que les habitans de cette île euſſent retenu les moeurs, les uſages, les habillemens, & ſurtout la langue des nations dont ils étoient ſortis, mais auſſi a-t-on remarqué qu'une partie de la nation parloit & s'habilloit comme les Hiſpaniens, l'autre retenoit beaucoup des moeurs africaines, quelques-uns celles des Grecs. Cependant tout ce que nous trouvons concernant la Sardaigne & les Sardes, c'eſt que ſous les empereurs la Sardaigne étoit en même temps un des greniers de Rome & une eſpèce de priſon d'état, parce que c'eſt là qu'on reléguoit un grand nombre de Romains qui avoient le malheur de déplaire au deſpote. On fit ſouvent mention de l'inſalubrité de l'air, ſans que l'on puiſſe dire bien ſûrement ſi cette mauvaiſe qualité venoit de la dépopulation que les guerres carthaginoiſes & romaines lui cauſèrent, comme il eſt arrivé au pays des Volsques, ou ſi l'air étoit peſtilentiel dès avant la conquête. Quoi qu'il en ſoit, la grande fertilité du ſol & la qualité de l'air doivent également avoir contribué à faire des Sardes un peuple peu actif, peu induſtrieux, & dont à peine dans le cours de quinze ſiècles on a vu ſortir quelque homme qui ſe ſoit diſtingué par ſes talens, par ſes exploits, par des ouvrages de ſcience & de littérature. Lucifer, évêque de Cagliari, eſt presque le ſeul auteur que la Sardaigne ait fait connoître; & l'on ne ſait pas même s'il étoit Sarde de naiſſance ou d'une autre nation; comme il écrivit un latin dur, il eſt à croire qu'il étoit Africain.

*) Juſtin. Lib. XVIII. Diod. Sicul. Lib. XV.

**) Voy. Pauſan. in Phocicis, & Diod. Sicul. Lib. V.

Après la chute totale de l'empire d'Occident duquel reſſortiſſoit la Sardaigne, des Barbares de l'Afrique, puis des Italiens Toscans, des Eſpagnols, Catalans & Arragonois renouvelèrent dans cette île la population de trois différentes races, mais ſorties des mêmes pays d'où il paroît qu'étoient venues les anciennes colonies; elle redevint, comme il arrive généralement, province ou poſſeſſion des peuples du continent voiſin, mais ni les Catalans ni les Toscans ni aucunes de ces nouvelles colonies, de ces nouveaux maîtres, purent changer le caractère de ces inſulaires, & leur inſpirer, les uns leur activité, leur induſtrie, les autres leur goût pour les arts.

La race des Catalans, des Sarrazins dut produire des hommes fins, ruſés, & certes ces deux maîtres fripons que le poëte Dante a rendus célébres, frère Gomita & Michel Sanche, étoient bien dignes d'avoir des Sarrazins pour ancêtres.

On trouve à la vérité dans le 12ème & 13ème ſiècle quelques-uns de ces roitelets Sardes, appelés juges, ſe faire eſtimer par leur prudence ou par leur piété, tels que Bariſon & Ubalde. Mais en général le peuple croupiſſoit dans un état paſſif, dans l'inertie & dans l'ignorance; lorsque toute l'Europe ſortoit des ténèbres de la barbarie, & que même l'ancien pays des Sarmates, celui que les Huns ou Hongres avoient occupé, & tout le Nord avoient des ſavans, des artiſtes & des artiſans de tout genre, la Sardaigne étoit dans l'état où les autres pays avoient été dans le dixième ſiècle. Quelques Sardes, qui par bonheur avoient plus de connoiſſances, étoient forcés d'avouer que leurs compatriotes étoient négligens.

De tous les peuples inſulaires, depuis Chypre jusqu'à l'Irlande, les Sardes ſont ceux qui ont déployé le moins d'énergie & d'activité, ſi on excepte les Minorcains; auſſi ces pays ſi différens par leur étendue ſe reſſemblent-ils par la nature du ſol. L'on reproche également aux habitans de ces deux îles leur peu de ſoin pour la culture des arbres fruitiers, ſurtout des oliviers. Mais étoit-ce la pareſſe naturelle aux Sardes qui leur faiſoit négliger une culture ſi utile, ou bien eſt-ce qu'un

ſol

ſol moins propre pour cette culture, joint à l'ancien uſage de ſubſtituer à l'huile la graiſſe des animaux, rend le peuple lent, peſant & pareſſeux? Depuis près de deux ſiècles la plantation des oliviers s'eſt introduite ou a été repriſe, & l'esprit de la nation paroît s'être réveillé. Cependant les reproches faits aux Sardes lorsqu'ils ſortoient de la domination des Arragonois, n'ont lieu de nos jours dans ce ſiècle, mais c'eſt moins par le changement des cauſes phyſiques que par celui des cauſes morales. Nous ſavons qu'un miniſtre d'un caractère énergique & ferme a fait tout ce qu'un gouvernement peut faire dans une province éloignée du pays dominant, pour exciter l'induſtrie de ſes habitans. Auſſi depuis une quarantaine d'années on a vu paroître des productions de l'esprit Sarde, bien plus que dans les trois ou quatre ſiècles précédens. De l'aveu des auteurs Sardes mêmes, ce n'eſt que depuis 1750 ou 1755 que les arts ont pris ou fleuri dans ce royaume *).

Entre le peuple Sarde & le peuple Corſe la différence eſt très-remarquable. Quoique la Corſe ne comprenne ni en étendue ni en population que la moitié à peu-près de la Sardaigne, la nation qui l'habite a fait parler d'elle dix fois plus que la Sardaigne. Son origine & la nature du ſol qu'elle occupe devoit en faire un peuple robuſte, un peu ſauvage, & les objets communs de ſa nourriture lui procurer une longue vie. L'île fut peuplée par des Liguriens & des Cantabres, deux nations également belliqueuſes & induſtrieuſes par la même raiſon que l'eſt le peuple Corſe, c'eſt-à-dire par l'âpreté & la ſtérilité d'un pays où manquent les premiers objets de ſubſiſtance, le grain & la viande. Les premiers hiſtoriens & géographes, les poëtes & autres auteurs qui ont parlé de la Corſe, remarquent que les habitans y vivoient plus longtemps que dans les autres pays **), mais tous ſont d'accord à l'appeler un pays fort pauvre, dont la nourriture ordinaire étoit le miel, parce que ce pays couvert de bois, entretenoit des eſſaims innombrables

*) Voyez les notes de M. Porqueddu ſur le ch. 3ème de ſon poëme ſur les vers à ſoie intitulé: le Tréſor de la Sardaigne.

**) Stephani epitom. ap. Cluv. p. 499.

d'abeilles. Certes le blé n'y eſt nullement abondant. Le vin, l'huile, & les fruits qui y ſuppléent, ne le ſont pas beaucoup. La frugalité y doit être une vertu de néceſſité, & l'habitude du travail pour tirer des roches quelque produit y rend les hommes ſains & robuſtes, & la pauvreté du ſol attire plus tard la cupidité des nations conquérantes. Auſſi les Corſes ont été plus tard ſubjugués, & plus tard civiliſés. Cependant ils ne purent échapper au joug des Romains, & durent ſubir le ſort des Sardes. Mais dans le temps que la Sardaigne donnoit à la capitale de l'Empire des hommes diſtingués par des talens agréables, leſquels ne s'acquièrent que dans les pays riches & policés, la Corſe ne donnoit que des eſclaves, plus ſauvages & plus ſtupides que les bêtes, mais fidèles, laborieux, patiens, & très-utiles pour les ouvrages pénibles. Les uns les mépriſoient pour leur bétiſe, & regrettoient même l'argent qu'il leur en avoit coûté pour les acheter à vil prix *); d'autres les eſtimoient & cherchoient à s'en procurer à cauſe de leur fidélité **) & le ſervice qu'on en tiroit pour les choſes indiſpenſables de la vie. D'après ce qu'en dit Diodore de Sicile, qui ne devoit pas avoir des motifs pour les flatter, les Corſes étoient à Rome ſous les empereurs, ce que les Savoyards ſont à Paris. Ils conſervèrent ſi bien cette réputation de braves & fidèles, après qu'ils furent auſſi policés que tous les autres peuples, que même encore de nos jours la garde du pape étoit compoſée de Corſes.

M. Galanti qui a bien connu les Corſes, dit dans ſa Géographie (T. II, pag. 20), qu'ils *n'ont conſervé que les vices des peuples ſauvages.* Il veut dire ſans doute la férocité, & cette franchiſe ou ſimplicité qui tient de la groſſièreté & de la lourdiſe. Car au reſte ils ſont trop loin de reſſembler aux bêtes brutes, comme dit Théodore de Sicile. Il eſt vrai que les anciennes races corſes ſe ſont mêlées de nombreuſes colonies ou du moins des familles italiennes qui ont dû altérer l'ancien caractère de ces inſulaires. Les colons romains paroiſſent y avoir porté l'esprit dominateur de leur ancienne patrie; celle d'Iſtria l'esprit

*) Strab. lib. V.
**) Diod. Sicul.

fin & l'induſtrie active du Friaul; pluſieurs autres le génie très-connu des Toscans; mais il eſt bien certain que de nos jours on a vu ſortir de la Corſe des hommes de grand talent en tout genre, des orateurs, des poëtes, des philoſophes, & ſurtout des hommes d'état & des généraux *).

J'ai déjà dit en paſſant que l'île de Minorque a quelque rapport avec la Sardaigne; le ſol de Minorque eſt plus fertile, mais l'air y eſt plus peſant, le peuple y eſt moins actif, moins induſtrieux qu'il n'eſt en Corſe & à Majorque. Cependant les habitans de ces deux îles & ceux d'Iviça ont eu de tout temps une habileté extraordinaire à lancer des pierres avec la fronde; & ils ont fait par là, lorsqu'ils furent ſujets de Rome, une partie eſſentielle de ſes armées, comme auparavant de celles des Carthaginois. La fronde & les flèches ne ſont plus d'uſage dans la guerre depuis que les armes à feu ſont devenues communes. Mais les Minorquois ſe ſervent encore de la fronde pour conduire leurs troupeaux, ſoit de bétail ſoit de chevaux. Il ſeroit difficile de dire d'où eſt venu aux habitans des îles Baléares cette habileté, cette adreſſe particulière à manier la fronde, ſi ce n'eſt peut-être que dans l'enfance des nations, il fut plus facile à ces inſulaires d'avoir du chanvre, du lin ou du poil pour faire des frondes, & de ramaſſer des cailloux, que de ſe faire des arcs & des flèches.

*) On n'eſt pas bien décidé ſur l'origine de la famille de Buonaparte. Car d'un côté l'on trouve ce nom dans des anciens documens de l'île, & elle pouvoit être venue du pays Latin, comme celle de Colonna; d'un autre côté l'on ſait qu'il y a à Sanminiato en Toscane une famille de ce nom, que celle de Corſe reconnoit pour parente; ce qui n'eſt pas douteux, c'eſt que Napoleon Buonaparte unit le grand talent des anciens Romains *regere imperio populos*, à celui des ſciences & des arts, qui eſt ſi particulier aux Toscans, & ſurtout à ceux du diſtrict de Florence où eſt Sanminiato.

SUR
les Bévues littéraires, où l'on traite de leur influence ſur la Biographie.

PAR M. ERMAN *).

HUITIÈME MÉMOIRE.

Dans les mémoires précédens où j'ai entretenu cette illuſtre Académie de l'influence des Bévues littéraires dans la Mythologie, dans l'Hiſtoire & dans la Géographie, je me ſuis preſcrit deux règles générales, qu'il m'eſt plus eſſentiel encore de ſuivre dans le champ plus vaſte d'erreurs où je dois entrer aujourd'hui.

La première a été de n'indiquer, d'après mon travail & mes recueils ſur cette matière, que les mépriſes & les erreurs les plus remarquables, ſoit par leur objet & leur ſingularité, ſoit par la célébrité de ceux qui s'y ſont laiſſés entraîner, & dont l'autorité a pu les répandre davantage.

La ſeconde, qui ſe rapporte plus directement à mon but dans ce travail & aux réſultats que je voudrois en tirer pour la théorie de l'inſtruction littéraire & la direction de l'étude des humanités, a dû être de claſſer, autant que la choſe eſt praticable, les erreurs, ſurtout relativement aux cauſes qui les produiſent & les multiplient.

*) Lu à l'Académie le 18 janvier 1798.

Ce double fil me ſera ſurtout néceſſaire dans le vaſte labyrinthe des bévues que j'appelle Biographiques ou Bibliographiques, parce qu'elles ont trait à cette partie de la littérature qui embraſſe la connoiſſance des livres & des auteurs.

Les anciens n'ont guères connu cette partie, qui chez les modernes a pris un caractère presqu'effrayant d'immenſité. Rome & la Grèce n'offrent que peu d'auteurs qui ayent travaillé dans un genre, qui depuis la renaiſſance des lettres & l'invention de l'imprimerie, a exercé tant de plumes, & produit ſous toutes ſortes de formes des ouvrages ſi nombreux que leur connoiſſance ſeule forme une branche conſidérable d'érudition. Pendant que les doctes travaux du ſavant Fabricius ont renfermé dans une trentaine de volumes, tout ce qu'il a pu recueillir ſur les auteurs grecs & latins, on formeroit aujourd'hui la plus vaſte bibliothèque des ſeuls écrits relatifs à cet objet, & multipliés chez toutes les nations lettrées, au point qu'elles peuvent être accuſées de tomber dans l'extrémité contraire. Sans parler des dictionnaires, des journaux littéraires, des biographies particulières & ſouvent volumineuſes, des amples recueils de vies de ſavans, chaque nation & presque chaque ville où les lettres ont fleuri, chaque ſcience ou art offrent ſous le titre de *Bibliothèques* de nombreuſes & volumineuſes compilations, auprès desquelles diſparoît & s'évanouit tout ce que le plus grand travail a pu dans ce genre arracher aux ténèbres de l'antiquité. Celui qui dans d'autres rapports a mis pour le genre humain l'invention de l'imprimerie au même rang que les plaies d'Égypte, pourroit dans quelques-unes de ces plaies trouver ici des points du comparaiſon.

Un champ ſi vaſte & ſi fécond devoit ſans doute produire l'ivraie dans une abondance proportionnée à ſon étendue & à ſa fécondité, & ce ſeroit un ouvrage bien vaſte que celui où l'on recueilleroit d'après les obſervations des critiques, toutes les bévues où une foule de cauſes différentes ont fait tomber dans cet ordre de choſes. Mon plan me conduit à en rechercher les ſources principales.

J'ai eu occaſion d'indiquer dans mes lectures ſur les bévues hiſtoriques & géographiques, comme une des cauſes qui les ont multipliées à l'infini, l'uſage de traveſtir ou de traduire d'une langue dans l'autre les noms propres des perſonnes, des lieux, ce qui tantôt les rendoit méconnoiſſables, & tantôt faiſoit prendre le même perſonnage ou le même endroit pour des êtres différens.

Monſieur Baillet *) obſerve que les anciens ont uſé à cet égard d'une retenue que les modernes n'ont pas imitée. „A la vérité ils n'ont pas „fait difficulté de traduire en grec, s'ils écrivoient pour des Grecs, & „en latin, s'ils écrivoient pour des Latins, certains noms propres des „Perſans, des Syriens, des Égyptiens; mais il paroît que la plupart de „ces noms étoient moins des noms d'hommes que des noms de lieux „ou d'offices militaires & politiques. Hérodote, Quinte-Curce & les „autres qui ont exprimé en leur langue divers noms appellatifs de char„ges & dignités, & quelques noms propres de lieux dont la ſignifica„tion étoit utile à quelque choſe, ont été aſſez ſcrupuleux pour ne „pas toucher aux noms des hommes, ſi ce n'eſt pour leur donner une „terminaiſon dans la langue en laquelle ils écrivoient."

On n'uſa pas de la même réſerve à la renaiſſance des lettres, où les ſavans & les écrivains de presque toutes les nations introduiſirent un uſage qui devint général, & auquel on ne commença à déroger qu'à la fin du ſiècle paſſé. On eût dit que dans leur enthouſiasme pour les anciens, dont l'étude étoit leur paſſion dominante, & dont ils adoptèrent même la langue dans leurs écrits, les gens de lettres cherchoient à ſe naturaliſer comme citoyens de la Grèce & de Rome, en latiniſant & en gréciſant leur nom.

A la vérité il s'établit à cet égard une ſorte d'analogie qui pouvoit ſervir jusqu'à un certain point à découvrir & à rétablir les noms véritables auxquels on donnoit une phyſionomie grecque ou latine. Aux terminaiſons propres de chaque langue moderne furent affectées des terminaiſons correſpondantes dans les langues anciennes. A la faveur de

*) T. V. Partie III. p. 335.

ces formes reçues pour les finales on put retrouver aiſément *Pétau* dans *Petavius*, *Ansgaire* dans *Ansgarius*, *Mercier* dans *Mercerus*, *Longueuil* dans *Longolius*, *Amyrauld* dans *Amyraldus*, *Pareau*, *Daneau* dans *Parœus*, *Danæus*, *Valois* dans *Valeſius*, *Sorbon* dans *Sorbo*. La même analogie fut obſervée pour les changemens qu'on fit dans le corps même des noms en vue de les latiniſer davantage. L'uſage aſſez généralement ſuivi de ſubſtituer aux diphthongues françoiſes inconnues aux latins *au*, *ou*, *oi*, *ai*, l'*al*, l'*ol* ou l'*oe*, le ſimple *o*, ou l'*ae* des Latins, au *ch* le ſimple *c*, pouvoit être une clef pour reconnoître dans *Calvinus Chauvin*, dans *Albertus Aubert*, dans *Salmaſius Saumaiſe*, dans *Bolaeus Boileau*. Mais malheureuſement ces analogies n'eurent rien d'aſſez fixe pour ſervir de règles conſtantes, & pour ne pas induire en erreur. Les détails où Baillet entre ſur ce ſujet dans le cinquième volume de ſes *Jugemens ſur les ouvrages des Savans*, où il traite du déguiſement des auteurs, en fourniſſent la preuve. Il y remarque entr'autres que la ſeule terminaiſon latine en *aeus* eſt attachée également aux noms françois en *a*, en *au*, en *ay*, en *é* fermé, en *eau*, en *eu*, en *ey*, en *in*, en *an*, *en*, *ou*, & même à l'*é* muet final, ce qui rend ſans doute la reſtitution de ces mots difficile.

Cette difficulté priſe de la ſimple altération des mots, produite par le génie différent des langues anciennes & modernes, augmente encore conſidérablement par la différence de l'analogie de chaque langue particulière, où à la renaiſſance des lettres ces altérations furent d'un uſage univerſel. Pour retrouver *Benſina* dans *Avicenne*, & *Ben Bagheth* dans *Avenpace*, *Guaſtebledt* dans *Vatable*, *Does* dans *Douza*, *Schultze* dans *Sculterus*, *Marſigli* dans *Marſilius* &c., il faut ſans doute connoître le rapport des idiotiſmes de prononciation de l'Eſpagnol, du Hollandois, de l'Allemand & de l'Italien, avec les prononciations des autres langues.

Mais quand, à toute rigueur, & ſans être expoſé à de trop grandes mépriſes, on pourroit ſe tirer de cette première eſpèce d'altération ou de traveſtiſſement, ſeroit-il poſſible qu'on n'eût pas été & qu'on ne

fût pas induit en erreur par un autre genre de transmutation des noms des ſavans, qui ſurtout a produit dans la biographie une confuſion qui reſſemble à celle de la tour de Babel?

Depuis la renaiſſance des lettres, & presque jusqu'à la fin du ſiècle paſſé, il n'y eut guères de nom de ſavans, pour peu qu'il fût ſignificatif, qui, traduit en grec ou en latin, ne fit en quelque ſorte disparoître dans le monde littéraire le vrai nom des auteurs, qui le plus ſouvent même prirent dans la vie commune & firent paſſer à leurs descendans ces noms adoptés. De là, ſurtout en Allemagne & en Flandre, où la dureté des prononciations contraſtoit davantage avec la molleſſe & l'harmonie des langues anciennes, de là avec cette nombreuſe poſtérité de ſavans en *us*, que nous retrouvons encore dans presque toutes les conditions de la ſociété, tant de noms latins ou grecs que cet uſage a en quelque ſorte naturaliſés.

On a ſans doute beſoin d'un nomenclateur verſé dans la langue grecque & latine pour reconnoître dans

Oecolampade, *Hausſchein*,
Melanchthon, *Schwartzerde*,
Capnio, *Reuchlin*,
Capito, *Kœpflein*,
Pellicanus, *Kirſchner*,
Hoſpinianus, *Wirth*,
Néander, *Neumann*,
Bibliander, *Buchmann*,
Scapula, *l'Epaule*,
Musculus, *Mœuslein*,
Quercetanus, *Duchesne*,
Akakia, *Sans malice*,
Pontanus, *Bruck*,
Parſimonius, *Karg*,
Braſſicanus, *Kohlburg*,

Scævola

Scævola, *Gaucher de Sainte Marthe*,
Rivander, *Bachmann*.

Encore faudroit-il que le nomenclateur le plus inſtruit n'ignorât pas à quelle nation appartiennent ceux dont les noms ſont ainſi traveſtis, pour ne pas être expoſé à ſe méprendre ſur l'original véritable de la traduction. Sous le même nom de guerre ſont quelquefois cachés des perſonnages très-différens. Ainſi dans *Textor* ſe trouve *Texier* en France, & *Wollenweber* en Allemagne. Dans *Dryander*, *Eichmann* & *Enſina*, écrivain d'Eſpagne, où *enzina* eſt une ſorte de chêne. *Latomus* eſt *le Maſſon* en France, & en Allemagne *Steinſchneider* ou *Steinbrecher*. *Melanchthon* répond à *Chambrun* en France & à *Schwarzerde* en Allemagne.

Souvent notre nomenclateur trouveroit d'autres difficultés dans le déchiffrement de ces noms traduits des langues modernes en une langue ancienne. Je ne garantirois pas que ce fût toujours *Krafft* qu'il trouvât dans *Crato*, *Schnitter* dans *Agricola*, *Schieffer* précepteur de Maximilien II dans *Severus*, *Wildnauer* dans *Sylvius*, *Brand* dans *Titio*, *Birke* dans *Betulius*, *Jean de Hoefer* évêque de Warmie au XVème ſiècle dans *Johannes de Curiis*, *Kirchmaier* auteur du *Regnum Papiſticum* dans *Naogeorgus*, *la Clochette* dans *Campanella*, *la Motte* dans *Tubero*, *Schmidt* dans *Hepheſtion*, *van der Beck* dans *Torrentius*, *zum Gurt* dans *Perizonius*, *Feller* dans *Dermaſius* & *Bachtler* dans *Ellychnius*.

L'embarras pourroit encore augmenter pour lui dans les cas où ces changemens s'étendent aux noms de baptême, & vont jusqu'à aſſocier dans leurs déguiſemens les langues orientales aux deux langues ſavantes de l'Europe, comme l'ont fait quelques pſeudonymes. On en vit un exemple en France, où le célèbre *Pierre Daniel Huet* fut ſans doute difficile à reconnoître dans *Théocrite*, (*Daniel* en Hébreu) *de la Roche* (pour *Pierre*), & de *Pluvignac*, de ὑετος la pluie. L'Italien *Jean Victor Roſſi* n'eſt pas moins déguiſé dans la dénomination *Janus Nicius Erythræus*, qu'il prit au titre de ſa *Pinacotheca*. On ne trouveroit pas facilement *Pierre Viret* dans *Firmianus Chlorus*, *Jean Leclerc* dans *Theo-*

dorus Gorallus, (de l'Hébreu *Goral*, ſort, Κληρος) & *Theodore de Beze* dans *Nathanael Nezechius* (de *Nezech*, baiſer). Il faudroit peut-être la ſagacité d'Oedipe pour découvrir dans *Crotus Rubianus*, auteur, avec Ulric de Hutten, des fameuſes *Epiſtolae obſcurorum virorum*, & qui n'eſt connu que ſous ce nom dans l'hiſtoire de la Réformation, ſon véritable nom *Jaeger* pris de Κρότος, bruit que font les chaſſeurs, avec le patronymique *Rubianus*, de *rubus*, le déſignant comme natif de *Dornheim* en Thuringe.

La difficulté croît encore, & donne lieu, quand le même nom eſt traveſti différemment & en plus d'une langue, à multiplier un même homme. *Becker* eſt appelé également *Piſtorius* & *Artopœus*. Le nom de *Goetze* a été rendu par *Iconius* & *Jovius*. Le célèbre théologien françois *Chandieu* paroît au titre d'écrits différens tantôt ſous le nom de *Sadeel*, *campus*, champ de Dieu, & tantôt ſous celui de *Zamariel*, *canticum* ou cantique de Dieu. Le ſavant *Jean Gerard Voſſius* ſe déguiſe tantôt ſous le nom d'*Alopecius* & tantôt ſous celui de *Baſſarius*, qui l'un en grec & l'autre en phénicien, répondent à *Voſs*, en flamand *renard*.

Il eſt aiſé de comprendre combien a dû être féconde cette première ſource d'erreurs & de mépriſes biographiques. Elles ne ſont pas ſans doute d'une conſéquence auſſi grave que celles que deux de nos ſavans confrères déploroient dans les mémoires intéreſſans lus dans nos dernières ſéances par l'influence des variations & du défaut de fixité dans la langage philoſophique. Surtout il eſt bien plus facile de les prévenir & d'en arrêter le cours, ſi, comme il paroît que l'uſage dominant y porte aujourd'hui chez toutes les nations ſavantes, chacun prend le parti aſſez ſimple de ſe nommer par ſon nom.

Les effets des mépriſes de ce premier genre ont pourtant été quelquefois aſſez ſinguliers. Caſaubon ayant publié ſous le nom de *Hortibonus*, des remarques ſur Diogène Laërce, dont il fit uſage dans un autre ouvrage publié ſous ſon vrai nom, Ravius accuſa grièvement Caſaubon d'avoir pillé *Hortibonus*. S'il eût ſu que dans la province dont

étoit originire le ſavant critique françois, *caſau* eſt ſynonyme de *hortus*, jardin, il auroit peut-être démêlé plus facilement le pſeudonyme, & lui auroit épargné les reproches qu'il lui fait.

Pendant que Melanchthon & Bucer étoient ſévèrement mis à l'Index comme hérétiques, on liſoit ouvertement à Rome ceux de leurs ouvrages qui paroiſſoient ſous le nom de *Melangæus* & de *Felinus*, ſans en ſoupçonner les vrais auteurs.

Un de nos anciens confrères, Monſieur de Prémontval, ſe trouva il y a quelques années engagé en Hollande dans un procès dont la ſingularité amuſa le public, pour n'avoir pas vu dans *Panage*, la traduction grecque du nom de l'auteur du livre des Mœurs, Monſieur Touſſaint, & avoir attribué cet ouvrage à un honnête citoyen de Hollande, dont *Panage* étoit le nom, & qui étoit fort innocent des propoſitions mal-ſonnantes que Monſieur de Prémontval attaquoit dans l'ouvrage de Monſieur Touſſaint.

Je me hâte, Meſſieurs, de paſſer à d'autres eſpèces d'erreurs & de mépriſes dans la partie de la littérature qui eſt l'objet de ce mémoire. L'uſage de prendre pour ſon nom, ou du moins d'y ajouter le nom de la ville ou du pays auxquels on appartient, en faiſant quelquefois diſparoître le vrai nom des ſavans qui l'ont adopté, a donné lieu à plus d'une erreur dans la biographie.

Balbo, *Balbi* ou *Balbus*, moine jacobin du XIIIème ſiècle, auteur du Catholicon, n'eſt connu que ſous le nom de *Johannes Januenſis* ou de *Janua*, ancien nom de Gènes, dont il étoit originaire. Bayle remarque dans ſon dictionnaire, qu'on ne l'a cru auteur de la Légende dorée qu'en le confondant avec *Jacobus de Voragine*, archevêque de Gènes, & nommé pour cela *Januenſis* ou *de Janua*.

Le juriſconſulte *Baudouin* prenoit le nom d'*Atrebatius*, d'Arras ſa patrie & par une alluſion dans le goût de ſon ſiècle au juriſconſulte *Trebatius*. Il ſignoit ainſi les lettres qu'il écrivoit à Calvin.

Matthias Flacius Illyricus mort en 1575, professeur à Jena & l'un des collaborateurs les plus actifs du grand ouvrage des Centuriateurs de Magdebourg, étoit né à Albona en Illyrie. Son père se nommoit *André Flach*, qu'il convertit selon l'usage du temps en *Flacius*, en y ajoutant la qualification patronymique sous laquelle il est le plus connu.

André Gerhard, theologien de Marbourg, n'est presque connu que sous le nom d'*Hyperius*, qu'il prit du nom d'Ypres sa patrie.

On a reproché entr'autres erreurs de ce genre aux auteurs du Dictionnaire encyclopédique, de n'avoir pas reconnu dans *Vezelius*, Théodore de Beze, qui étant né à *Vezelay* en Bourgogne, ajoutoit à son nom dans le titre de ses ouvrages, cette dénomination, & d'avoir cité *Vezelius de repudiis*, comme un auteur différent du théologien de Genève.

George de Trebisonde & Müller de Königsberg sont devenus par la même raison, *Trapezuntius* & *Regiomontanus*; Alphonse Tostat est presque toujours cité sous le nom d'*Abulenus*, d'Avila. Le fameux Jérôme Savonarole porte en tête de plusieurs de ses écrits le nom de *Girolamo di Ferrara*.

L'usage où sont assez généralement les évêques de joindre à leur nom de baptême le nom de leur siége épiscopal, en omettant leur nom de famille, a fait naître une foule de méprises. On n'a pas toujours reconnu Bossuet dans les dénominations de Monsieur de Condom & de Monsieur de Meaux, que ces deux évêchés lui firent prendre successivement. On a confondu sous le nom d'*Armachanus*, le célèbre Usser, archevêque d'Armagh, avec d'autres savans qui ont occupé en Irlande le même siége. Le savant *Fischer*, évêque de Rochester, n'est presque connu que sous le nom de *Johannes Roffenus*, où il est sans doute aussi difficile à reconnoître que le célèbre *Parker* dans *Samuel Oxonienſis*.

Entr'autres erreurs on a relevé dans la vie de Fréderic II, de la Veaux, celle qui du célèbre chancelier de l'université de Halle, Ludewig, a fait *Louis de Halle*, chancelier du Roi de Prusse, & les jour-

naux anciens & modernes sont pleins d'observations sur les mépriſes de ce genre.

Ce seroit encore un bien long chapitre que celui des difficultés & des mépriſes qui dans la biographie sont nées & naissent tous les jours de ce qu'on pourroit appeler la pseudonymie volontaire des auteurs & de la diversité des moyens de déguisement auxquels ils ont recours.

Un des plus ordinaires est l'anagramme, & si Colletet a pu dire des anagrammatiſtes que ces renverseurs de mots ont la cervelle renverſée, on peut dire ici qu'ils renversent & tourmentent souvent la cervelle des autres. On ne devineroit pas d'abord dans *Pietro Soave Polano* l'anagramme de *Paolo Sarpi Veneto*, & le fameux Pierre Aretin n'est pas plus facile à retrouver dans le nom de *Partenio Etiro*, qu'il prit au titre de ses ouvrages de dévotion.

L'hiſtoire de Pierre le grand par *Jean Rousset* passera aisément pour l'ouvrage d'un Russe à la faveur de l'anagramme *Iwan Neſterouſanow*, & notre respectable Secrétaire perpétuel, Monsieur Formey, dont le nom anagrammatiquement renverſé donnoit celui de *Yemrof*, fit de même croire assez généralement que ses observations sur Racine étoient d'un auteur de cette nation.

Il n'y a pas long-temps que dans *Miſa de Renis* anagramme d'*amis réunis* placée à la tête d'un ouvrage de Franc-maçonnerie, on crut trouver le nom d'un individu qu'on chercha à découvrir, & que l'on crut avoir trouvé à Paris.

L'usage assez général chez les savans juifs, de réunir, pour en faire un seul mot, les lettres initiales de leurs noms & qualités, a donné lieu à des mépriſes singulières, & a créé dans la littérature orientale des auteurs qui n'y ont jamais existé. Les deux célèbres rabbins *Maimonides* & *Jarchi* ont été mécomnus sous le nom de *Rambam*, formé des initiales de *Rabbi Moſes Ben Maimon*, & de *Raſi* formé de *Rabbi Ben Jarchi* ou *Iſaaki*, comme *Radak* l'est de *Rabbi David Kimchi*, & *Ralbag* de *Rabbi Levi Ben Gerſon*.

Une imitation un peu forte de cette manière d'exprimer les noms par leurs initiales réunies, c'eſt celle où quelques théologiens d'Angleterre eurent recours vers le milieu du ſiècle paſſé, pour ſe déguiſer à la tête d'un ouvrage qui parut en 1641, ſur la liturgie Anglicane. Cinq auteurs avoient travaillé à l'ouvrage, *Stephan Marſhal, Edmond Calamy, Thomas Young, Matthieu Newcome* & *William Spaſtow*. Les initiales des noms propres & des noms de baptême réunis, en prenant ſeulement le double *W* pour U, donnèrent la nom de *Smectymnus*, ſous lequels l'ouvrage parut & peut ſans doute

aux Saumaiſes futurs préparer des tortures.

Je n'ajoute plus à ce catalogue aſſez long des erreurs biographiques, nées de l'altération volontaire des noms, que celles qui ont pu naître & qui ſont nées en ſi grand nombre de leurs altérations involontaires par les abréviations ou les fautes des copiſtes & des imprimeurs, & même par la ſimple prononciation.

Ainſi l'erreur ancienne d'un copiſte a changé *Iſidorus Peccator* en *Iſidorus Mercator* *), & cette faute relevée par le père Noël Alexandre a donné lieu à des mépriſes hiſtoriques.

Monſieur Hering dans ſon Hiſtoire de la réformation du Brandebourg **) obſerve qu'un de nos confrères, dans l'intéreſſant morceau ſur la femme blanche, inſéré dans le Journal de Berlin, a été induit par l'abréviation *Brand.* pour *Brandenburgenſis*, à déſigner ſous le nom de Brand, le recteur de l'école de Spandau, *Jacobi*, dont il exiſte un programme ſur cette opinion fabuleuſe.

C'eſt pour avoir lu mal dans le Ms. des poéſies de Fréderic le Grand, le nom du célébre peintre *Pesne*, écrit probablement par le Roi ſans *s*, & qu'il étoit facile de lire alors *père*, que Monſieur de Voltaire dans un de ſes accès d'humeur contre le Roi, eſt tombé dans une erreur

*) Journ. des Savans, T. V. p. 112.

**) *Erſte Beyträge, T. I. p.* 226.

véritablement plaiſante, ſurtout par l'induction qu'il en tire. Le Roi dans une de ſes Épîtres dit à Pesne:

Quel ſpectacle étonnant vient de frapper mes yeux?
Cher *Pesne*, ton pinceau t'égale au rang des Dieux.

Ce *père*, s'écrie plaiſamment Monſieur de Voltaire dans une lettre à Madame Denys en citant ces deux vers, *c'eſt un homme qu'il ne regarde pas; cependant c'eſt le cher père, c'eſt un Dieu; il pourroit bien en être de même de moi.*

Souvent même il ſuffit pour induire en erreur, d'un mal-entendu produit par une prononciation vicieuſe, ou qui puiſſe donner lieu à une fauſſe interprétation. Pendant qu'en Allemagne le peuple donnoit le nom d'*Armen Gecken Krieg*, à la guerre où le comte d'Armagnac commandoit les François, le peuple de France donnoit à *Mansfeld* qui dans ce royaume conduiſit des troupes Palatines, le nom de *Machefer*, & attachoit à ce nom une idée de terreur. Le Duchat rapporte qu'un prêtre, ſans doute un peu ignorant, qui aſſiſtoit à une thèſe de médecine où l'on répétoit ſouvent en le prononçant à la Françoiſe le mot de *ſymptoma*, ne vit dans la répétition de ce mot que des citations fréquentes de *Saint Thomas*.

Des mépriſes de ce genre ſont continuelles. Il eſt heureux qu'elles ne ſoient pas toujours auſſi funeſtes que celle que le Gendre rapporte dans ſon Traité de l'opinion, & qui eſt atteſtée par les témoins les plus dignes de foi. Vers le milieu du XIIème ſiècle *Eon de l'Etoile*, gentilhomme Breton, ſur ce qu'il entendoit prononcer à l'égliſe *per eon* (eum) *qui venturus eſt*, *per eondem Dominum*, ſe mit en tête & perſuada à pluſieurs ſectateurs que c'étoit lui qui étoit le fils de Dieu qui viendroit juger les vivans & les morts, & qu'il étoit le Seigneur de l'Univers. Ce fanatisme eut les ſuites les plus ſérieuſes, d'Eon ayant voulu faire valoir à force ouverte ſa qualité de Seigneur univerſel, & ayant entraîné après lui une nombreuſe populace qui commettoit les plus

grands excès. Il fut arrêté à Rheims, & cité devant le concile qui ſe tenoit en cette ville en 1148 & où le pape Eugène préſidoit. Son extravagance excita la compaſſion du pontife. Un de ſes diſciples fut jugé plus coupable, & condamné au feu. Les détails de cette ſingulière affaire ſe trouvent dans le neuvième Tome de l'Hiſtoire de l'égliſe Gallicane du père *Fontenay*. Il faut convenir que ſi d'*Eon* étoit de bonne foi dans ſa mépriſe, il y en a peu qui ſoient en même temps & plus groſſières par leur cauſe & plus effrayantes par leurs effets.

Génea-

Généalogie hiſtorique, diplomatique et raiſonnée de la Maiſon des anciens Comtes de Hohen-Zollern;

et, en particulier, de la branche de cette Maiſon qui a formé celle des Bourgraves de Nuremberg, devenue Electorale de Brandebourg et Royale de Pruſſe.

PAR M. LE CHEVALIER DE VERDY DU VERNOIS *).

Remarques préalables ſur la véritable origine de cette Maiſon.

La véritable origine de la Maiſon des anciens Comtes de Zollern offre encore aujourd'hui un problème hiſtorique à réſoudre. Ce n'eſt pas que cet objet important, quant à l'exactitude de l'Hiſtoire, ait échappé aux vues & aux recherches des généalogiſtes & des hiſtoriens de cette illuſtre Maiſon; mais la diverſité de leurs opinions & la multitude des ſyſtèmes que ces opinions ont produits, loin d'éclaircir ce point toujours obſcur de l'Hiſtoire, ſemblent au contraire l'envelopper de ténèbres nouvelles & plus difficiles à percer encore.

Parmi le très-grand nombre de ces auteurs, les uns prétendent que la Maiſon de Zollern ſort de la Maiſon italienne des *Colonnes;* les

*) Lu à l'Académie le 9 juillet 1798.

autres des *Aniciens* ou des *Perléoniens* de Rome; ceux-ci de la famille des rois de France de la première race; ceux-là de celle des Welphes. D'autres nomment encore différentes origines plus invraiſemblables les unes que les autres; de manière qu'aucun de ces ſyſtèmes n'étant ni discuté ni appuyé de preuves, aucun ne mérite confiance.

Pauli & Buchholtz, derniers hiſtoriographes de la Maiſon royale de Pruſſe & des états qu'elle poſſède, ont rapporté la plupart de ces ſyſtèmes; mais après les avoir très-légérement analyſés, aucun d'eux ne s'eſt pas même donné la peine de fixer ſon opinion ſur l'un de ces ſyſtèmes par préférence aux autres, & ils n'en ont émis aucun de leur propre chef. Pauli, qui compare un généalogiſte à un martyr, & qui n'entrevoit dans ſes travaux que beaucoup de peines ſans fruits, paroît s'être égayé plutôt aux dépens des auteurs de ces ſyſtèmes, que d'avoir eu le deſir de rechercher leurs erreurs & de prendre le ſoin de les corriger. Buchholtz, plus ſérieux & de meilleure foi, ſe borne à dire: „que les Maiſons de Zollern, de Habsbourg & des Welphes doivent „avoir une origine commune; mais qu'on ne doit la chercher que dans „les Maiſons des Rois Mérovingiens, & des Ducs de Suabe & d'Allé„manie."

Hubner, avant Buchholtz & Pauli, avoit pris cette route dans ſes recherches pour fixer une origine à la Maiſon de Zollern, qu'il rend commune à celles de Habsbourg, de Bade & de Lorraine; mais il n'entroit pas dans ſon admirable & vaſte plan de généalogies, qui ne concernoit que l'Hiſtoire en général, de juſtifier les ſyſtèmes particuliers qu'il avoit adoptés. Ainſi, malgré les travaux immenſes de ces trois auteurs modernes, l'objet à découvrir reſte encore ſous le voile obſcurci des tepms.

J'eſſaierai de ſoulever ce voile, en ſuivant le conſeil de Buchholtz, mais en cherchant, à l'appui des rapports de l'Hiſtoire & des combinaiſons du raiſonnement, tout ce qui pourra concourir au ſuccès de la découverte qui m'occupe. Je ſuivrai le travail ſyſtématique de Hubner; j'en analyſerai toutes les filiations, & ſi quelques articles me paroiſſent ſusceptibles de critique, je me permettrai de les éclaircir, en citant les autorités qui s'offriront à mes recherches.

Cet auteur fait remonter l'origine des Maiſons de Zollern, de Habsbourg, de Bade, de Lorraine &c. à Pharamond, prétendu premier Roi des Francs dans les Gaules, par Gerberge, femme d'Ega, maire du palais de Neuſtrie, & iſſue du ſang Mérovingien. J'ai prouvé dans mes Recherches ſur l'origine de la Maiſon des Landgraves de Heſſe que l'exiſtence de Pharamond eſt au moins douteuſe; qu'aucun des auteurs du ſiècle où il doit avoir vécu, ne fait, ſous aucun rapport, mention de ce prince; que dans la Chronologie des Rois de France, dreſſée par les Bénédictins de la Congrégation de St Maur, ces doctes & ſavans & laborieux cénobites ne placent à aucune époque de leur chronologie le nom de Pharamond, & qu'ils établiſſent pour le premier Roi des Francs *Théodemer*, fils du conſul *Ricimer* ou *Richomer*, qui floriſſoit en 384. (V. *Recherches ſur la vér. orig. de la ſéréniſſ. Maiſon des Landgraves de Heſſe, dans le Volume des Mémoires de l'Académie Royale de Pruſſe, années* 1796—1797). Or, d'après les autorités que je cite dans ces Recherches, on ne peut que ſuſpecter au moins le ſentiment du profeſſeur Hubner, qui donne pour ſouche à la Maiſon de Zollern un prince, qui au rapport des meilleurs critiques & des plus exacts hiſtoriens, n'a pas même exiſté.

Je conviens que de toutes les origines données à la Maiſon de Zollern, la plus vraiſemblable, ſous tous les rapports, eſt celle qui la fait

remonter à Ega, maire du palais de Neuſtrie, ſous le règne du premier des Dagoberts, au VIIème ſiècle. C'eſt auſſi à ce même *Ega* que nous la fixons. Son exiſtence eſt reconnue & prouvée. Celle de Gerberge, ſon épouſe, eſt moins certaine; & quand cette princeſſe ſeroit ſortie du ſang de Mérovée, comme le dit Hubner, raiſon pour laquelle il fait deſcendre la poſtérité d'Ega directement de Pharamond, une femme ne fait pas ſouche. Nous ne nous occuperons donc point des ancêtres de Gerberge. Nous chercherons une origine plus poſitive; & pour y parvenir plus ſûrement, nous avons ſuivi, par ascendance, les filiations qui ont précédé le premier des Comtes de Zollern, nommé Thaſſilon, & qui vivoit au temps de Charlemagne, jusqu'aux temps où la Diplomatie & l'Hiſtoire ceſſent de nous éclairer de leurs flambeaux. Or elles nous indiquent huit des ancêtres de Thaſſilon, à compter depuis ſon père Iſenbart jusqu'à Ega, au-delà duquel on ne trouve aucun monument qui puiſſe faire connoître la Maiſon de laquelle ſortoit ce maire du palais. Une charge auſſi importante ſuppoſoit que l'extraction de celui qui en étoit revêtu, n'étoit pas commune. Auſſi quelques auteurs ont-ils ſoupçonné qu'Ega étoit fils lui-même de ce *Richimer*, duc de France, que Hubner fait père de Gerberge & beau-père d'Ega. Quoi qu'il en ſoit, *Ega* étoit illuſtre par la charge qu'il occupoit, & le fut encore davantage par la manière dont il en remplit les fonctions. L'Hiſtoire a conſacré le ſouvenir de ſes mérites, en le qualifiant „d'homme ſage, prudent, riche & d'une probité reconnue." Elle ajoute: que l'an 638, Dagobert étant tombé malade à Clichy, & s'étant fait porter à St Denys, il aſſembla, avant que de mourir, les ſeigneurs pour leur recommander en particulier „Ega, maire du palais „de Neuſtrie, la reine Nantilde & ſon fils Clovis II. Ce dernier étoit „à peine âgé de cinq ans lorsque ſon père mourut. La reine Nantilde,

„ſa mère, femme d'une vertu éclairée, gouverna le royaume avec Ega." (V. *la Chron. des Rois de France dans l'Art de vérifier les dates*).

Sa conduite dans l'adminiſtration des affaires de l'état, & qui juſtifie pleinement l'idée que Dagobert avoit priſe de ſon zèle & de ſes talens, honore, ainſi que les éloges de l'Hiſtoire, & la mémoire d'Ega, & ſa poſtérité quelqu'illuſtre qu'elle puiſſe être. Il n'occupoit pas un trône, mais il adminiſtroit les fonctions de la royauté, & ſans doute à la ſatisfaction du prince qui en étoit revêtu, de l'État & des peuples qu'il gouverna; car l'office de maire du palais étoit, à quelques égards, au-deſſus de la royauté même. Voici quel étoit cet office:

„Le maire du palais étoit, ſous l'autorité des rois François, la première perſonne de l'État. Chacun des trois royaumes de Neuſtrie, de Bourgogne & d'Auſtraſie, ſoit qu'ils fuſſent diviſés entre pluſieurs ſouverains, ou réunis ſous une même tête, eut ſon maire du palais, qui étoit élu, non pas par le Roi, mais par les grands du royaume qu'il devoit gouverner. C'étoient proprement des vice-rois, d'autant plus indépendans qu'ils ne tenoient point leur inſtitution du ſouverain, & qu'il n'étoit point en ſon pouvoir de les deſtituer. Tel fut l'état de ces offices du temps de Dagobert, jusqu'à l'an 752, époque de leur abolition par l'élévation du maire Pépin à la royauté."

C'eſt donc *Ega*, maire du palais de Neuſtrie, que nous reconnoiſſons & que nous établirons à la tête de cette généalogie comme ſouche originelle de la Maiſon qui en eſt l'objet. Et comme il paroît conſtant que de ce même *Ega* descendent directement la Maiſon éteinte, mais ſi célébre, de Habsbourg, celles de Bade, de Hohen-Zollern & de Lorraine, actuellement exiſtantes encore, nous croyons devoir faire précéder cette généalogie du tableau de ces quatre Maiſons, par ordre

ſucceſſif de générations de pères en fils, depuis *Ega* jusqu'à *Fréderic Guillaume III*, Roi de Pruſſe, chef de la XXXXème des générations ſorties d'*Ega*.

Nous n'accompagnons ce tableau d'aucune remarque critique; notre intention n'étant que de mettre ſous un ſeul point de vue & la ſouche originelle & commune aux Maiſons qui y ſont déſignées, & l'origine particulière à chacune d'elles; conſervant & diſtinguant la ſérie des générations, en lignes directes, des chefs de ces illuſtres Maiſons.

Voyez ci-contre TABLE I, *Origine de la Maiſon de Hohen-Zollern, commune aux Maiſons de Habsbourg, de Bade et de Lorraine* *), & TABLE II, *Origine particulière à la Maiſon des premiers Comtes de Hohen-Zollern. Généalogie de la Maiſon des anciens Ducs et Comtes d'Alſace, de laquelle eſt iſſue celle des premiers Comtes de Hohen-Zollern.*

*) Hubner *Tabl. généal.* 124, 175, 228, 229, 230, 280, 281.
Grandidier *Hiſtoire de l'Egliſe de Strasbourg, Tom. I. p.* 341—347.
L'Art de vérifier les dates, édition de 1787, Paris, in fol. *Tom. III p.* 41, 62, 72, 337, 343, 351, 507, 511.
Pauli *Tom. II, p.* 5 *et ſuiv.*
Buchholtz *Tom. III, p.* 4 *et ſuiv.*

nue ; q

Digitized by Google

un i

nue ; qualités au-deſſus de tous les titres de la vanité, & dont l'Hiſtoire,

Digitized by Google

Notes et Remarques

ſur chacune des huit générations qui forment cette généalogie.

Origine de la Maiſon de Zollern.

Souche.

(1.) *Ega*, ou *Eganus*, & encore *Egon*, étoit, ſuivant pluſieurs auteurs, iſſu de la famille des rois Mérovingiens. Quelques-uns même lui donnent pour père Richimer, duc des François, descendant d'un des Rois de cette première race. (V. ci-devant pag. 60). Mais ſans nous arrêter à discuter cette opinion que nous ne trouvons fondée ſur aucun monument qui la juſtifie, nous nous bornons à regarder & à préſenter ici *Ega* comme ſouche originelle & commune aux Maiſons de Habsbourg, de Bade, de Hohen-Zollern & de Lorraine, ce que la ſuite de ces remarques va démontrer.

Il eſt certain qu'Ega, en ſa qualité de maire du palais de Neuſtrie, étoit, après le roi Dagobert, le premier perſonnage de ce royaume. Peut-être que ſa naiſſance, ou du moins ſon alliance avec une princeſſe du ſang royal, autant que ſes qualités & ſes ſervices, contribua au choix que Dagobert fit de lui pour lui confier la tutèle de ſon fils & ſucceſſeur, Clovis II, âgé d'environ cinq ans à la mort de ſon père. Ainſi, ſous ces rapports, l'illuſtration d'Ega lui étant perſonnelle, ſoit du côté de ſa naiſſance ſoit du côté de ſes propres mérites, étoit aſſez noble pour flatter l'amour-propre & l'honneur de la poſtérité iſſue d'une telle ſouche. Origine d'autant plus reſpectable qu'Ega fut *grand, vertueux, un adminiſtrateur intègre, prudent et ſage, un homme d'une probité reconnue;* qualités au-deſſus de tous les titres de la vanité, & dont l'Hiſtoire,

pour honorer dans tous les ſiècles la mémoire de celui qui les poſſédoit, s'eſt empreſſée de propager à jamais le ſouvenir.

Ega n'exerça la tutèle du jeune Clovis II que peu de temps après la mort de Dagobert, & environ trois ans. Hubner dit qu'il mourut en 646; c'eſt prolonger ſa vie de cinq à ſix ans. Selon D. Bouquet, il mourut à Clichy en 640, & ſelon D. Plancher en 641. Pauli a adopté cette même date, d'après Pregitzer & Rentz.

Nous avons dit que l'extraction d'Ega étoit inconnue. L'Hiſtoire du moins n'indique aucune trace ſûre qui pourroit conduire à la connoiſſance de ſes ancêtres; mais elle lui donne un fils qu'elle nomme *Erchinoald* ou *Archambaud*, & qui occupa quelque temps après ſon père, la charge éminente de maire du palais. (V. *ci-après ſon article*).

Pregitzer paroît ſoupçonner qu'Ega eut encore d'autres enfans; mais il ne parle que d'Erchinoald.

(2.) Hubner nomme la femme d'Ega *Gerberge*; & la dit fille de Richimer, duc en France, & de *Gertrude*, iſſue de Pharamond par *Anſebert*, ſon père & duc de Moſelle. C'eſt la raiſon pour laquelle ce généalogiſte fait remonter l'origine des Maiſons de Zollern, de Habsbourg & de Lorraine directement à ce premier Roi prétendu des Francs. (V. *ci-devant p.* 59, *ce que nous avons dit au ſujet de Pharamond et de Gerberge.*)

„La femme d'Ega, dit Pregitzer, étoit *Gerberge*, fille de Richimer, prince françois, & de *Ste Gertrude*, fille d'*Albéron* ou *Albéric*, fils aîné de Clodion, & auquel Mérovée enleva injuſtement la couronne." Cet auteur ne diffère ainſi du ſentiment de Hubner que par le nom du père de Gertrude. Pauli a préféré ſon opinion, que nous croyons en effet mieux fondée, Pregitzer paroiſſant avoir fait les recherches les plus profondes ſur tout ce qui concerne l'ancienne illuſtration de la Maiſon de Hohen-Zollern.

Première Génération.

(3.) Erchinoald ou Archambaud ne ſuccéda pas immédiatement à ſon père Ega dans l'office de maire du palais. Ce fut Flaocat qui dans une

une assemblée des grands du Royaume, convoquée à Orléans en 641, fut élu maire; mais étant mort peu de temps après, Archambaud fut revêtu de cette dignité.

Hubner prétend que ce fut en 646. C'est par une suite de l'erreur que nous lui avons reprochée ci-dessus, qu'il commet cette nouvelle faute. Il se trompe encore, ainsi que Pauli, en fixant la mort d'Archambaud à l'an 661. Il est démontré qu'elle arriva en 659, à l'époque à laquelle l'ambitieux & trop célébre Ebroïn fut promû par ses intrigues & ses forfaits à la place de maire du palais. (*V. la Chronologie des Rois de France dans l'Art de vérifier les dates, pag.* 546). L'Histoire accuse même Ebroïn d'avoir assassiné Erchinoald pour occuper sa place, & ce meurtre a dû se commettre l'an 659, comme on vient de le dire. (*V. Pauli, T. II, p.* 12.)

(4.) Leudésinde, femme d'Erchinoald, n'est guère connue que par son nom. Nous ne trouvons nulle part la Maison de laquelle elle sortoit.

Seconde Génération.

(5.) Il n'y a point de doute que Leudése ne soit né d'Erchinoald & de Leudésinde; du moins on ne trouve aucune contradiction à cet égard entre les auteurs qui ont parlé de ces trois personnages. Quant à l'époque à laquelle Leudése fut promû à la dignité de maire du palais, il y a apparence que ce fut en 670, que Thierri III monta sur le trône de Neustrie. Dépose peu de temps après, il fut de nouveau proclamé Roi en 673, & Leudése étoit alors en plein exercice de sa charge. Voici comme s'exprime le chronologiste des Rois de France de la première race au sujet de Thierri, de Leudése & d'Ebroïn.

„L'an 674 Ebroïn rebelle, se trouvant avec son nouveau Roi (prétendu fils de Clotaire III,) vers Paris, où peu s'en fallut qu'il ne surprît le Roi Thierri, ce prince prit la suite, accompagné de Leudése, son maire du palais & fils d'Erchinoald. Ebroïn avance jusqu'à Crecy en poursuivant son maître, prend le parti d'inviter Leudése à venir con-

férer avec lui, ſous promeſſe de ne lui faire aucun mal; mais à peine l'a-t-il en ſon pouvoir, qu'il l'aſſaſſine."

Ce paſſage prouve clairement que Leudéſe étoit en effet fils d'Erchinoald ou Archambaud, maire du palais de Neuſtrie, & qu'il mourut non point en 680, comme le dit Hubner, mais ſix ans plutôt & en 674.

Le père Vignier prouve encore que Leudéſe étoit fils d'Archambaud, & qu'il étoit père d'Adalric dont on va parler. (*V. la véritable origine des Maiſons d'Alſace, de Lorraine etc. Paris* 1649, *in fol.*)

(6.) Prégitzer, ſans nommer la femme de Leudéſe, dit qu'elle „descendoit de St Sigismond, Roi de Bourgogne, & qu'entre autres „enfans elle eut pour fils Adalric," qui ſuit. (*V. Pauli, T. II, p.* 12.)

Troiſième Génération.

(7.) Adalric, ou Ethic & Athic, étoit, malgré les conjectures de Lecointe & de Schöpflin ſur ſa naiſſance, fils de Leudéſe, maire du palais de Neuſtrie, comme le prouve invinciblement le père Vignier dans ſes Preuves ſur la véritable origine des Maiſons d'Alſace & de Lorraine. Blondel, Imhof, le père Benoît de Tours, Balcicourt, D. Calmet, Lignéville & autres ſont du ſentiment du père Vignier, & l'ont fortifié par de nouvelles preuves. (V. *p.* 4. *de l'Hiſtoire de Lorraine du marquis de Lignéville*). On y lit: „qu'Adalric étoit fils de Leudéſic, & „petit-fils d'Erchinoald, tous deux maires du palais & alliés des Rois „de France de la première race."

Si Lecointe & Schöpflin ont ſimplement *conjecturé* qu'Adalric étoit fils d'un Leuthaire, Duc des Allemands, c'eſt qu'ils ont confondu le nom de Leuthaire avec celui de Leudéſe, comme il eſt arrivé ſouvent à pluſieurs hiſtoriens. Quel étoit au reſte ce Duché d'Allémanie que gouvernoit ce prétendu Leuthaire, & qui avoit dû exiſter au milieu du VIIème ſiècle, ſuivant Lecointe & Schöpflin? Ce ne pouvoit être que la Suabe, qui étoit alors dépendante du Royaume d'Auſtraſie; car il eſt connu qu'après la victoire que Clovis remporta ſur les Suèves en 496, il ſoumit l'Alſace & la Suabe, & n'en fit qu'une province, qui dans la

ſuite eut le titre de Duché, comme adminiſtrée par un Duc ou Gouverneur. Or le premier de ces Ducs bénéficiaires ou Gouverneurs de l'Alſace & de la Suabe eſt appelé *Gundon*. Il vivoit dans le milieu du VIIème ſiècle, & mourut en 656. Le ſecond ſe nommoit *Boniface*, auquel Childéric II confia le gouvernement de ce Duché en 656, la même année de la mort de *Gundon*, & mourut lui-même en 662. (V. *l'Hiſtoire de l'égliſe de Strasbourg*, *T. I*, *p.* 341). Le troiſième enfin eſt *Adalric*, ſucceſſeur immédiat de Boniface, & le même dont il s'agit. (V. *la Chronologie des anciens Ducs d'Alſace et de Suabe*; *p.* 62 *et* 63).

Il eſt bon d'obſerver encore au ſujet d'Adalric, qu'ayant été déſigné par différens auteurs ſous pluſieurs noms, tels qu'*Ethic* & *Athic*, il eſt plus exact de le nommer *Adalric*, ainſi qu'il l'eſt dans le teſtament de Ste Odile, ſa fille, & dans les diplômes de Carloman & de Charlemagne de 770 & 810, pour l'abbaye d'Ebermunſter. (V. *l'Hiſtoire de l'égliſe de Strasbourg*, *T. I*, *p.* 42, & *T. II*, *pp.* 102 & 154).

Sur la fin de ſes jours Adalric ſe retira avec Behréſinde, ſa femme, à l'abbaye de Hohenbourg, qu'il avoit fondée, ainſi que celle d'Ebermunſter, & y mourut vers l'an 690, le 20 février. Behréſinde ne lui ſurvécut que de neuf jours.

Avant les ravages & les deſtructions, effets épouvantables & trop funeſtes de la révolution françoiſe, on voyoit encore dans l'une des chapelles de l'égliſe de Hohenbourg, le tombeau de ce fameux Duc. „Monument reſpectable, dit le chronologiſte des anciens Ducs d'Alſace „& de Suabe, puis qu'il renferme le corps de celui qui a donné tant „d'Empereurs à l'Allemagne, tant de Souverains & tant de héros à „l'Europe."

(8.) Il n'eſt point de doutes à élever ſur l'exiſtence, le nom & la naiſſance de Berſewinde ou Behréſinde, femme d'Adalric. Elle eſt généralement reconnue pour telle que nous la déſignons ſous ces trois rapports.

Quatrième Génération.

(9.) Odile fut, après une longue ſtérilité, le premier fruit du mariage qu'Adalric contracta avec Behréſinde ou Berſewinde, tante maternelle de St Léger, Evêque d'Autun. Elle naquit aveugle, & fut longtemps après, par ce défaut apparent d'organiſation, le rebut de ſon père; mais ayant recouvré la vue, elle devint l'objet de ſes plus tendres ſollicitudes. Il voulut l'engager dans les liens du mariage; elle s'y refuſa. Elevée loin de la maiſon paternelle & dans le monaſtère de Beaume-les-Dames, elle y prit le goût de la retraite & de la vie monaſtique. Adalric reſpectant cette vocation, contribua avec elle à fonder la fameuſe abbaye de Hohenbourg, dont elle fut la première Abbeſſe, & où elle mourut dans un âge très-avancé, vers l'an 720, le 13 Décembre. (V. *l'Hiſtoire de l'égliſe de Strasbourg, T. I, pag.* 341 *et ſuivante*).

(10.) Adalbert, l'aîné des fils d'Adalric & ſon ſucceſſeur au Duché d'Alſace, étoit Comte du Nordgaw du vivant de ſon père.

L'Alſace étoit alors partagée en deux grands comtés, adminiſtrés par des Comtes, ſous l'autorité des Ducs qui gouvernoient à titre de Duché les deux provinces réunies d'Alſace & de Suabe. L'un de ces Comtés ſe nommoit le Sundgaw, *Pagus meridionalis;* l'autre le Nordgaw, *Pagus ſeptentrionalis.* Dans la ſuite ils prirent les dénominations de Landgraviats de la Haute- & Baſſe-Alſace, & les conſervèrent depuis l'an 1180 jusqu'à la paix de Weſtphalie, en 1648, que l'Alſace fut cédée à la France.

En ſuivant la chronologie de ces premiers Comtes, & la hiérarchie des offices du Gouvernement voulant que ces Comtés fuſſent adminiſtrés ſéparément, ſous l'autorité des Ducs, l'on voit que ces derniers inveſtiſſoient naturellement & pour l'ordinaire leurs fils de ces offices ſupérieurs, par préférence à tous autres perſonnages, après en avoir mérité ou ſollicité l'agrément du Roi. C'eſt ainſi qu'Adelbert exerça l'office de Comte du Nordgaw, ſous le gouvernement du Duc ſon père, auquel il ſuccéda vers l'an 690. Il fonda vers l'an 717 l'abbaye de

St Etienne de Strasbourg, & vers 721 celle d'Honau. (*Hiſtoire de l'égliſe de Strasbourg, T. I, pp.* 393—398). Il ſe qualifie *Adelbertus Dux*, dans une charte de 722 pour cette abbaye. Il mourut la même année, & fut enterré dans le choeur de l'égliſe de St Etienne de Strasbourg, ainſi que ſes deux femmes Gerlinde & Bathilde, & ſes deux filles du ſecond lit, Luitgarde & Savine. (*Ibid. p.* 395, & *l'Art de vérif. les dates, T. III, p.* 63).

La date de ſa mort eſt conſtatée par l'inſcription du monument qui fut érigé à ſa mémoire dans l'égliſe de St Etienne de Strasbourg. Hubner & Pauli ſe trompent donc en la fixant l'un *avant l'an* 715, l'autre en 741.

(11.) Les Maiſons d'où ſortoient les deux femmes du Duc Adelbert, *Gerlinde* & *Bathilde*, ne ſont point connues. Pauli ſe contente de dire que toutes les deux ſortoient de la Maiſon Royale. *Beide aus Königlichem Geſchlecht.*

(12.) Ethicon, auteur des Maiſons de Lorraine & d'Egisheim, étoit frère du Duc Adelbert, qu'il remplaça dans le Comté du Nordgaw. L'auteur de l'ancienne vie de Ste Odile, écrite ſur la fin du huitième ſiècle, lui donne la qualité de Duc; mais alors on qualifioit ainſi les Comtes qui étoient fils de Ducs, de même qu'on nommoit en France Rois les fils des Rois de la première race. Ethicon finit ſes jours avant 720. (*V. la Chronologie des Comtes du Nordgaw, p.* 73, & *l'Hiſtoire de l'Egliſe de Strasbourg, pp.* 264—297 *du T. I*).

Tous les hiſtoriens & généalogiſtes de la Maiſon de Lorraine, aujourd'hui Impériale & Archiducale d'Autriche, reconnoiſſent unanimement ce même Comte du Nordgaw, ou du Brisgaw ſuivant quelques-uns, pour l'auteur de cette Maiſon. Nous ne parlerons point de ſa poſtérité, nos recherches n'ayant pour objet que le développement de l'origine de la Maiſon d'Hohen-Zollern, & l'éclairciſſement des doutes & des contradictions qui couvrent encore d'un voile épais la généalogie de cette Maiſon.

(13.) Battichon ou Battachon, eſt déſigné ſeulement comme fils d'Adalric ſous le titre de Comte, par la plupart des auteurs qui ont parlé de lui, & qui diſent qu'il mourut avant l'an 726. Pauli eſt le ſeul des auteurs que nous conſultons, qui lui donne le titre de *Comte en Ergaw*. Au reſte, tous s'accordent à dire qu'il eut poſtérité, mais qui s'éteignit à la troiſième génération. M. Grandidier détaille ainſi cette poſtérité:

Battichon ou Battachon, Comte † avant 726.

Boronus en 726 & 748 † vers 750.

Adelbert. Hugues.

Adelbert.

(*V. la Généalogie d'Adalric, Duc d'Alſace. Hiſtoire de l'égliſe de Strasbourg, T. I. p.* 341.)

(14.) Adalric étoit d'un caractère hautain & violent. A la naiſſance de ſa fille Odile, qui naquit aveugle, il entra dans une fureur ſi extrême qu'il ordonna qu'on fît mourir cet enfant. Il ſe voyoit fruſtré de l'eſpérance d'avoir un fils auquel il pût transmettre ſon nom & ſes biens, & il croyoit qu'un enfant, ainſi disgracié de la nature, déshonoreroit ſa maiſon. Behréſinde, ſa femme, n'en eut que plus de tendreſſe pour ſa malheureuſe fille. Elle l'éloigna de la maiſon paternelle, & la confia à une nourrice qui en prit ſoin, & au ſortir des mains de laquelle l'enfant ayant recouvré la vue, fut envoyé au monaſtère de Palme, appelé de nos jours Beaume-les-Nones, où elle fut élevée.

„Adalric avoit appris que ſa fille avoit recouvré la vue, mais ſon âme n'en reſta pas moins inſenſible pour celle qu'il avoit ſacrifiée dès le berceau. Le Comte Hugues, un de ſes fils, entreprit de fléchir ce cœur dur & barbare en faveur de ſa ſœur. Ses ſollicitations pour ménager ſon retour furent inutiles, & il ne reçut que des refus. Le Comte ne ſe rebuta point; l'amitié qu'il avoit conçue pour Odile lui fit eſpérer qu'Adalric prendroit enfin des ſentimens plus dignes d'un père, & dans la penſée que la ſeule préſence de ſa ſœur juſtifieroit ſon entrepriſe, il donna des ordres ſecrets pour la faire revenir. Mais le malheureux Hu-

gues fut la victime de sa tendresse fraternelle. Déjà Odile approchoit du château de Hohenbourg, où Adalric faisoit son séjour, lorsque ce Duc découvrit confusément une troupe qui s'avançoit sur la montagne. Il demanda à ses fils ce que cela pouvoit être; Hugues, qui avoit sur ce point des connoissances particulières, reconnut sa soeur, nomma aussitôt Odile, & déclara hautement que c'étoit lui qui l'avoit fait venir. Adalric, furieux de la témérité de son fils, se laissa emporter à toute sa brutalité; il le frappa si rudement, que plusieurs auteurs rapportent que Hugues mourut quelque temps après de sa blessure, laissant trois fils dans le bas-âge."

Un pareil accident fit sentir au Duc, jusque-là dénaturé, l'excès de sa violence & de son injustice. La tendresse paternelle reprit son cours dans son coeur comprimé de regrets. Il reçut enfin sa fille avec joie, & il ne négligea rien dans la suite, & constamment jusqu'au tombeau, pour réparer sa violence & ses torts.

On ne dit point l'année où cet accident arriva, ni l'époque de la mort du Comte Hugues, dont la postérité s'éteignit, comme celle de son frère Battichon à la troisième génération. Nous rapportons encore cette postérité extraite de la généalogie d'Adalric, Duc d'Alsace.

Hugues, Comte,
tué par son père Adalric.

Bodole ou Bodale, Comte, en 748 & 749, † vers 754.	Bleonus, Comte, † avant 748.	Remi, Evêque de Strasbourg en 776, fondateur de l'abbaye d'Eschau † 20 Mars 783.

Hugues, Comte, en 748.

Egerhard, † avant 754.	Adale, 1ère Abbesse d'Eschau.	Rodune ou Ruchuine, 2de Abbesse d'Eschau.	Scolastique en 778.

Raderame, en 778.

(*Ex Notitia Honaugiensi et ex testamento Remigii Episcop. Argentin.*)

(15.) Parmi les enfans d'Adalric, peu de généalogistes ont placé Roswinde. Cependant Gebviller, dans la *Vie de Ste Odile, pag.* 100,

De Ruyr, dans ſes *Antiquités de la Voge, part. II, livr. IV, p.* 167 & 191, & Lecointe dans ſes *Annales eccléſ. tom. IV, p.* 295, en font mention, comme fille du Duc Adalric. Le nom de Roswinde, dit encore M. Grandidier, ſe trouve dans les anciennes litanies qu'on chantoit autrefois dans le diocèſe de Strasbourg. Son corps fut enterré à Hohenbourg dans la chapelle de St Pierre, à côté de l'autel, où on le trouva en 1663. Elle étoit Chanoineſſe de cette Abbaye, & Jean Huber n'eſt pas exact, quand il dit, *pag.* 118, que Roswinde devint Abbeſſe de Niedermunſter. (*Hiſt. de l'égliſe de Strasbourg, T. I, p.* 341).

Cinquième Génération.

(16.) Hubner, Pauli & pluſieurs autres hiſtoriographes qui les ont précédés, ne qualifient Luitfrid que de Comte du Sundgaw. C'eſt une erreur qui mérite encore d'être relevée, & que la chronologie même des Comtes du Sundgaw, ainſi que pluſieurs actes publics & authentiques, démontrent invinciblement.

Il paroît d'abord que le Duché d'Allémanie fut conféré héréditairement au Duc Adalric, puisque ſon fils aîné Adelbert lui ſuccéda, & que la chronologie des anciens Ducs d'Alſace & de Suabe place, dans la ſérie de ces Ducs, Luitfrid, *fils aîné d'Adelbert*, comme ſucceſſeur immédiat de ſon père. Mais que ce ſoit par droit d'hérédité ou par bénéfice que Luitfrid ſuccédât à ſon père, il n'en eſt pas moins vrai que *Luitfridus in Alſatiae Ducatu patris Adelberti fuit ſucceſſor.* C'eſt ce qui eſt prouvé 1° par la chronologie que nous citons; 2° par la chronologie des Comtes du Sundgaw, dans laquelle Luitfrid, *fils d'Adelbert*, ne figure point comme l'un de ces Comtes, mais bien Luitfrid I comme Comte du Sundgaw & fils de *Luitfrid, Duc d'Alſace;* 3° par une charte de donation faite au monaſtère d'Honau par Luitfrid, *Duc d'Alſace*, & le Comte Eberhard, *frères.* Cette charte, datée du 11 Décembre 722, eſt reconnue authentique par Mabillon, Belhomme, Laguille, Eccard, Soller & Schöpflin. Luitfrid y prend la qualité de Duc, & la ſouſcrit: *Signum Luitfridi Ducis, qui conſenſit;* Eberhard y prend la qualité de

Do-

Domeſtique; Signum Ebrohardus Domeſticus hanc epiſtolam teſtamenti a me factam relegi et recognovi. Nous dirons ci-après & à l'article d'Eberhard, ce que c'étoit que cette qualité de *domeſtique.* 4° Par un brevet de Thierri IV, Roi de France, de l'an 725, en faveur de cette même abbaye d'Honau, & dans lequel ce Prince lui donne le même titre, *Luitfrido Duci.* En 724, il le qualifia d'*homme illuſtre,* en lui adreſſant le privilége de confirmation de l'abbaye de Maurmoutier en Alſace; *Viro illuſtri Luthfrido.* Or, l'on ſait que le titre d'*Illuſtre* ne ſe donnoit alors qu'aux têtes couronnées, & que ſi Thierri IV le donna à Luitfrid, c'eſt qu'il le regardoit comme un grand perſonnage, digne de ce titre par ſa naiſſance & par l'état qu'il occupoit dans l'ordre ſocial. Dans la charte de Wigénère, Evêque de Strasbourg, de l'an 728, pour le monaſtère de Mourbach, Luitfrid ſigna en ſa qualité de Duc; *Signum Leodofredo Duce.* Dans l'acte de fondation de cette abbaye, le comte Eberhard, ſon frère, le nomme *Germanus meus Leudofreudus Dux.* C'en eſt aſſez pour prouver que Luitfrid étoit Duc d'Allémanie & fils du Duc Adelbert, auquel il ſuccéda immédiatement & en 722. (V. *l'Art de vérifier les dates, T. III, pag.* 63 & 73. *l'Hiſtoire de l'égliſe de Strasbourg, T. I, p. lv, lix, lxi, lxvii,* où ces actes ſont raportés *in extenſo,* comme piéces juſtificatives).

Aucun auteur n'a fixé l'époque de la mort du Duc Luitfrid. Le nom de ſon épouſe n'eſt pas mieux connu, & jusqu'ici l'on ne s'eſt point encore entendu ſur le nombre & le ſort de ſes enfans. Hubner, par exemple, ne lui donne qu'un fils, Luitfrid, Comte du Sundgaw, & termine ſa poſtérité à la 2e génération. Pauli eſt du même ſentiment. L'Art de vérifier les dates prolonge au contraire ſa poſtérité jusqu'à Gontrant-le-Riche, ſouche inconteſtable de la Maiſon éteinte d'Autriche-Habsbourg, & prouve d'après les ſavantes recherches de M. l'abbé Grandidier, qu'outre ſon fils Luitfrid, Comte du Nordgaw, le Duc Luitfrid eut encore Ruthard, Comte du Sundgaw, & probablement le Comte Warin, dont il ſera fait mention dans ces Recherches.

Au ſein de tant d'obſcurité & de contradictions, il paroîtroit comme impoſſible de parvenir à la découverte de la vérité. Cependant l'idée, qu'on peut au moins, à force de conſtance, atteindre ce but, ſurtout en analyſant & en comparant les auteurs diplomatiſtes entre eux, & avec l'attention de ſe prémunir contre le ſpécieux des conjectures ſyſtématiques de ceux qui, faute de moyens, n'ont ſuivi d'autres routes que celles que leur imagination leur traçoit, nous eſpérons que nos travaux ne ſeront pas ſans fruit. Telle eſt la marche que nous nous ſommes preſcrite & que nous avons ſuivie jusqu'ici; & ſi en la pourſuivant nous rencontrons quelques lacunes qui en rompent le fil, nous tâcherons d'en reprendre le cours, par les combinaiſons qui nous paroîtront les plus judicieuſes, & de donner enfin en dernière analyſe, des réſultats au moins plauſibles.

Nous avons dit qu'aucun auteur n'avoit fixé l'époque de la mort du Duc Luitfrid. Le chronologiſte ſeul des Ducs de Suabe & d'Alſace en parle ainſi: „Luitfrid mourut vers le milieu du huitième ſiècle, avant „l'an 769. La dignité ducale fut éteinte en lui; mais le titre de „Duché reſta toujours inhérent à la province d'Alſace, comme le prou„vent trois diplômes pour l'abbaye de Mourbach, deux de Louis-le„Débonnaire de l'an 816, & un de Lothaire de l'an 840, dans leſquels „le *Ducatus Alſacenſis* eſt rappelé." (*Bouquet, T. VI, pp.* 494 & 495, *T. VIII, p.* 366). Lothaire dans un autre diplôme de 849, dit que le monaſtère de Grandfels eſt ſitué *in Ducatu Heliſacenſi.* (*V. d'Achery Spicil. T. III, p.* 339).

Il paroît par quelques paſſages de l'Hiſtoire, que la dignité ducale en Suabe & en Alſace fut ſupprimée du temps de Charles Martel, & peut-être par lui, parce que ces Ducs d'Allémanie ſe mêlèrent dans les troubles de Bavière, que deux fois, en 725 & 728, Charles Martel ſe vit obligé d'appaiſer par la force. Il eſt certain au moins qu'ils étoient aſſez puiſſans pour affecter l'indépendance, & que leur pouvoir inquiétoit & portoit ombrage aux Rois Mérovingiens, & plus encore à leurs maires du palais. Luitfrid eſt le dernier depuis cette

époque, qui ait porté le titre de Duc, & non pas Eberhard ſon frère, comme Hubner l'a cru. L'Alſace & la Suabe furent après lui adminiſtrées par des Comtes, ſous l'autorité immédiate des Empereurs & des Rois, en conſervant toutefois à ces provinces le titre de Duché.

Celui d'Alſace, *Ducatus Heliſatiae*, eſt nommé par l'Annaliſte de St Bertin dans le dénombrement des provinces échues à Lothaire, dans le partage que l'Empereur Louis-le-Débonnaire fit en 839, entre ſes enfans. (*Hiſtoire de l'égliſe de Strasbourg, T. II, p.* 150). Lothaire ayant été vaincu en 841 dans la plaine de Fontenai, l'Alſace ſe ſoumit à Louis-le-Germanique. Mais les trois frères ayant fait en 843 à Verdun un ſecond partage de leurs états, cette province revint de nouveau à l'Empereur Lothaire. Ce prince étant mort en 855, l'Alſace, ainſi que la Lorraine, tombèrent ſous la domination de Lothaire, ſon ſecond fils. On connoît les malheurs dans leſquels l'entraîna ſa malheureuſe paſſion pour Walrade. Il en eut un fils nommé Hugues, auquel voulant faire un ſort, il rétablit en ſa faveur le Duché d'Alſace, & le lui conféra en 867: *Filio ſuo de Waldrada Hugoni Ducatum Eliſatium donat.* (V. *l'Hiſtoire de l'égliſe de Strasbourg, T. II, pp.* 179-189). Ainſi le Duché d'Alſace fut, depuis la mort de Luitfrid, juſqu'en 867, ſans Duc ou gouverneur-général; ce qui fait un laps de temps de plus d'un ſiècle.

(17.) Il n'y a point de doute que le Comte Eberhard ne fût fils du Duc Adelbert & frère du Duc Luitfrid. Il exiſte pluſieurs diplômes qui en font foi; entre autres une charte de donation qu'il fit en 722, conjointement avec le Duc Luitfrid, *ſon frère*, à l'abbaye d'Honau, ſous le règne du Roi Thierri IV. Eberhard prend dans cet acte le titre de *Domeſticus*. *Domeſticorum in Galliae regum palatiis crebra eſt apud ſcriptores mentio; eorum munus erat regia in provinciis palatia, villas regias, fiscos publicos eorumque reditus curare.* (V. Du Cange, *in Gloſſario*, T. II, pag. 1588). Dans un brevet de Thierri, & pour le même monaſtère d'Honau, Eberhard eſt appelé *Eberhardus Domeſticus, Luitfridi frater.*

Schöpflin nomme Luitfrid & Eberhard *Adelberti Ducis filii et Athici* (*Adalrici*) *nepotes.* (*Alſat. illuſt. T. I, p.* 769 & 777).

Dans les titres primitifs de la célèbre abbaye de Mourbach, qu'il fonda en 728, il s'intitule *Eborhardus, Comes, filius Adelberti quondam Ducis.*

Enfin Widégerne, Evêque de Strasbourg, le nomme dans la charte de confirmation pour cette même abbaye, & de la même année, *Vir illuſter Eborhardus Quomis* (*Comes*).

C'eſt de ce même Eberhard, Comte du Sundgaw, que Hubner fait descendre la Maiſon des premiers Comtes de Zollern, à la troiſième génération. Il ſeroit difficile de commettre, en généalogie, une erreur plus conſéquente & plus palpable, que celle que contient cette aſſertion; en voici la preuve.

„Eberhard, devenu aveugle, dit M. Grandidier, ſe voyoit mourir „*ſans poſtérité.* Il crut ne pouvoir faire un meilleur uſage des biens „qu'il avoit reçus de la ſucceſſion du Duc Adelbert, *ſon père*, que de „nommer pour ſes héritiers, l'Egliſe & ceux qui attachés au ſervice de „Dieu, font profeſſion de pauvreté. *Nullum meliorem haeredem quam „Eccleſiam Chriſti, et qui propter nomen ipſius militant, vel pauperes „fieri decreverunt, habere me judicavi etc.*" C'eſt ainſi que le Comte Eberhard s'explique lui-même dans le titre de fondation de l'abbaye de Mourbach; titre reconnu authentique, & que nous avons ſous les yeux. N'ayant point d'enfans, ajoute l'Hiſtorien de l'égliſe de Strasbourg, Eberhard fit entrer dans le deſſein qu'il avoit de fonder cette abbaye, le Duc Luitfrid ſon frère, & Emeltrude ſa femme. Avec leur conſentement il donna à la nouvelle abbaye tout le domaine propre qu'il poſſédoit en Alſace, & qui eſt ſpécifié dans la charte de fondation. L'acte en fut paſſé en 728, au monaſtère de Remiremont. (V. *Mabillon, Eccard, Lunig, Schilter, la Guille, Calmet et Schöpflin*).

Eberhard n'avoit eu qu'un ſeul fils de ſa femme Emeltrude; mais il étoit mort dans ſa tendre enfance. Aucun monument ne prouve qu'il en laiſſât d'autres en mourant. (V. *l'Hiſtoire de l'égliſe de Stras-*

bourg, Tom. I, p. 253, 341, & *aux preuves p.* 61 *No.* 37). Ainſi d'après les témoignages que l'on vient de citer, il eſt évident que Hubner s'eſt trompé en diſant qu'Eberhard, fils d'Adelbert, étoit Duc d'Alſace & père de *Warin, Comte d'Altorff*, & de *Ruthard, Comte de Kybourg.* Nous parlerons bientôt de ces deux derniers. (V. *Tab. généal. de Hubner,* 124 & 175).

Pregitzer, & d'après cet auteur Pauli, font la même faute en diſant qu'Eberhard ceſſa d'être Duc en 726, lorsque Charles Martel s'appropria le Duché, & qu'il eut deux fils, Warin & Ruthard, de ſa femme Falionoara que d'autres nomment Himmeltrude. (V. *Pauli, Tom. II, p.* 13). Suivant ces hiſtoriens, Luitfrid qu'ils qualifient de Duc d'Allémanie & du Sundgaw, n'auroit point eu d'enfans, ce qui eſt contredit victorieuſement par les actes que nous venons de citer, & ſurtout par la chronologie des Comtes du Sundgaw & du Nordgaw qui prouve que Luitfrid I, Comte du Sundgaw, & Ruthard, Comte du Nordgaw, étoient fils de Luitfrid, Duc d'Alſace, & non point du Comte Eberhard, ſon frère. En combinant ces différentes opinions, il eſt facile de s'apercevoir que Pregitzer n'ayant point eu connoiſſance des monumens découverts depuis lui par Eccard, Schöpflin, & particulièrement par Grandidier, aura confondu Luitfrid Duc d'Alſace avec ſon fils Luitfrid, Comte du Sundgaw, puisqu'il donne ces deux titres au premier, & que trouvant dans cette Maiſon une ſérie de générations dont il ne pouvoit ſe diſſimuler l'exiſtence, il les aura fait ſortir d'Eberhard. Ce n'eſt pas la première fois que la plupart des auteurs originaux qui ſe ſont occupés de la généalogie de la Maiſon d'Alſace, ont perdu, faute de recherches ſuffiſantes, la trace véritable des générations qui ſe ſont ſuccédées. C'eſt ainſi que ceux qui viennent après eux, ſuivant la même marche, s'égarent également, & propagent les erreurs primitives, au point de dépouiller la Généalogie du caractère de vérité qui lui eſt propre, & n'en faire qu'une ſcience purement conjecturale & trop ſouvent fabuleuſe.

(18.) „Dès que le Duc Adelbert eût mis la dernière main à la fondation du monaſtère de St Etienne, il choiſit pour le gouverner *Athale ſa fille*, qu'il avoit eue de *Gerlinde*, ſa première femme. Athale, ainſi que ſes deux ſœurs, Eugénie & Gundelinde, avoient été formées par leur tante Ste Odile dans les exercices de la piété & de la régularité. A ſon exemple, Athale introduiſit dans ſon abbaye la règle canonique, qu'elle croyoit plus facile & plus propre aux foibleſſes de ſon ſexe que celle de St Benoît. Ce qui ſe prouve encore par les lettres de l'Empereur Lothaire, qui y nomment pour directeurs des chanoines, & non des religieux Bénédictins. Athale profita ſi bien des exemples de vertu que lui avoit donnés ſa tante, qu'elle devint elle-même l'exemple des chanoineſſes de St Etienne. Elle les maintint pendant vingt années dans l'eſprit de leur état par ſes inſtructions & par ſes exemples. Elle mourut le 3 Décembre 741, n'ayant vécu que cinquante-quatre ans." (V. *l'Hiſtoire de l'égliſe de Strasbourg, Tom. I, p.* 394, *et aux preuves juſtificatives, No.* 29).

(19.) „Après la mort de Ste Odile les chanoineſſes de Hohenbourg & de Niedermunſter s'aſſemblèrent pour nommer quelqu'une d'entr'elles à la place de la ſainte fondatrice de ces deux abbayes. Leur choix unanime tomba ſur Eugénie & ſur Gundelinde. Elles étoient toutes deux nièces de Ste Odile, filles d'Adelbert Duc d'Alſace & de Gerlinde ſon épouſe. L'autorité qui jusques-là avoit été entre les mains d'une ſeule perſonne, fut alors partagée. Eugénie fut nommée Abbeſſe du Haut-Hohenbourg, & Gundelinde de Niedermunſter ou Bas-Hohenbourg. Eugénie marchant fidèlement ſur les traces de ſa tante, fit honneur par ſa vertu au choix qu'on avoit fait d'elle. Elle gouverna pendant environ quinze ans ſa nombreuſe communauté avec une ſageſſe qui y entretint la paix & la régularité. Elle mourut le 16 Septembre 735." (*Ibid. p.* 359).

(20.) On a peu de renſeignemens ſur le Comte Maſon. Ce que l'on en ſait, c'eſt qu'il étoit frère du Duc Luitfrid & du Comte Eberhard, par conſéquent fils du Duc Adelbert. Cette vérité eſt conſtatée

par un diplôme de Louis-le-Débonnaire, de l'an 823, qui reconnoît Maſon pour fondateur de l'abbaye de Maſevaux, & qui le nomme *Princeps vir nobilis Maſo, frater Ducis Luitfredi et Eberhardi.*

Il eut une femme dont on ne connoît ni le nom ni la naiſſance, mais qui eut un fils unique qui ſe noya dans l'Olrunn ou la Tolra. (V. *la Généalogie d'Adalric, Duc d'Alſace, quant aux Maiſons d'Autriche et de Bade, au Tom. I de l'Hiſtoire de l'égliſe de Strasbourg, p.* 341).

(21.) Luitgarde & Savine, nées du ſecond mariage du Duc Adelbert avec Bathilde, ne ſont connues que pour avoir été dépoſées, après leur mort, dans le même caveau ſépulchral du choeur de l'égliſe de St Etienne à Strasbourg, qui renfermoit les corps de leur père & de leur mère.

Sixième Génération.

(22.) „Luitfrid I, fils de Luitfrid, Duc d'Alſace, fut Comte du Sundgaw, après le Comte Pirahtilon, vers l'an 800, & mourut dans les commencemens du IXème ſiècle. Il eut de ſa femme Hiltrude trois enfans, ſavoir le Comte Hugues, le Comte Leutard, & Baſile, qui étoit en 845 Abbeſſe de St Etienne de Strasbourg. Leutard épouſa Grimilde, & fut père d'Olbert, Evêque de Strasbourg, depuis 906 jusqu'en 913, & de Gérard de Rouſſillon, que les vers & les chanſons des anciens Troubadours ont rendu fameux." (*Hiſtoire de l'égliſe de Strasbourg, T. II, pp.* 273 *et ſuiv. Chronol. Hiſt. des Comtes du Sundgaw, pag.* 73).

Il faut obſerver au ſujet de Luitfrid I, Comte du Sundgaw, que M. Grandidier le place comme *premier* du nom, dans la ſérie des trois Luitfrid qui ſe ſuccèdent dans l'ordre généalogique de la Table qu'il donne de la poſtérité d'Adelbert, & qu'au contraire Hubner le nomme *ſecond* du nom. Cette différence vient de ce que M. Grandidier ne conſidère que la qualité de *Comte* du Sundgaw, que le Duc Luitfrid ne prenoit pas, ayant celle de Duc; & que Hubner ne conſidéroit proprement que le nom. A cet égard & ſous ces deux rapports, ces deux

auteurs auroient également raiſon à leur ſens; ſeulement on ne pourroit reprocher à Hubner qu'une légère inexactitude, & non point une erreur.

(23.) C'eſt d'après Hubner que nous diſons Hiltrude héritière de Habsbourg. Cet auteur nomme ſon père, Otbert III, dernier Comte de Habsbourg de la première race, qu'il fait deſcendre de Sigebert, *fils* de Thierri, Roi de Metz. Selon lui, ce fut par le mariage d'Hiltrude avec Luitfrid, que le Comté de Habsbourg paſſa dans la Maiſon d'Alſace. (V. *les* 124e & 488e *de ſes Tab. généal.*)

(24.) Hubner donne pour père à Ruthard, qu'il qualifie Comte de Kybourg, Eberhard, Comte du Sundgaw, que nous avons prouvé n'avoir point laiſſé d'enfans. (V. *ci-deſſus la note* 17, *p.* 76).

Pluſieurs autres auteurs ſont de cette opinion manifeſtement fauſſe. Voici comment le Chronologiſte moderne des Comtes du Sundgaw & du Nordgaw détruit cette ancienne erreur, & comment il s'explique au ſujet de Ruthard.

„Ruthard, fils de Luitfrid, Duc d'Alſace & petit-neveu du Duc Ethicon, étoit en même temps Comte du Nordgaw & de l'Ortenaw. Il fonda en 736, l'abbaye de Gengenbach, & en 746 celle d'Arnoulfoanga, appelée depuis Schwartzach. (*Hiſtoire de l'égl. de Strasbourg, T. I, pp.* 421 & 424). On conſerve dans les archives de l'Evêché de Strasbourg, à Saverne, la charte originale de l'Evêque Heddon, dans laquelle *vir inluſter Rothardus Quomis* eſt expreſſément nommé fondateur de cette dernière abbaye. L'acte, daté du 27 Septembre 748, eſt ſouſcrit par neuf Evêques & trois Abbés. (*Ibid. T. I, p. lxxii*). Ruthard & Hermenſinde, ſon épouſe, firent en 758 une donation conſidérable au même monaſtère. (*T. II, p. lxxxv*). Comme ils n'avoient point d'enfans, ils accordèrent à l'égliſe de Strasbourg tous les biens qu'ils poſſédoient dans le territoire d'Ettenheim. (*Tom. I, pag.* 278)."

„Ruthard mourut le 28 Janvier vers l'an 765, & fut enterré avec ſa femme dans l'égliſe abbatiale de Gengenbach. L'Empereur Charles le Gros

Gros, dans ſon diplôme de l'an 885 pour cette abbaye, & l'ancien nécrologe de Schutteren, donnent à Ruthard le titre de Duc." Sans doute parce qu'il étoit fils du Duc Luitfrid, & qu'il étoit alors d'uſage que les fils de Duc ſe qualifiaſſent du même titre. (V. *l'Art de vérifier les dates, Tom. III, pag.* 73).

Il appert donc par cet extrait chronologique, que le Comte Ruthard étoit fils du Duc Luitfrid, qu'il fut Comte du Nordgaw, que ſon épouſe ſe nommoit Hirmenſinde, & qu'il ne laiſſa point de poſtérité.

(25.) Nous avons jusqu'ici ſuivi les filiations de cette généalogie, à l'appui des autorités & des pièces juſtificatives que nous avons indiquées dans les notes précédentes. Les mêmes ſecours manquent actuellement à nos recherches, pour ce qui regarde Warin & ſes enfans. Hubner le dit fils d'Eberhard, Comte du Sundgaw, que nous avons prouvé n'avoir point eu de poſtérité, & frère de Ruthard, que nous venons de prouver être fils de Luitfrid, Duc d'Allémanie. Pregitzer, Rentſch, & d'après eux Pauli, font mention de Warin comme iſſu de cette première Maiſon d'Alſace, & descendant du Duc Albéric; mais ce qu'ils en diſent n'eſt point accompagné de preuves. Cependant ce même Warin a certainement exiſté, l'Hiſtoire en fait mention à différens égards, & l'Art de vérifier les dates juſtifie cette exiſtence, en diſant au *Tom. III, p.* 73, „que Warin gouverna l'Allémanie, ſous „les règnes de Pepin & de Charlemagne, conjointement avec le Comte „Ruthard. Il ne faut pas le confondre, dit encore le chronologiſte „des Comtes du Sundgaw, avec un Garin, Comte du Sundgaw ſous „Carloman, Roi d'Auſtraſie, & que ce prince dans un diplôme origi„nal, accordé en 769 à l'abbaye de Munſter, nomme *Vir inluſter Ga„rinus Comes*, & auquel il donne le titre de Grandeur."

Pauli (*T. II, p.* 13) dit, d'après Pregitzer que „Warinus ou Werner, paſſa de l'Alſace en Suabe, où il occupa le château de Bodmann, ſur le lac de Conſtance (*Boden-See*), & qu'il fut le premier Comte d'Altorff & de Ravensbourg. Il ajoute que ſuivant quelques docu-

mens, il paroît que Warin eut encore le gouvernement du Duché d'Allémanie, & qu'il eſt au moins très-vraiſemblable qu'il avoit une charge éminente ſous le règne du Roi Carloman. Il ſe retira, à l'exemple de ce monarque, au monaſtère du Mont-Caſſin, où il mourut l'an 780. De ſon épouſe, fille ou petite-fille de Gunſon, Duc de Suabe, il doit avoir eu, 1° Iſenbart, duquel il va être fait mention; 2° Warin II; 3° Ethicon. Ces deux derniers n'étant connus que par leurs noms."

C'eſt tout ce que l'on trouve de relatif à ce Comte Warin, duquel Hubner, ſur des autorités que nous ignorons, fait descendre la Maiſon de Zollern. Il eſt certain cependant que ſi ce rapport de *Pregitzer* étoit fondé en preuves, il jetteroit un grand jour ſur le doute toujours ſubſiſtant quant à ce qui concerne Warin & ſa poſtérité.

Au défaut de preuves poſitives pour conſtater la descendance de ce Comte de la famille dont nous nous occupons, il ne reſte que la voie du raiſonnement & de la discuſſion, en ſuivant les indices les plus lumineux ou les moins ſuſpects de l'Hiſtoire. Or elle remarque qu'à la mort de Luitfrid, Duc d'Alſace & de Suabe, c'eſt-à-dire d'Allémanie, la dignité ducale fut éteinte, ce qui eſt un fait notoire & prouvé. Les Comtes, pour le gouvernement de ces deux grandes provinces, remplacèrent les Ducs qui les adminiſtroient ſupérieurement tant qu'elles furent réunies ſous le titre de Duché d'Allémanie. Ce fut ainſi que l'Alſace, diviſée en deux grands Comtés, fut gouvernée par deux Comtes, parmi leſquels on trouve d'abord Luitfrid I, Comte du Sundgaw, & Ruthard, Comte du Nordgaw, tous deux fils de Luitfrid, dernier Duc bénéficiaire d'Alſace & de Suabe.

Si donc Warin dont nous cherchons l'origine, n'eſt pas, comme le dit Hubner, & comme nous avons réfuté cette aſſertion, fils d'Eberhard, Comte du Sundgaw, tout ce qui vient d'être dit au ſujet de ce Warin, porte à croire qu'il étoit fils du Duc Luitfrid, frère de Luitfrid I, Comte du Sundgaw, & de Ruthard, Comte du Nordgaw & de l'Ortenaw.

En effet, l'on voit les deux aînés de ces trois frères, revêtus des deux ſeuls Gouvernemens ou Comtés, qui compoſoient la province d'Alſace, le Sundgaw & le Nordgaw; il n'y avoit point par conſéquent dans cette province d'établiſſement équivalent, ou de ce genre au moins, pour ce troiſième frère, qui en obtint un en Suabe dans la poſſeſſion de la Seigneurie d'Altorff, ou dans le gouvernement du Comté de ce nom. C'eſt à ce titre que Warin eſt connu dans l'Hiſtoire, & comme *ayant gouverné l'Allémanie conjointement avec Ruthard, ſous les règnes de Pepin et de Charlemagne.* Quant à la Seigneurie d'Altorff, il paroît qu'elle étoit une terre domaniale de la Maiſon d'Alſace, déjà du temps du Duc Adalric, & qui a pu parvenir à Warin par droit de ſucceſſion; ce qui ſeroit un préjugé confirmatif de la deſcendance de Warin du Duc Adalric, ſoit comme arrière-petit-fils ou petit-neveu de cette ſouche inconteſtable de la première Maiſon d'Alſace. (V. Guillimann *de Episcop. Argent. p.* 82 & de Hugo *Annal. praemonſtrat. T. II, p.* 428. Scheid *Originum Guelficarum, Tom. II, praefat. p.* 15). Une autre preuve que Warin avoit poſſédé la terre d'Altorff en Suabe, c'eſt que ſon fils Iſenbart, dont on va parler, dota de *ſes biens patrimoniaux* le monaſtère qu'il fonda à Altorff même. (*Pauli, T. II, p.* 14).

D'après ces détails ce n'eſt pas émettre une opinion haſardée que de dire; 1° que Warin, poſſeſſionné en Suabe & patrimonialement d'une terre conſidérable qui appartenoit déjà au Duc Adalric, deſcendoit de ce même Duc; car il y a toute apparence qu'il ne la poſſéda qu'à titre de ſucceſſion, 2° que ſortant d'une Maiſon ducale, & que par ſa naiſſance le titre de Comte lui étant acquis, ce titre paſſa aux domaines qu'il poſſédoit en Suabe, pourquoi dans les diplômes & les documens de ces temps reculés on trouve ſouvent la Seigneurie d'Altorff déſignée ſous le titre de Comté, & Warin lui-même nommé Comte & Seigneur d'Altorff. 3° Enfin que tous les auteurs qui ont privativement fait mention de lui, s'accordant à dire qu'il deſcendoit de la première Maiſon d'Alſace, & l'Hiſtoire n'offrant aucune preuve poſitive qui contrediſe cette opinion, on ne commet aucune erreur en l'adoptant.

Septième Génération.

(26.) Hugues I, fils de Luitfrid I, Comte du Sundgaw, dit l'Annaliſte de St Bertin, mourut l'an 837. Il eut cinq enfans de Bara, ſon épouſe, ſavoir: 1° Hermengarde, qui épouſa au mois d'Octobre 821 l'Empereur Lothaire I, & mourut le 20 Mars 851. (Elle fut enterrée dans l'abbaye d'Ernſtein en Alſace, ſa patrie, & non point la Provence, comme l'a penſé M. Pfeffel, en la faiſant fille de Hugues, Comte de Provence). 2° Luitfrid III, qui ſuccéda à ſon père dans le Comté du Sundgaw. 3° Adalard, Comte, mort vers l'an 876. 4° Hugues, décédé dans ſa jeuneſſe. 5° Adélaïde, mariée en premières noces à Conrad I, Comte d'Auxerre, & enſuite à Robert-le-fort, Comte d'Anjou, tige de la troiſième race des Rois de France, ſortie de ce ſecond mariage d'Adélaïde. (*Art de vérifier les dates, Tom. III, pag.* 73 & 74).

(27.) Leutard épouſa Grimilde, & fut père d'Otbert, Evêque de Strasbourg depuis 906 jusqu'en 913, & de Gérard de Rouſſillon, que les vers & les chanſons des anciens Troubadours ont rendu fameux. (*Hiſtoire de l'égliſe de Strasbourg, T. II, pp.* 273 *et ſuiv.*)

(28.) L'Hiſtoire parle d'un Iſenbart, Comte d'Altorff, qui ſe rendit célèbre du temps de Charlemagne, & qui étoit en très-grande conſidération à la cour & dans les armées de cet Empereur. Ferreras, dans ſon Hiſtoire d'Eſpagne, en fait de grands éloges, comme guerrier & général fameux par ſa bravoure & par les grandes & nombreuſes victoires qu'il remporta ſur les Sarraſins. Or, en comparant les temps & les événemens, cet Iſenbart ne peut être que celui dont il eſt queſtion. Abel, Schönleben, Entzel, Cernicius, Reinhard & quelques autres, qui ont créé autant de ſyſtèmes différens ſur l'origine de la Maiſon de Zollern, n'ont pas plus de raiſon les uns que les autres, de douter qu'Iſenbart ne fût père de Thaſſillon, ſouche de cette Maiſon, qu'ils en ont de préférer d'autres perſonnages; car ils ne prouvent rien, & leurs opinions n'ont pas même le moindre degré de probabilité.

Perſuadé avec les meilleurs Hiſtoriens que ce n'eſt que dans la famille des premiers Rois de France, dans celles des Comtes & des Ducs d'Alſace qui en ſortoient directement, ou par alliances, qu'on doit trouver l'origine des Maiſons d'Habsbourg, de Bade, de Zollern & de Lorraine; c'eſt auſſi là que j'ai fixé mes recherches, & qu'en réſultat je n'héſite point à donner la préférence à l'opinion de Hubner, ſur tous les ſyſtèmes de ceux des auteurs qui ſe ſont occupés du même objet; mais il falloit développer cette opinion, & c'eſt ce que nous avons fait autant que l'obſcurité qui règne dans l'hiſtoire de ces temps anciens a pu nous le permettre.

Quant à Irmentrude, femme d'Iſenbart, Hubner n'a pas eu honte de rapporter dans la 151e de ſes Tables généalogiques, les noms & les titres des douze fils, qu'une fable ridicule dit être nés d'une ſeule couche de cette femme; *ſie brachte*, dit-il, *auf einmal zwölf Söhne zur Welt*. Une pareille aſſertion, & auſſi ſèchement exprimée, ne mérite pas qu'on s'occupe à la réfuter; mais on s'étonne qu'un auteur tel que Hubner ſe la ſoit permiſe.

Pauli a rapporté cette fable, & même avec tous ſes plaiſans détails. Il la récite à ſa manière également plaiſante, mais ſans la combattre. Il nous ſemble qu'il auroit mieux fait de la paſſer ſous ſilence. Des récits pareils s'accordent peu avec la gravité de l'Hiſtoire. Cependant, le ton léger de cet auteur, d'ailleurs très-eſtimable par l'étendue de ſes connoiſſances & l'emploi qu'il en a fait, ne nous empêchera point de tranſcrire ici ce qu'il rapporte du Comte Iſenbart, d'après Pregitzer.

„Iſenbart, dit-il, hérita d'abord des biens patrimoniaux que ſon père poſſédoit ſur le lac de Conſtance. Se trouvant à la chaſſe avec Charlemagne, il ſauva ce prince du danger d'être tué par un Aurochs (l'*urus* des Naturaliſtes) ce qui lui mérita ſa reconnoiſſance & ſes faveurs. Le premier témoignage qu'il en reçut, fut l'alliance que ce prince lui fit contracter avec la ſoeur de Hildegarde, femme de l'Empereur lui-même, & fille d'Hildebrand, Duc de Suabe. Par ce mariage Iſenbart devint ainſi le beau-frère de Charlemagne. Miſſon, continue

Pauli, prétend que cette femme étoit d'origine provençale; mais ſuivant une eſtampe gravée par Pregitzer, & dont le ſujet eſt pris d'un monument du monaſtère de Steingaden, il paroît qu'Iſenbart eut deux femmes & un fils. Tous les quatre ſont repréſentés ſur ce monument, qui ſeul démentiroit la fable ridicule des douze fils jumeaux d'Iſenbart. A côté d'une de ces deux femmes eſt un écu ſur lequel on voit ces lettres S. P. Q. R., ce qui déſigne qu'elle étoit ou romaine ou provençale. Une couronne qui diſtingue l'autre, indique qu'elle étoit princeſſe de naiſſance; peut-être que toutes les deux ſe nommoient Irmentrude." Quant au fils, Pauli ne fait aucune obſervation. Il termine cet article, en diſant „qu'Iſenbart eut le gouvernement de *la* „Suabe, & fut général des armées de Charlemagne. Il fonda le mona„ſtère d'Altorff, & vivoit encore en 804."

(29.) Luitfrid II ſuccéda en 837 à Hugues ſon père dans le Comté du Sundgaw. Il jouit, dit l'Annaliſte de St Bertin, de la plus grande faveur auprès de Lothaire, Roi de Lorraine. Il eſt qualifié, *Luitfridus, illuſter Comes, Dominusque Monaſterii Grandisvallis, quod eſt ſitum in Ducatu Heliſacenſi*, dans le diplôme de l'Empereur Lothaire en 849, pour l'abbaye de Grandfels. (*La Guille Hiſt. d'Alſace, p.* 20). Il mourut en 864, ſuivant le témoignage de la chronique de St Gal, qui le compte au nombre des princes les plus diſtingués d'Allemagne. Il laiſſa deux fils qui lui ſuccédèrent, l'un après l'autre, au Comté du Sundgaw.

Hubner ne reconnoît point ces fils de Luitfrid II, & dit, „que „faute d'enfans de ſa femme Hiltrude, héritière de Habsbourg, il dis„poſa du Comté de ce nom en faveur des quatre fils d'Albéric, Comte „en Alſace," ſes couſins au 3ème degré de conſanguinité, & de l'un desquels, nommé Eberhard I, il fait deſcendre Gontran le Riche, & par conſéquent la Maiſon de Habsbourg. (V. *la* 124e *de ſes Tab. généal.*)

Cette erreur, beaucoup plus ſaillante encore que celle qu'il avoit commiſe au ſujet du Comte Eberhard, grand-oncle de Luitfrid II, & que nous avons relevée ci-deſſus (v. la Remarque 17, p. 75) inter-

vertit abſolument le cours des filiations de cette généalogie, & la rend fautive à beaucoup d'égards. C'eſt par une ſuite de cette même erreur, par exemple, que Hubner donne pour ſouche à la Maiſon de Habsbourg un agnat éloigné de Luitfrid II, & le même Eberhard I, reconnu pour l'auteur de la Maiſon de Lorraine.

Afin de rétablir la vérité d'un fait hiſtorique auſſi évidemment altérée, nous rapporterons ici & ſur des témoignages authentiques que nous indiquerons, la ſérie des filiations qui ſe trouvent en ligne directe, depuis Luitfrid II, jusqu'aux petits-enfans de Gontran le Riche, auteurs des Maiſons de Habsbourg, de Zeringen & de Bade.

Le Comte Luitfrid II, dont l'épouſe n'eſt point réellement bien connue, laiſſa deux fils, comme le prouvent les auteurs que nous citerons ci-après. L'un de ces fils fut Hugues I, qui lui ſuccéda immédiatement au Comté du Sundgaw en 864, & qui mourut vers l'an 880, ſans laiſſer poſtérité. Le Comté paſſa alors à Luitfrid III, ſon frère, qui mourut vers l'an 910, & laiſſa trois fils de ſon épouſe Hermentrude; Hunfrid, Hugues & Luitfrid IV.

Ce dernier gouvernoit le Sundgaw dès l'an 912. Il ſe rendit célébre en 925, par la défaite des Hongrois qui ravageoient l'Alſace. (*Hiſtoire de l'égliſe de Strasb. T. II, p.* 303). On ignore l'année de ſa mort; mais on connoît ſes deux fils, Gontran & Luitfrid, qui furent ſes ſucceſſeurs.

Gontran, dit le Riche, ſouche inconteſtable de la Maiſon de Habsbourg-Autriche & fils de Luitfrid IV, poſſédoit le Sundgaw & le Brisgaw en l'an 953, époque à laquelle il prit le parti de Ludolphe, Duc d'Alſace & de Suabe, qui s'étoit révolté contre l'Empereur Otton, ſon père; mais Gontran en fut puni la même année; Otton le démit de ſes Comtés & le déclara ſujet rebelle de l'Empire; *Quia ipſe Guntramnus contra rempublicam noſtrae Regiae poteſtati rebellis extitit*, dit ce prince dans un diplôme de 959. Gontran ne laiſſa qu'un fils, nommé:

Kanzelin, Comte d'Altenbourg, mort le 25 Mai 990, laiſſant ſix enfans de ſa femme Luitgarde, ſavoir;

1° Werinhaire, nommé Evêque de Strasbourg en 1001, & mort à Conſtantinople le 28 Octobre 1028. (Ce fut lui qui bâtit le Château de Habsbourg).

2° Radeboton, Comte d'Altenbourg & du Cleggaw, mort le 30 Juin 1027, marié à Ita ou Ide, fille de Fréderic, Duc de Lorraine, & qui donna l'origine véritable à la Maiſon de Habsbourg-Autriche.

3° Rodolphe, Comte du Sundgaw, en 1063, & qui mourut ſans poſtérité. Sa femme eſt nommée Cunégonde.

4° Lanzelin, qui n'eſt connu que par le teſtament de Werinhaire, ſon frère, de 1027.

5° Gebehart, qui vivoit en 1008.

6° Pirthelon ou Berthold, Comte du Brisgaw, duquel dérivent les anciens Ducs de Zeringen & les Margraves de Bade.

Tels ſont les détails que nous oppoſons à la grave erreur échappée au profeſſeur Hubner, & qui la détruiſent victorieuſement. Nous en avons pour garans les autorités ſuivantes. 1° *Les Chronologies des Comtes du Sundgaw et du Nordgaw, des Margraves d'Autriche, des Ducs de Zeringen et des Margraves de Bade, dans l'Art de vérifier les dates,* T. III, édit. de 1787. 2° *D. Bouquet,* T. VIII, p. 413. 3° *Hergott, Geneal. Habsburg.* T. II, p. 197. 4° *Materne, Theſ. anecdot.* T. I, p. 93. 5° *Hiſtoire de l'égliſe de Strasbourg et particulièrement les deux Généalogies d'Adalric, Duc d'Alſace, pour les Maiſons d'Autriche et de Bade, de Lorraine et d'Egisheim,* T. I, p. 341 &c.

(30.) Nous réſervons l'article qui concerne Thaſſilon, ſouche généralement reconnue de la Maiſon des anciens Comtes de Zollern, pour le 2e période de la Généalogie de cette Maiſon. V. ci-après la Table & les Remarques généalogiques de ce période.

Recher-

RECHERCHES SUR LE MOT ENVIRON.

PAR MONSIEUR BASTIDE *).

Ce mot eſt à la fois *adverbe* & *prépoſition* de *temps*. Comme *prépoſition* de *temps* il eſt ſynonyme de *vers*, (qui eſt encore *prépoſition* de *lieu*) & il régit l'*accuſatif*. Le grand *Boſſuet* & le bon *La Fontaine* l'ont employé comme tel. Le dernier dit:

„Les alouettes font leurs nids
„Dans les bleds quand ils ſont en herbe,
„C'eſt-à-dire *environ le* temps
„Que tout aime & que tout pullule dans le monde,
„Monſtres marins au fond de l'onde,
„Tigres dans les forêts, alouettes aux champs."

J'ai dit *environ* à la fois *adverbe* & *prépoſition*, & *Furetière*, *Richelet*, *Wailly*, le *grand Vocabulaire*, *Le Brun* **) lui donnent cette *double* qualité, & ceux d'entre eux qui s'occupent des *régimes*, lui font *régir* l'*accuſatif*. L'abbé *Danet* & *Reſtaut* le font ſimplement *prépoſition*, &, avec *Furetière*, *Trévoux* & ſon *Abrégé*, lui donnent l'*accuſatif* pour *régime*. L'*Académie*, le *grand Vocabulaire* & *Alberti* ſe taiſent ſur ce régime. *Buffier* met *environ* & *vers* au nombre des *prépoſitions* qui régiſſent le *nominatif*. Mais ce qu'il y a d'étonnant, c'eſt que (hors *Le Brun*) ceux des auteurs qui font *Environ prépoſition* en même temps qu'*adverbe*, ne le citent qu'employé comme *adverbe*. Pour

*) Lu à l'Académie le 25 janvier 1798.

**) Ajoutez les Citoyens *Gattel* & *Baſtien*.

moi *environ* eſt *adverbe*, quand on pourroit mettre à ſa place *à-peu-près*, & il eſt *prépoſition*, lorsqu'on pourroit le remplacer par *vers*. Or dans „Il eſt *environ* 6 heures" „Il eſt dû de cette rente *environ* 500 „livres d'arrérages" (phraſes de *Furetière* & de *Trévoux*) on ſubſtitueroit bien *à-peu-près* à *environ*. („Il eſt *à-peu-près* 6 heures" Il „eſt dû de cette rente *à-peu-près* 500 livres d'arrérages.") Dans „Louis XIII eſt mort après avoir régné *environ* 33 ans" „Il y de„meura ſur le champ de bataille 2000 hommes, ou *environ*" „Cela „eſt venu au monde depuis votre ſociété, lui dis-je; *environ*, me „répondit-il;" (phraſes de *Richelet*) *à-peu-près* prendroit bien la place d'*environ*. („Louis XIII eſt mort, après avoir régné *à-peu-près* 33 „ans" „Il y demeura ſur le champ de bataille 2000 hommes ou *à*„*peu-près*" „Cela eſt venu au monde depuis votre ſociété, lui dis„je; *à-peu-près*, me répondit-il.") Ce qu'il y a encore d'étonnant, c'eſt que *Danet*, pour qui *environ* n'eſt *pas adverbe*, l'emploie comme tel. Car au lieu de „Ils marchèrent *environ* quinze jours" on diroit bien „Ils marchèrent *à-peu-près* quinze jours, *Dies circiter quindecim* „*iter fecerunt.*" Mais ce qui doit plus étonner que tout ce qui précède, c'eſt que l'*Académie* & le *grand Vocabulaire*, pour qui *environ* n'eſt que *prépoſition*, ne l'emploient que comme *adverbe*. Dans ces phraſes de l'*Académie* „Il y a *environ* deux heures" „Son armée étoit „d'*environ* 20000 hommes" „Il avoit fait *environ* 2 lieues" „Com„bien y a-t-il dans ce ſac? Il y a *environ* 300 francs, 400 francs, ou „*environ*" on diroit également, je penſe „Il y a *à-peu-près* deux heu„res" „Son armée étoit d'*à-peu-près* 20000 hommes" „Combien „y a-t-il dans ce ſac? Il y a *à-peu-près* 300 francs, 400 francs, ou „*à-peu-près.*" Et il eſt d'autant plus étonnant que l'*Académie* ne faſſe *environ* que *prépoſition*, pour ne donner que des *exemples* de ſon emploi comme *adverbe*, qu'aux mots *après*, *depuis* & *loin*, elle avertit qu'ils ſont *auſſi adverbes*, & les cite comme *employés* en qualité d'*adverbes* *).

*) „*A-peu-près* eſt ſouvent employé pour *environ.*" *Féraud.*

L'*Académie*, le *grand Vocabulaire*, *Alberti*, l'A. *Féraud*, *Furetière* *) définiſſent *Environ* „prépoſition" *à-peu-près*, *un peu plus*, *un peu moins* **). C'eſt la définition d'*environ* „adverbe." Le *Richelet portatif* dit mieux: *A-peu-près*, *presque en ce temps-là*. J'aurois dit 1° *à-peu-près*, 2° *vers*.

Je paſſe à l'examen particulier de ce que l'A. *Féraud* dit ſur le mot qui m'occupe: car, comme j'en ai prévénu l'Académie dès le temps où je lui ai préſenté des *Obſervations* ſur la *Langue*, ces obſervations, dans leur origine, ne devoient être qu'un *Supplément* au *Dictionnaire critique*, & quelquefois un *humble correctif*.

L'A. *Féraud* ***) donne à *environ* „une eſpèce de génitif: *d'envi-ron*." Exemple. „Son armée étoit *d'environ* 20000 hommes." „Un Rhodien *d'environ* 35 ans, ſurmonta tous les autres." Je crois que ce ſavant ſe trompe, & que ce *prétendu génitif* ne provient que de la *tranſpoſition* du *mot* qui *marque* le *génitif* avec ou ſans l'article. Au lieu de „Son armée étoit d'environ 20000 hommes" on diroit bien peut-être, ſoit „Son armée étoit *environ de* 20000 hommes" ſoit „Son armée étoit *de* 20000 hommes, *ou environ*" & alors que deviendroit le ſoi-diſant génitif? †) Et ſi celui-ci exiſtoit, il ne pourroit exiſter que pour *Environ adverbe*, & non pour *Environ prépoſition*. Or c'eſt à *Environ prépoſition*, que l'A. *Féraud* donne „une „eſpèce de génitif" ††). D'ailleurs ſi *Environ adverbe* avoit „une

*) Et le citoyen *Gattel*, lequel s'écarte ici du *Richelet portatif*, bien que ſon but ne fût d'abord „que ... d'en faire diſparoître les fautes *malheureuſement* aſſez „nombreuſes qui s'y étoient gliſſées."

**) *Trévoux* & ſon *Abrégé* ont retranché *un peu plus*, *un peu moins* de la définition d'*environ* „prépoſition."

***) Et le Citoyen *Gattel*. Ils auroient plutôt raiſon quant à „*d'alors*."

†) Et que deviendroit la phraſe „Son armée étoit *d'environ* 20000 hommes" ſi l'on en retranchoit *d'environ?* (Il n'eſt *pas défendu* d'en faire *ſans adverbe*) Elle manqueroit de ſens, faute du mot *de*: („Son armée étoit 20000 hommes") preuve que ce mot n'appartient pas à *environ*, mais à 20000 *hommes*.

††) Qu'on juge par l'article du *Dictionnaire critique*, que je vais tranſcrire en entier, ſi j'ai ſaiſi la penſée de ſon auteur. Si l'on me dit que non, du moins con-

„espèce de génitif," il ne l'auroit pas à lui ſeul, mais avec *à-peu-près*. Car ne diroit-on pas également „Son armée étoit *d'environ* „20000 hommes" & „Son armée étoit *d'à-peu-près* 20000 hom„mes?" Or l'A. *Féraud* n'attribue pas „une espèce de génitif" à *à-peu-près*. Je crois que c'eſt ici le lieu d'appliquer la 3e Remarque de notre Critique au mot *de*. „La place naturelle de la prépoſition *de* „eſt d'être près du nom qui la régit. Quelquefois pourtant c'eſt une „élégance de la faire précéder." Ainſi dans cette phraſe que j'imagine: „Il avoit une armée *d'*environ 20000 hommes," je me garde bien de mettre la prépoſition près du nom qui la régit, parce que cette poſition feroit naître une espèce d'hiatus. „Il avoit une armée *envi*„viron de 20000 hommes."

L'A. *Féraud* veut encore que la *prépoſition Environ* ſoit „*mieux* „placée *devant* qu'*après* le nom auquel elle eſt jointe." Il eſt mieux (ſelon lui) de dire: „*Il eſt* environ *deux heures*," que „*Il eſt deux heu*„*res* environ" & „*Un homme d'*environ *30 ans*" que „*Un homme de 30* „*ans* environ." Je penſe que ce ſavant ſe trompe encore ici, & cela doublement. Il confond *Environ adverbe* & *Environ prépoſition*,

viendra-t-on, je penſe, que notre Critique a un peu prêté le flanc à la critique, & que tout l'article devoit être tourné différemment.

„*Environ*, prép. (*Anviron* 1ère lon.) à-peu-près, un peu plus, un peu „moins. „„Il eſt *environ* deux heures. Il y a *environ* dix ans. = „Il a une eſpece „de génitif, *d'environ*. „„„Son armée étoit *d'environ* 20 mille hommes."" „„Un „„Rhodien *d'environ* 35 ans, ſurmonta tous les autres."" *Télém.*

„*Rem.* 1°. Boſſuet emploie *environ* au lieu de *vers*. „„*Environ* (vers) le „„temps. — *Sacy* a dit auſſi *environ le temps de* l'action. *Tr. de l'Am.* au lieu de, „*vers le temps*, &c.

2°. „*Environ*, comme prépoſition, eſt mieux placé devant qu'après le nom „auquel il eſt joint. Il eſt mieux de dire: il eſt *environ* deux heures, que, deux „heures *environ*: un homme *d'environ* 30 ans, que de 30 ans *environ*. Ce n'eſt „qu'avec la conjonction *ou* qu'il doit être placé après, & alors il eſt adverbe. „„Il eſt deux heures, *ou environ*." "

„3°. On doit dire, *environ deux* heures, & non pas *environ de* deux heures, „comme diſent les Poitevins & les Angevins. — *Environ* régit le génitif & „non l'accuſatif."

Dans cette dernière phraſe il faut ſans doute admettre une transpoſition de mots, & lire „*l'accuſatif* & non *le génitif*."

& dans les phraſes qu'il fait pour prouver ce qu'il avance au ſujet de la *meilleure* place d'*Environ* comme *prépoſition*, ce mot eſt *adverbe* *). Non-ſeulement *Environ prépoſition* eſt *mieux* placé *devant* qu'*après* le nom auquel il eſt joint, mais encore il *doit* précéder *toujours* ce nom, & cela *immédiatement*. On ne s'aviſera pas plus de dire: „Les „alouettes font leurs nids *le tems environ* que tout aime, que tout pul„lule dans le monde" qu'on ne ſongera à dire: „Les alouettes font „leurs nids *le temps vers* que tout aime, que tout pullule dans le mon„de." Quant à *Environ adverbe*, il pourra, comme ſon ſynonyme *à-peu-près*, être *mieux* placé *devant* qu'*après* le nom auquel il eſt joint, quand il ne ſeroit *pas mieux* de dire: „Un homme d'*environ* trente ans" que „Un homme de trente ans *environ*" &: „Un homme d'*à-peu-près* trente ans" que „Un homme de trente ans *à-peu-près*."

Selon ce même Critique „ce n'eſt qu'avec la conjonction *ou*, qu'*en„viron* doit être placé *après* le nom auquel il eſt joint, & *alors* il eſt „adverbe." J'en ſuis fâché, mais je crois trouver ici l'A. *Féraud* dans l'erreur. Il paroît faire dépendre de la conjonction *ou*, & de la *place* qu'*Environ* occupe dans la phraſe, la qualité d'*adverbe* que ce mot a *quelquefois* & *pour l'ordinaire*. Exemple: „Il eſt deux heures, *ou envi„ron*." Mais outre que je crois avoir prouvé ci-deſſus que dans la phraſe „Il eſt *environ* deux heures" *Environ* eſt *adverbe*, & non point *prépoſition;* qui ne voit que dans la phraſe „Il eſt deux heures, „*ou environ*" ces deux derniers mots forment une façon de parler elliptique, & ſont l'équivalent de ceux-ci, *ou environ deux heures?* Et ſi l'ellipſe ſaute aux yeux, il ſaute également aux yeux qu'on ne peut pas dire qu'*Environ* ſoit placé *après* le nom auquel il eſt *prétendûment* joint. D'ailleurs ce n'eſt pas une néceſſité que la conjonction *ou* précède *environ*, précédé d'un nom, ſi *Environ* doit obtenir la qualité

*) La preuve en eſt qu'on le remplaceroit ſans contredit par *à-peu-près*, & qu'on diroit bien, ſoit: „*Il eſt* à-peu-près *deux heures*" & „*Un homme d'*à-peu-près „*trente ans*," ſoit „*Il eſt deux heures* à-peu-près" & „*Un homme de trente ans* à-peu„près." Or *à-peu-près* eſt *adverbe*, non *prépoſition*.

d'*adverbe*. Exemple: „Eſt-il deux heures? *Environ.*" Dira-t-on que dans ce Dialogue *ou* ſoit à dire, ou bien qu'*environ* n'ait pas le ſens d'*à-peu-près?* Et ne conviendra-t-on pas plutôt, qu'ici, comme dans la phraſe du *Dictionnaire critique*, *Environ* eſt une *ellipſe?*

Que non ſeulement *Environ* comme *prépoſition* ſoit *mieux* placé *devant* qu'*après* le nom auquel il eſt joint, mais qu'encore il ne *puiſſe* être placé que devant, & qu'*immédiatement* devant, & qu'il puiſſe être *adverbe* ſans être placé *après*, & ſans la conjonction *ou*, c'eſt ce que je me flatte de prouver au moyen de la phraſe que me fournit *La Fontaine*. „Les alouettes font leurs nids *environ* le temps que tout aime, que tout „pullule dans le monde." *Environ* eſt là *prépoſition* & le ſynonyme de *vers*. Que je gliſſe la prépoſition *dans* entre la *prépoſition ſynonyme* de *vers* & le nom auquel elle eſt jointe, & *environ*, de *prépoſition* qu'il étoit, devient *adverbe*, & le *ſynonyme* d'*à-peu-près*. „Les alouettes „font leurs nids environ *dans* le temps que tout aime, que tout pul„lule dans le monde."

La place d'*Environ* comme *prépoſition* eſt donc *immuable;* ſa place comme *adverbe* peut varier; & je penſe que c'eſt ſouvent l'oreille qui lui aſſigne cette place. P. ex. dans les phraſes de l'A. *Féraud*

1) „Il eſt deux heures environ."
2) „Il eſt environ deux heures."
1) „Un homme d'environ trente ans."
2) „Un homme de trente ans environ."

& dans les miennes

1) „Il eſt deux heures à-peu-près."
2) „Il eſt à-peu-près deux heures."
1) „Un homme d'à-peu-près trente ans."
2) „Un homme de trente ans à-peu-près."

on dira mieux peut-être

2) „Il eſt *environ* deux heures."
2) „Un homme de trente ans *environ.*"

2) „Il eſt *à-peu-près* deux heures."
2) „Un homme de trente ans *à-peu-près*"

que

1) „Il eſt deux heures *environ*."
1) „Un homme d'*environ* trente ans."
1) „Il eſt deux heures *à-peu-près*."
1) „Un homme d'*à-peu-près* trente ans"

parce que chacune de ces quatre dernières phraſes forme un *vers* de *huit* ſyllabes:

1 2 3 4 5 6 7 8
1) „Il eſt deux heures environ."
1 2 3 4 5 6 7 8
2) „Un homme d'environ trente ans."
1 2 3 4 5 6 7 8
3) „Il eſt deux heures à-peu-près."
1 2 3 4 5 6 7 8
4) „Un homme d'à-peu-près trente ans" *).

Or l'oreille ne veut point de vers en proſe: au contraire elle ſe plaît aux membres de phraſe inégaux, comme notre très-illuſtre Confrère M. de *Wöllner* le ſoutenoit un jour avec grande raiſon contre feu M. le Profeſſeur *Moritz*.

Selon l'*Académie* l'expreſſion adverbiale *à-peu-près*, ſynonyme de notre adverbe *environ*, s'emploie indifféremment devant ou après les termes qu'elle ſert à modifier. Cela eſt très-heureux pour ceux qui ont l'oreille délicate, & qui la ſuppoſent telle à leurs auditeurs. Ainſi donc on pourra préférer „Il a 10000 livres de rente *à-peu-près*" à „Il a *à-peu-près* 10000 livres de rente" (phraſe de l'*Académie*) & s'épargner par là l'hiatus que forme „Il *a à*-peu-près..."

A propos d'euphonie, qu'on me permette ici une petite excurſion, pas plus grande que rien.

*) L'A. *Féraud* auroit donc *raiſon* de préférer „Il eſt *environ* deux heures" à „Il „eſt deux heures *environ*" & *tort* de donner à „Un homme d'*environ* trente ans" la préférence ſur „Un homme de trente ans *environ*."

Un jeune homme de qui, pendant pluſieurs années, je me ſuis amuſé à former l'oreille, me demandoit dernièrement pourquoi *heureux et malheureux* ſonnoit mieux que *malheureux et heureux*. Il prétendoit que ſon oreille lui faiſoit préférer le premier arrangement de mots au ſecond, mais ſans lui dire le *pourquoi*. Je crois en trouver plus d'un. D'abord, dans „Heu*reux* & malheu*reux*," le ſon *reux*, qui y eſt deux fois, ne revient qu'après la *troiſième* ſyllabe, au lieu que dans „Malheu*reux* & heu*reux*," les ſyllabes finales *reux* ne ſont ſéparées l'une de l'autre que par *deux* autres ſyllabes. *Enſuite*, dans la prononciation de „Malheureux & heureux," l'on entend *deux* fois de ſuite *trois* ſyllabes, au lieu que dans „Heureux & malheureux," on entend d'abord *deux* ſyllabes, puis *quatre*. Or, comme je l'ai déja obſervé, l'oreille ſe plaît à entendre des membres de phraſe de différentes étendues; & de là vient ſans doute que les pièces de poéſie en vers irréguliers (comme ſont la plupart des charmantes Fables de *La Fontaine*) non-ſeulement à cauſe de la *meſure*, mais encore à cauſe de la *céſure*, attachent plus que les vers Alexandrins, qu'on ne ſauroit lire de ſuite ſans ennui, & qui en cauſeroient encore plus, ſi, dans la lecture, on s'attachoit toujours exactement à la meſure & à l'hémiſtiche. Enfin une troiſième raiſon pour préférer *heureux et malheureux* à *malheureux et heureux*, & celle qui décide le plus peut-être, ſans qu'on s'en doute, cette raiſon ſe trouve dans l'*hiatus* que forme *et heureux* prononcé „*é eu*reux" l'*h* n'étant pas aſpirée.

A propos encore d'*Heureux et malheureux*, mais pour *dernier propos*, je rappellerai ici l'anecdote de cet avocat, qui, plaidant pour une dame en un ſiècle, où, dans le palais de Thémis, comme au Parnaſſe, on parloit *grec* & *latin* en *françois*; plaidant, dis-je, pour une dame, laquelle avoit à ſe plaindre de ſon mari, commença ſon diſcours ainſi: „Meſſieurs, la dame pour qui je plaide, eſt à la fois *heu-*„*reuſe et malheureuſe*: heureuſe, *quidem*, d'avoir épouſé un ſeigneur

„auſſi

„auſſi riche, auſſi ſpirituel, auſſi diſtingué dans ſa Province, auſſi *ceci*, „auſſi *cela*, que l'eſt ſon adverſe partie; malheureuſe, *autem*, de n'avoir „pas ſeulement à manger ce que les Grecs appellent *ton Arton.*" Ici le motif de préférer *heureuſe et malheureuſe* à *malheureuſe et heureuſe*, n'étoit pris, ſans doute, ni de l'inégalité des membres de la première phraſe, ni du plus grand éloignement dans lequel elle tenoit les ſyllabes *reuſe*, ni de l'hiatus qu'amenoit la ſeconde conſtruction *), mais du beſoin qu'éprouvoit Maître un tel d'amener du Grec au bout de ſa phraſe. Ἔφην.

Comme, dans une aſſemblée *publique* d'Académie, on ne peut pas tout dire, & comme encore, à dire la franche vérité, les idées ne viennent pas toutes à la fois, voici un petit ſupplément à mon Mémoire.

1) Un mot d'abord ſur l'*étymologie* d'*Environ:* on s'y attend, je crois, de ma part.

„Il eſt certain," ſelon *Caſeneuve*, que nous avons fait *environ* de *in gyrum* (qui ſignifie proprement *environ* & *autour*) comme nous avons pris *virer* de *gyrare.*

Selon *Ménage* „c'eſt un mot compoſé d'*en* & de *viron*," & *viron* a été fait de *gyrus* par *gyro* & *gyrone.* Cent ans avant *Ménage* on diſoit *viron* pour *environ.*

L'*Abrégé* de *Trévoux* par *Berthelin* (qui „n'admet que les étymolo„gies ſûres & bien fondées, rejetant celles qui ſont incertaines & for„cées") ne s'eſt chargé ni de l'étymologie de *Caſeneuve*, ni de celle de *Ménage*, mais il a répété celle de *Trévoux*, & ſelon celle-ci *environ, environs, environner*, viennent du verbe *virer*, qui *pourroit bien* avoir été fait du verbe *gyrare.* *Furetière* reſtreint cette deſcendance *préſumée* à *environner.* Quant à moi, je ne ſais comment *virer* auroit fait *environ* & *environner*, à moins qu'on ne dît qu'*environ* eſt corrompu d'*en-*

*) Ni poſſible de la *convenance* qu'il y avoit à parler du *bonheur* de la Dame, avant de *mentionner* ſon *malheur.*

virant, & qu'*environner* vient de *virer* par *environ*. Ce qu'il y a de ſûr, c'eſt qu'on trouve *engronner* dans *La Combe*, & *engironner* dans *Borel*, (l'un & l'autre ayant le ſens d'*environner*) & ſi *engronner* n'eſt pas une faute de l'inexact *La Combe*, je le tiens abrégé d'*engironner* par „en„geironner," „engèronner," „engeronner." Le *g* d'„engeronner" par la ſuppreſſion de l'*e* dans l'*orthographe* eſt devenu *gh*, mais l'*e* ne l'a pas quitté pour cela dans la *prononciation*, parce qu'on ne ſauroit émettre *engronner* ſans dire „en-ghe-ro-né."

Mais pour dire mon avis ſur l'étymologie d'*environ*, je tiens certain que ce mot vient, ſoit directement d'*in gyrum* (par le changement d'*in* en *en* & du *g* de „*gyrum*" en *v* & de ſa terminaiſon *um* en *on*), ſoit médiatement par *en* & par *viron*. On trouve *viron* dans les *Menus propos de Mère ſotte* par *Pierre Gringore* (ou *Gringoire*) auteur du 16e ſiècle

(„Pour t'envoyer *viron* l'heure de ſixte,")

mais je le fais venir de *gyrum*, accuſatif de *gyrus*, & non de *gyrus* par *gyro* & *gyrone*, mots qui ſentent furieuſement la fabrique du docte *Gilles*, & qui d'ailleurs ne donnent *viron* que par la *ſuppreſſion* de l'*e* final de „gyrone."

2) L'abbé *Féraud* blâme les Angevins & les Poitevins de dire „en„viron *de* deux heures," au lieu de „environ deux heures," parce qu'*environ* régit l'*accuſatif* & non le *génitif* *). Déjà *Furetière* avoit dit qu'*environ de* n'étoit pas François. Mais ne devroit-il pas l'être, *environ* étant ſynonyme d'*autour*, qui régit le *génitif*, de même que *in gyrum*? Du reſte ſi *environ* pour *environ de* eſt une faute, c'eſt une faute ancienne, car on lit dans le Roman de *Guillaume au court nez*:

„Droit en un val ſont les Francs deſcendus,
„Li Roys Loys, *environ luy* ſes drus,
„Et ſes amys, & ſes gens abſolus."

*) L'imprimé porte „... le *génitif* ... l'*accuſatif*. . . ."

3) Si l'on a dit *viron* avant *Ménage* pour *environ*, on a mal dit, & *Ménage* lui-même, comme *Corneille*, blâme ceux qui uſoient de *viron*. Ce mot-ci ne ſauroit non plus s'employer ſans *en*, qu'on ne ſauroit dire *gyrum* pour *in gyrum*.

4) *La Fontaine* a dit *à l'environ*

(„Il [le Lion] rugit, on ſe cache, on tremble *à l'environ*")

& je ne ſaurois le blâmer de cette expreſſion, bien que je ne la trouve pas dans les Dictionnaires. *Entour* au *pluriel* eſt ſynonyme d'*environs*, & *à l'entour* eſt autoriſé.

L'ART DE SE VÊTIR
et les vêtemens conſidérés ſous leurs divers rapports.

PAR M. DE GOYON *).

PREMIER MÉMOIRE.

Quid juvet ac deceat.

De tous les beſoins auxquels la nature aſſujettit l'homme, après celui de ſe nourrir, le beſoin de ſe vêtir eſt le plus général & le plus preſſant. Il nous porte à chercher, à trouver les moyens de nous mettre à l'abri des injures de l'air, de l'attaque des animaux & des atteintes des corps extérieurs, bien plus immédiatement que ne le font les aſiles ou les logemens que nous pouvons nous ménager & que l'architecture a rendus plus vaſtes & plus commodes.

En effet, la conſtruction des bâtimens n'eſt, en quelque ſorte, qu'une extenſion, un complément de l'art de ſe vêtir. Proportions gardées, la hutte, comme le dôme, n'eſt qu'un bonnet ou un chapeau; la grotte, comme la maiſon, qu'une tunique, un pourpoint; la caverne, comme le palais, qu'un ſurtout, un manteau. En un mot *l'habitation* & *l'habit* ne different que du plus au moins; l'ampleur, la ſolidité caractériſent la première; le ſecond plus ſouple, eſt plus approprié au corps; mais au fond, l'objet de tous les deux eſt le même **).

*) Lu à l'Académie le 27 ſeptembre 1798.

**) Veſte & veſtibule ne viennent-ils pas de *Veſtis*, (habit), comme caſaque & caſe de *Caſa* (maiſon); & toit (*tectum*), ainſi que tégument, (*tegumen*) de *tegere* (couvrir)?

Auſſi, parmi les arts qu'inventa la néceſſité, qu'a perfectionnés l'expérience & que le goût embellit, ceux qui contribuent à nos vêtemens ont-ils dû particulièrement exercer l'induſtrieuſe activité de l'esprit humain, & tenir une place diſtinguée entre ſes productions les plus intéreſſantes.

Cependant, par une ſingularité vraiment inexplicable, tandis que la plupart des inventions & des arts qui concourent à un même objet, ſouvent aſſez frivole, ſe trouvent décrits avec grand ſoin, & forment un corps d'ouvrage complet; ceux qui pourvoient aux diverſes parties de notre vêtement, incomplètement traités, n'ont pas encore été réunis par une même plume, & laiſſent bien des choſes à déſirer, ſoit pour l'hiſtoire de l'art, ſoit pour la théorie, ſoit pour la pratique.

Il ne nous reſte des anciens auteurs, ſur ce ſujet, que quelques fragmens épars, quelques paſſages obſcurs. Dans la foule des commentateurs de leurs ouvrages & des ſcoliaſtes que la renaiſſance des lettres a fait éclore, pluſieurs, il eſt vrai, ſe ſont attachés à interpréter les endroits qui concernent l'habillement des Grecs, des Romains, & même de quelques-uns des peuples que ces premiers nommoient barbares. Mais rarement les *Juſte Lipſe*, les *Caſaubon*, les *Manuce*, les *Baïf*, les *Saumaiſe*, encore moins les *Grævius*, les *Gronovius*, les *Ferrari* & les *Rubenius* ſont-ils d'accord dans les explications qu'ils nous donnent des textes originaux. Ils ont enfanté des volumes de diſſertations polémiques, où, mêlant les injures littéraires, de fréquentes mépriſes, des contradictions palpables aux citations dont ils rapportent des variantes ou tordent le ſens, pour l'accommoder à leurs opinions particulières, ils obſcurciſſent toutes les notions, au lieu de les éclaircir, & nous laiſſent réellement dans les ténèbres.

Aucun d'eux, ni parmi les écrivains plus modernes, n'a eu l'idée de raſſembler ce que l'antiquité nous a transmis & ce que les temps poſtérieurs y ont ajouté. Aucun n'a imaginé d'extraire un précis fidèle & clair des dépoſitions nombreuſes que forment d'un côté tant de médailles, de ſtatues, de bas-reliefs, & autres monumens curieux,

de l'autre côté, les deſcriptions que tant de voyageurs nous ont données des vêtemens en uſage chez les peuples policés ou ſauvages, anciennement & nouvellement connus. Aucun ne s'eſt aviſé d'en compoſer l'hiſtoire, d'en réunir ſous un même point de vue les principaux détails.

Dans les Dictionnaires des arts & métiers, ſurtout dans ce répertoire univerſel auquel des ſavans juſtement célébres ont donné un degré de mérite qui ne peut que s'accroître avec le temps, on trouve relativement à la fabrique des toiles, des étoffes & des différentes parties du vêtement, des articles bien faits, mais iſolés, ſans ſuite, ſans liaiſons. Point de règles à ce ſujet, fondées ſur le beau eſſentiel dont le principe exiſte certainement dans la nature; point d'enſemble utile, préſenté d'une manière méthodique & auſſi inſtructive qu'elle pourroit l'être.

Seroit-ce parce que les peuples, à raiſon de la différence des climats, en mettent néceſſairement dans le genre de leurs vêtemens; parce que les nations les plus polies ſont celles qui varient le plus dans la manière de s'habiller? Mais les hommes ne diffèrent-ils pas autant dans la manière de pourvoir aux autres beſoins de l'humanité? Leurs alimens, leurs logemens, leurs arts, tous leurs uſages n'offrent-ils pas autant de diſſemblances & de variété que les climats, les tempéramens, les caractères & les figures?

Cependant l'agriculture & les ſubſtances nourricières qui en ſont le produit, ont trouvé des Varron, des Columelle, des Duhamel, des Tull, des Parmentier. L'architecture, avec ſes diverſes branches, a eu ſes Vitruve, ſes Palladio, ſes Vignole, ſes Bernin, ſes Perrault, ſes Manſard, ſes Daviler, ſes Blondel, ſes Chambrais. L'art nautique, l'équitation, la vénerie, presque tous les moyens de fournir aux beſoins, de contenter les fantaiſies de l'homme; ont été raſſemblés & rédigés en corps d'ouvrages avec beaucoup d'ordre & de ſoin. Il n'y a pas juſqu'à l'Art militaire & au Blaſon, l'un cruel, mais que l'injuſtice des hommes a rendu néceſſaire; l'autre futile, mais auquel leur orgueil

attacha tant d'importance, qui n'ayent été décrits, figurés, enſeignés avec des recherches & des détails infinis.

L'art ſeul de ſe vêtir attend un écrivain qui, rempliſſant les conditions ci-deſſus énoncées, outre l'hiſtoire de cet art & de toutes ſes branches, depuis leur origine jusqu'à nos jours, nous apprenne les moyens imaginés chez les différens peuples de la terre pour ſatisfaire à cet égard leurs beſoins & leurs goûts; qui indique toutes les matières & les procédés favorables à la fabrique, au nettoiement, à la teinture des toiles, des draps, des étoffes, à la coupe, à la façon des vêtemens convenables dans les diverſes circonſtances de la vie; qui de plus enviſage l'art de ſe vêtir & les habillemens relativement à l'état politique & civil des hommes, à l'ordre ſocial, religieux & militaire, à l'économie domeſtique, aux beaux-arts & aux moeurs.

Le manque de connoiſſances néceſſaires & l'inſuffiſance de talens ne me permettent pas d'entreprendre une tâche dont je ſens toute l'importance, mais dont j'aperçois en même temps toute l'étendue, toutes les difficultés.

Je me bornerai donc à préſenter quelques *Conſidérations ſur l'Art de ſe vêtir et les vêtemens enviſagés ſous leurs divers rapports.*

Chercher à écarter les infirmités du corps, les travers de l'esprit, les maladies de l'âme; à maintenir en ſanté l'homme tout entier; à le ſervir dans ſes beſoins, à l'éclairer ſur ſes reſſources; à lui rendre la vie auſſi heureuſe qu'elle peut l'être, c'eſt le but principal de toute ſociété ſavante; c'eſt particulièrement l'ambition de celle qui veut bien m'écouter: ambition vraiment conforme aux vues ſages & bienfaiſantes de notre auguſte Protecteur; & qui a dicté les obſervations ſuivantes ſur l'un des objets les plus intéreſſans.

Il m'engage, on le voit bien, à faire quelques excurſions dans l'hiſtoire naturelle & dans la phyſique, ſciences auxquelles une claſſe de cette illuſtre compagnie s'applique ſpécialement & avec le plus grand ſuccès. Mais ce qui paroîtroit témérité de la part d'un ſimple Philologue, devient excuſable par le motif qui l'anime. Quand il s'agit

de l'utilité publique, la diſtinction des claſſes diſparoît; un écrivain ſe croit de toutes, ſinon par le talent, du moins par le zèle; & il ſe dit avec une ſorte de confiance: *Anch' io, ſon pittore!* ou plus modeſtement: *Omnis homo miles!*

I.

L'ART DE SE VÊTIR

et les vêtemens conſidérés ſous les rapports phyſiques.

Dès l'abord il ſe préſente une queſtion qui ne devroit pas en être une. Mais dans ce ſiècle, où il n'eſt point d'innovations dont on ne s'aviſe, point de ſyſtèmes que l'on ne forge ou que l'on ne réchauffe pour renverſer les idées reçues, pour changer l'ordre des choſes, & nous ramener, s'il étoit poſſible, à ce qu'on appelle *le pur état de nature*, on a demandé ſérieuſement ſi l'homme étoit réellement condamné à ſe vêtir; ſi au contraire il n'étoit pas deſtiné à reſter nu. C'eſt le ſentiment de quelques Cyniques modernes, de quelques écrivains jaloux de ſe diſtinguer par la ſingularité de leurs opinions, & plus amis du paradoxe que de la vérité. Il ne tiendroit pas à eux de nous faire renoncer aux lois, aux propriétés, à tous les caractères, à tous les avantages de la civiliſation; &, en nous rangeant parmi les Gymnoſophiſtes, de nous renvoyer dans les antres, dans les forêts, y diſputer, comme les Sauvages, la pâture & la proie aux animaux.

Pour donner à leurs idées une apparence de raiſon, ils avancent, non ſans quelque fondement, qu'en façonnant, en modifiant l'homme, en le perfectionnant peut-être, ſinon au moral, du moins quant à la partie intellectuelle, nos inſtitutions ſociales l'ont certainement dégradé, dénaturé quant au phyſique; comme la domeſticité a fait dégénérer parmi nous tant d'eſpèces d'animaux, au point de les rendre méconnoiſſables *). Ils ſoutiennent, entre autres aſſertions, que ſi l'homme

*) *Etiam fera animalia, ſi clauſa teneas, virtutis obliviſcuntur. Tacit. Hiſt. IV, cap.* 64.

me étoit accoutumé, dès l'enfance, à ſe paſſer de vêtemens, ſa peau auroit plus d'épaiſſeur; ſon poil ſeroit plus fourni, plus fort. Les ſeuls tégumens donnés par la nature, modifiés par le climat, par l'impreſſion de l'air, la variété des ſaiſons & le frottement continuel, ſeroient, comme ceux des autres animaux, ſuffiſans pour le garantir de l'inclémence de ces mêmes ſaiſons, &, jusqu'à un certain point, des atteintes du dehors *). L'enveloppe des diverſes parties du corps humain que nous tenons couvertes, ſi elles ne l'étoient pas, acquerroient, diſent-ils, autant d'épaiſſeur, de conſiſtance & de dureté que celle des mains & de la face qui reſtent presque toujours découvertes; en un mot, ſuivant l'un d'eux, *l'homme ſeroit tout viſage.* Ils citent, pour exemple, la fille ſauvage de Châlons & quelques enfans trouvés dans les bois.

Si nous donnons quelque étendue à la réfutation d'un pareil ſyſtème, c'eſt parce qu'elle nous ſert à développer les principes de l'art de ſe vêtir, l'origine & la différence des vêtemens.

Voici donc ce que nous répondrons aux partiſans de la nudité habituelle de l'homme.

Il y a, quant au phyſique, cette grande différence entre lui & les animaux, que les diverſes eſpèces de ceux-ci, presque toujours circonſcrites par la nature dans un espace limité & affectées à tel ou tel climat en particulier, ne ſauroient, la plupart, être transportées impunément dans un autre; qu'à moins de ſoins extrêmes, & ſouvent malgré ces ſoins, elles y dégénèrent, ceſſent de ſe reproduire, ou même y périſſent; au lieu que l'homme eſt de tous les climats. Son espèce répandue ſur toute la ſurface du globe, excepté ſous les pôles où la nature ſemble expirer, ſon espèce par-tout eſſentiellement la même, malgré quelques variétés extérieures qui réſultent du ſol, de la température &

*) S'il faut en croire certains voyageurs, les Siamois, qui ont la coutume d'aller nus-pieds, ont la plante ſi dure que pluſieurs d'entre eux marchent ſur des charbons ardens, ſans en être endommagés. Cela eſt admirable! pourvu qu'il n'y ait point de ſupercherie, comme tant de charlatans & de joueurs de gobelets, dans l'Inde & ailleurs, ſavent en uſer pour attraper la crédule multitude.

des alimens, vit, ſe nourrit, ſe propage, & conſerve le libre & entier exercice de toutes ſes facultés *). Or ſuppoſât-on que les hommes placés ſous la zone torride puſſent abſolument ſe paſſer de vêtemens, ce qui n'eſt pourtant pas vrai, ſurtout dans la ſaiſon des pluies que l'on ſait y être abondantes & froides **), certainement cette poſſibilité ne ſauroit exiſter pour ceux qui ſont éloignés des tropiques, & à plus forte raiſon, quand ils s'approchent des cercles polaires. Quelque courage que l'homme eût pour braver les rigueurs du froid, jamais ſa peau n'auroit aſſez d'épaiſſeur pour réſiſter à l'action pénétrante du nitre aërien & des pointes aiguës dont l'air glacé de l'hiver & du nord le perceroit ſans ceſſe. Jamais elle ne ſuffiroit à retenir & fixer la chaleur animale, qui tend continuellement à s'exhaler, à ſe diſſiper à travers les pores, & dont les vêtemens d'un tiſſu ſerré, appliqués immédiatement ſur la peau, peuvent ſeuls empêcher l'évaporation.

Il eſt, on le ſait, des peuples ſeptentrionaux qui, pour endurcir leurs enfans contre le froid & fortifier leur tempérament, ont coutume de les plonger dans l'eau même glacée, au moment de leur naiſſance. Tel étoit, ſuivant Céſar, l'uſage des anciens Germains ***). Mais ces

*) Les animaux, comme les plantes, peuvent ſe diſtinguer en trois claſſes. Les uns en petit nombre, & peut-être l'homme ſeul, par la force de leur conſtitution, peuvent réſiſter à la chaleur & à la froidure de tous les climats. Les autres, & ce ſont les plus nombreux, quoique tenant à des climats particuliers, à certaines zones du globe, peuvent ſouffrir le déplacement, & même ſe multiplier. D'autres enfin ſont tellement circonſcrits par la nature dans des bornes étroites, qu'ils ſont dans l'impoſſibilité de ſe répandre. *Extrait du Mercure de France.*

**) La zone torride ſeroit inhabitable ſans les pluies abondantes que le ſoleil entraîne toujours après lui, & les vents qui ſouffient du pôle oppoſé au côté de la ligne où ſe trouve le ſoleil. *Hiſt. générale des voyages.*

***) *A pueris, in eam ſe conſuetudinem adduxerunt, ut, locis frigidiſſimis, neque veſtitûs, præter pelles, habeant quidquam, quarum, propter exiguitatem, magna eſt corporis pars aperta, et laventur fluminibus. De bello Gallico, libr. IV.* — Les anciens peuples d'Italie, Scythes ou Celtes d'origine, plongeoient, dit Virgile, leurs enfans nouveaunés dans l'eau froide, & même dans l'eau glacée.

Durum à ſtirpe genus, natos ad flumina primùm
Deferimus, ſævoque gelu duramus et undis. Aeneïd. Lib. IX.

Les Américains ont la même coutume. (voyez *le Recueil des voyages*). S'il n'y

peuples ne ſe dispenſoient pas de couvrir leurs enfans de vêtemens plus ou moins chauds, ſelon les circonſtances; & c'eſt encore ce qui ſe pratique parmi eux aujourd'hui.

Quant à la fille & aux enfans devenus ſauvages dont on a parlé, le goût du merveilleux a brodé, exagéré les faits qui d'ailleurs n'ont pu qu'être très-imparfaitement connus, vu l'état brut & ſtupide où l'on a trouvé ces êtres infortunés, & qui a dû, faute de langage, les empêcher de rendre un compte exact de ce qui les concernoit. D'ailleurs il paroît atteſté qu'ils étoient en partie couverts, ſoit des reſtes de leurs anciens vêtemens, ſoit de ceux qu'ils s'étoient faits eux-mêmes *).

De ces faits éclaircis revenons aux raiſonnemens. Sans doute avec l'âge & par le frottement continuel, la peau devient plus épaiſſe & plus dure. Sans aller bien loin chercher des exemples, les mains de nos ouvriers & gens de peine, la plante des pieds des payſans dans les con-

a d'exagération dans aucune de ces citations, il faut obſerver la condition requiſe: *durum a ſtirpe genus*, race de ſauvages, & le climat de l'ancienne Italie dont la température permettoit peut-être un pareil uſage ſans de grands inconvéniens. On peut en dire autant des parties de l'Amériqne qui ſe trouvent ſous les zones tempérées, &, à plus forte raiſon, entre les tropiques. Mais chez nous, à combien d'enfans ont cauſé la mort ces idées paradoxales de J. J. Rouſſeau, & cet engouement qu'avoit excité ſon éloquence ſéduiſante! (voyez l'Encyclopédie méthodique, au mot *Hygiène.*) Tacite, il eſt vrai, dit, en parlant des Germains, que leurs enfans nus & élevés dans la mal-propreté, acquéroient cette ſtature, cette force qui étonnoient les Romains; *in omni domo nudi ac ſordidi, in hos artus, in haec corpora quae miramur, excrescunt.* Mais c'étoit dans la maiſon, *in omni domo*, comme les eſclaves, au milieu des beſtiaux, *inter eadem pecora*, dont l'haleine & la tranſpiration rendent, comme on ſait, les étables très-chaudes. Et même, pendant l'hiver, les habitations de ces peuples étoient des ſouterrains creuſés exprès, & recouverts d'une grande quantité de fumier, qui les mettoient à l'abri du froid: *ſolent et ſubterraneos ſpecus aperire, eosque multo inſuper ſimo onerant, ſuffugium hiemi; quia rigorem frigorum ejusmodi locis molliunt.* — D'ailleurs quand ces enfans ſortoient de ces retraites, nul doute que leurs mères ne les vêtiſſent de ce *ſagum*, de ces peaux de bêtes qui étoient l'habillement ordinaire des deux ſexes. *Tegumen omnibus ſagum, gerunt et ſerarum pelles, nec alius fœminis quam viris habitus.* — *De mor. German.*

*) C'eſt ce qui réſulte des notes de *Martini* ſur l'hiſtoire naturelle de M. *de Buffon*, traduction allemande, chap. *des Variétés de l'espèce humaine.*

trées où ils vont pieds nus une grande partie de l'année, ſe couvrent, comme celle des Siamois & des Sauvages, d'une peau groſſière & calleuſe qui reſſemble à des gants de chamois, à des ſemelles de cuir. Auſſi ces parties du corps ſont-elles bien moins ſenſibles à l'impreſſion du froid; mais ce ſont les ſeules dans ce cas-là, même parmi cette claſſe d'hommes voués au genre de vie le plus pénible. Eh! combien d'autres qui, par leur condition dans la ſociété civile, n'ont ni les pieds ni les mains expoſés à ces travaux, à ces frottemens continuels, ni par conſéquent ſusceptibles de s'endurcir à ce point! & quand même on ſuppoſeroit que tous les hommes indiſtinctement parvinſſent, avec l'âge & le travail journalier, à acquérir, dans toutes les parties de leur corps, cette épaiſſeur & cette dureté, combien d'individus qui, avant d'arriver à cet état, périroient par l'inclémence des ſaiſons; puisque, pendant certains hivers plus rigoureux, on voit, même parmi nous, mourir de froid des infortunés auxquels leur pauvreté ne permet pas d'être ſuffiſamment vêtus; puisque l'on voit les animaux les mieux fourrés chercher un abri contre la rigueur de la ſaiſon, & leur poil presque toujours changer du noir au blanc par l'action du froid? Témoins les rénards, les loups & les ours des contrées polaires.

Il eſt d'ailleurs une autre raiſon qui, même dans les climats brûlans, détermine les hommes & ſurtout les femmes à couvrir au moins certains endroits de leur corps. On ne parle pas encore de la pudeur, ſentiment moral que nos adverſaires prétendent factice, qu'ils traitent de préjugé, & dont nous nous occuperons dans la ſuite (en examinant les rapports des vêtemens avec les moeurs). Il n'eſt queſtion maintenant que de motifs purement naturels & de raiſons phyſiques.

1° La crainte de bleſſer certaines parties du corps auſſi délicates que proéminentes, & qui, dans toutes les ſituations poſſibles, ſont les plus expoſées à être léſées par les corps durs, anguleux & tranchans; cette crainte a dû certainement porter les hommes à les couvrir.

2° Les ſenſations désagréables que produiſent certains conduits inférieurs du corps humain, & les changemens auxquels ils ſont ſujets,

ont été un nouveau motif pour les cacher. C'eſt ce que l'on voit chez les peuples les plus ſauvages qui s'enveloppent ordinairement le milieu du corps. Toutes les relations l'atteſtent. Selon elles, il n'eſt presque pas de pays, même ſous l'équateur, où les habitans ſoient aſſez brutes pour aller tout nus, & ſans avoir au moins un tablier ou une ceinture *).

Ainſi le voeu de la nature & la conſtitution phyſique de l'homme lui font une néceſſité plus ou moins preſſante de ſe vêtir en tout & en partie.

Combien donc n'auroit-il pas à ſe plaindre de ſa condition plus aſſujettiſſante à cet égard, plus dure que celle des animaux & des inſectes les plus vils? Presque en naiſſant, ceux-ci ſont vêtus & armés avec tant de libéralité pour leurs beſoins, tant de prévoyance contre le danger! Pluſieurs ſont parés des mains de la *nature* avec tant de magnificence & de goût **); tandis que l'homme deſtiné à jouer un ſi grand rôle ſur la ſcène du monde, l'homme à ſa naiſſance, abſolument nu, foible & désarmé, attend que la main d'autrui vienne le vêtir & le défendre! Condamné par le Créateur à un état ſi pénible, y auroit-il été abandonné ſans reſſources? Moins bien traité pour ce qui concerne le corps, quels dédommagemens ne devoit-il pas recevoir du côté de l'esprit? S'il a tout à faire pour ſubvenir à ſes beſoins, du moins devoit-il en trouver les moyens dans ſon intelligence & dans la multi-

*) Certains voyageurs prétendent que, dans la nouvelle Hollande, & quelques contrées peu connues au milieu de l'Afrique, hommes & femmes ſont entièrement nus. Cela fût-il vrai, quelques exceptions aſſez rares ne ſauroient détruire le principe fondé ſur un beſoin, ſur un uſage général.

**) Presque par-tout où nous employons le mot *nature*, terme ſi vague & dont on a tant abuſé, nous entendons ſon Auteur tout-puiſſant. Confondre *l'Ouvrier* avec *l'ouvrage*, la cauſe première & ſouverainement intelligente avec les cauſes ſecondes & purement phyſiques, eſt une de ces abſurdités qui, aujourd'hui *renouvelées des Grecs*, montrent jusqu'où peut aller l'aveuglement de l'homme abandonné à ſes propres lumières. C'eſt la doctrine de *Straton* & d'*Ariſtote*, fondue avec celles de *Démocrite* & *d'Epicure*, miſe en vers par *Lucrèce*, & depuis en ſyllogismes latins par *Spinoſa*, en proſe françoiſe par *Helvetius*, & reproduite avec un acharnement ridicule par la tourbe des Philoſophiſtes.

tude, la variété des êtres qui l'entourent. Telle eſt en effet ſa glorieuſe prérogative. En aſſignant des limites à l'exiſtence locale de presque tous les animaux, comme à celle des végétaux, la ſageſſe infinie de l'ordonnateur ſuprême les a munis de vêtemens & d'enveloppes convenables aux temps & aux lieux. Elle n'a pas été moins magnifique envers l'homme. Si elle lui a donné la terre toute entière pour domicile, elle en a également fait ſon domaine, ſon magaſin. En tout temps & dans tous les lieux, il a la faculté, pour ſe vêtir, de mettre à contribution toutes les productions de la nature, tous les habitans de la terre, de l'air & des eaux. Par-tout il trouve les matières premières de ſes vêtemens, aſſorties au climat où il vit, & qu'il peut aiſément approprier à ſes beſoins.

Dans les plaines de l'Orient que le plus ancien & le plus croyable des hiſtoriens nous préſente comme le berceau du genre humain & des arts, ſous un ciel tempéré par un printemps continuel, quelques feuilles ſouples & larges, telles que celles du *figueïra* ou bananier des Indes, des palmiers & du latanier, auront ſuffi pour couvrir la nudité des premiers habitans de la terre.

Lorsque cette famille unique aura eu multiplié ſes branches ou ſes rejetons, & que ceux-ci, trop gênés ſur le territoire originel, ſe ſeront étendus ſur la ſurface du globe, les différens climats auront fait éprouver de nouveaux beſoins, & les nouveaux beſoins auront trouvé de nouvelles reſſources.

Aux peuplades qui ſe ſeront portées vers le Sud & ſous la zone brûlante, ſelon qu'elles auront choiſi pour demeures les continens ou les îles, les arbres leur auront offert des écorces fines & légères; ils auront eu, ſous la main, des roſeaux, des joncs, des glaïeuls doux & frais. Mais pour les familles qui auront tourné leurs pas vers les contrées plus froides, à proportion de la rigueur des climats & des ſaiſons; il leur aura fallu des matières plus molles & plus chaudes. Auſſi, quelle immenſe proviſion de peaux fourniſſent aux peuples Ichtyophages les loutres, les caſtors, les chiens de mer, les veaux-marins, les phoques,

presque tous les amphibies; aux peuples chaſſeurs ou paſteurs, les quadrupèdes de toute espèce dont ils retournent la partie laineuſe ou velue en dedans ou en dehors, ſelon le beſoin; ſans compter le duvet & les plumes que procure cette foule d'oiſeaux dont la terre & les eaux ſont couvertes! En un mot, quelque part que les hommes ſe ſoient fixés, dans les plaines, les vallées ou ſur les montagnes qui, à la même latitude, ont une température ſi différente à raiſon de l'élévation du ſol, des neiges, des glaciers, des forêts & des lacs, par-tout les unes ou les autres de ces ſubſtances auront fourni les matières convenables au vêtement *).

En ſe couvrant de la dépouille des végétaux & des animaux, ſans y rien changer, les hommes encore ſauvages & ignorans, ſe ſeront contentés de les attacher ſur eux avec une épine, un os ou une arête de poiſſon. Enſuite, pour mieux aſſujettir ces écorces & ces peaux, pour en réunir les extrémités, & les ajuſter ſur eux, ils auront employé des brins d'herbes ligneuſes, des filamens de quelque écorce. Quelque choſe de mieux: les nerfs, les boyaux, les membranes des animaux, découpés en bandelettes, refendus en lanières avec un os, une coquille ou un caillou tranchant, auront ſervi de fil, de cordons ou de courroies. Les épines, les arêtes, après avoir tenu lieu d'épingles, auront encore fait l'office d'alènes ou d'aiguilles pour ces coutures & ces aſſemblages ruſtiques.

Avec ces matériaux & ces outils groſſiers, on ſe ſera fait des eſpèces de manteaux, de tuniques, de bonnets, de chauſſures capables à un certain point de défendre contre l'inclémence des élémens & l'atteinte des corps extérieurs.

*) Ce ſont bien moins les zones du globe que la température des régions qui différencient & claſſent les productions de la nature, ſoit animaux, ſoit végétaux. On trouve non ſeulement ſur les Alpes & les Pyrénées, mais encore ſur le ſommet du mont Ararat & des Cordélières, les plantes du Groenland & de la Laponie; un peu plus bas, celles que produiſent la Suède, le Danemark &c.; & plus bas encore, celles qui ſont naturelles à la France & autres régions tempérées. (*Mercure de France.*)

Voilà les premiers eſſais de l'induſtrie naiſſante. Les voilà tels qu'on les reconnoît chez les Hottentots, les Patagons, les Pécherais, les Lapons, les Samojèdes, les Groënlandois, chez les habitans des îles Curiles & nouvellement découvertes, ſoit dans la mer du Sud, ſoit dans les mers voiſines des cercles polaires, où le commerce des peuples policés n'a pas encore fait adopter leurs arts & leurs uſages *).

De cet état informe de l'art de ſe vêtir, au moment où l'on a imaginé de filer & de travailler la laine, le coton, &, à plus forte raiſon, le fil & la ſoie, vraiſemblablement il y a eu un grand intervalle; mais ce premier pas franchi, on a pu aiſément avancer dans la carrière. La marche que l'on aura ſuivie ſeroit bien intéreſſante pour l'hiſtoire des progrès de l'esprit humain. Nous ne pouvons que nous permettre à ce ſujet des conjectures qui, à la vérité, ſont appuyées ſur des faits aſſez nombreux, dont on peut tirer des inductions raiſonnables.

Eſſais de filature et premiers Tiſſus.

A des moyens groſſiers ont inſenſiblement ſuccédé de meilleures pratiques. Le haſard, ſouvent plus fécond que l'induſtrie en découvertes utiles, aura favoriſé les progrès de l'art de ſe vêtir, comme il en ſeconde tant d'autres **). A meſure que le temps, l'expérience & la réflexion ont étendu les lumières & l'adreſſe de l'homme, ou plutôt celles de

*) Aux îles Mariannes, les habitans ſauvages font leurs coutures aſſez proprement pour aſſembler les écorces, les feuilles, les peaux dont ils ſe couvrent. Les Hottentots ſe font des *kroſſes* ou mantes de différentes peaux d'animaux dont ils tournent le côté laineux en dehors, pendant l'été ou la ſaiſon pluvieuſe. Les uns & les autres ſe ſervent d'un petit os d'oiſeau dur & pointu en forme d'aiguille ou d'alène; les nerfs, les artères de mouton, les boyaux des animaux, diviſés & ſéchés au ſoleil leur tiennent lieu de fil, de ficelle & de corde. (*Hiſt. gén. des voyages.*) Tacite dit la même choſe des anciens Germains: *Tegumen omnibus ſagum fibulâ, aut ſi deſit, ſpinâ conſertum — eligunt feras, et detracta velamina ſpargunt maculis pellibusque belluarum.*

**) Le haſard! ..... Qu'eſt-ce que le *haſard*, le *ſort*, le *deſtin*, la *fortune?* Fantômes diviniſés autrefois par les païens, mots dépourvus de ſens, que, parmi nous

de l'espèce humaine toute entière dont l'individu profite, on a fait de nouvelles tentatives & perfectionné les anciennes inventions. C'eſt ſurtout la néceſſité, ce puiſſant aiguillon de l'induſtrie, qui aura forcé les hommes à faire de plus grands efforts. Les écorces, les peaux, ainſi que les ligamens qui les attachoient, en ſéchant, ſe feront durcies & retirées; en ſe mouillant, elles ſe feront pourries & détruites. Pour les aſſouplir, on aura eu beau les frotter de graiſſe d'animaux ou d'huile de poiſſon; pour les raffermir, on aura eu beau les nettoyer & les battre: tout au plus ces peaux, ces écorces auront-elles été bonnes à faire des bonnets & des chauſſures, parties du vêtement qui exigent moins de ſoupleſſe que de force, afin de réſiſter au frottement continuel des branches, à l'aſpérité d'un ſol pierreux. Pour les autres parties du corps moins expoſées, mais qui demandent une grande liberté dans les mouvemens, on aura été obligé de recourir à d'autres moyens.

On ſe ſera par haſard aperçu que les fibres tendres & longues dont eſt compoſée l'écorce des plantes ligneuſes, telles que le lin, le chanvre & autres; que les filamens dont eſt formée la ſeconde peau de certains arbres, tels que le tilleul, le mûrier papyrifère &c. pouvoient être détachés de la tige ſans ſe rompre; qu'en les macérant dans l'eau & les ſoumettant à l'action réitérée du bois ou de la pierre, on pouvoit les aſſouplir, les rendre ductiles, les développer autour d'un corps cylindrique. Ce que l'on aura découvert encore plutôt, c'eſt que la bourre extraite de la coque de certains arbuſtes, tels que les cotonniers, ainſi que la laine & le poil des animaux, ſéparés de la peau & du cuir, pouvoient aiſément ſubir les mêmes opérations; qu'ils ſe tordoient facilement entre les doigts; & que, par la réunion de pluſieurs brins, ces ſubſtances formoient un fil continu & ſolide *).

nous, les impies donnent & que les ſots prennent pour une réalité. Au lieu du haſard, reconnoiſſons en l'admirant, cet enſemble de cauſes cachées & d'effets viſibles, dont la main du Tout-puiſſant conduit la chaîne myſtérieuſe avec une ſageſſe, une bonté que refuſe de voir notre aveugle ingratitude.

*) C'eſt dans l'ordre de leur utilité relativement à nos beſoins que les arts ont été cultivés; c'eſt à raiſon de ce motif que l'on n'a pas tardé à travailler les lai-

En voyant voltiger ces filamens légers & blancs que le zéphir promène dans l'air, pendant les beaux jours de l'année, les femmes, dont les obſervations ſont plus fines & les mouvemens plus doux, auront imaginé, les premières, d'imiter avec les diverſes ſubſtances ci-deſſus, la forme, la contexture de ces mêmes filamens *). La ouate que préſentent les coques entrouvertes du cotonnier, les flocons de laine que les brebis laiſſent accrochés aux buiſſons, ſe ſeront offerts à la vue & prêtés à cette légère manipulation. Cet eſſai aura réuſſi; on aura eu des fils de pluſieurs ſortes. Mais comment, à quel uſage les employer?

Oh! ce n'étoit pas aſſez que les hommes environnés des bienfaits du Créateur, & naturellement portés à l'imitation, euſſent à leur diſpoſition toute eſpèce de matériaux propres à fabriquer leurs vêtemens. Pour les guider dans l'emploi de ces matériaux & la fabrique de ces ouvrages, par-tout la Providence leur a mis devant les yeux les plus parfaits modèles. Cette feuille, cette écorce, cette peau dont l'eau ou le temps auront diſſous la gomme, ou des inſectes dévoré le mucilage, en montrant à nu les nervures, les élémens de leur texture, auront bien indiqué la manière dont les plantes & les animaux ſont habillés. Le myſtère ſe ſera encore dévoilé à la vue des tiſſus réticulaires qui recouvrent la ſubſtance intérieure de certains arbres & de l'en-

nes, les peaux, les cuirs, les poils des animaux, le coton, la ſoie &c. Après la laine, les toiles ſont le premier tiſſu que les produits de l'agriculture ayent procuré aux hommes; mais le coton eſt une des premières productions végétales dont on ſe ſoit ſervi pour ſe couvrir. Il eſt naturel à l'Orient, berceau de l'eſpèce humaine. Le cotonnier-arbre & le cotonnier-herbacée ſont la grande reſſource des Chinois & des Indiens pour les vêtemens; elle fut ignorée pendant pluſieurs ſiècles. L'empereur *Ou-Ti*, vers l'an 502 de J. C., eſt le premier qui, ſelon les Annales de l'Empire, ait porté une robe de coton. (*Note tirée, en partie, du Journal littéraire.*)

*) Iſis chez les Égyptiens, l'épouſe de l'empereur Yao chez les Chinois, Pallas dans la Grèce, Minerve chez les Celtes & les Romains, Arachné en Lydie, Mama-Oella chez les Péruviens, par-tout des femmes, ſuivant la tradition de tous les peuples, paſſent pour avoir inventé le filage, le tiſſage des étoffes, la taille & la couture des habits. (*Voyez Pline, Hygin, Hérodote etc.*)

trelacement de leurs fibres longitudinales diverſement croiſées, qui donne à cette espèce d'étoffe de la conſiſtance, mais ſans lui ôter de ſa ſoupleſſe. Le réſeau transparent que fabrique de ſa propre ſubſtance l'inſecte ruſé dont les mouches ſont la proie; le voile plus merveilleux dont les chenilles s'enveloppent pour nous cacher leur brillante métamorphoſe; & ſurtout la riche priſon où s'enferme celle qui nous eſt venue des Indes: voilà les modèles qui auront encore mieux inſtruit les hommes, qui les auront mieux guidés dans leurs tentatives, dans leurs travaux.

Si l'abeille, l'hirondelle & le caſtor ont éclairé le charpentier & le maçon; l'araignée & le ver-à-ſoie n'ont pas moins enſeigné les premiers fabricans de toiles & d'étoffes. Le tiſſerand, le gazier ont imité le canevas de la première; le chapelier, le drapier ont ſuivi les procédés du ſecond; tous ſe ſont étudiés à tendre les fils des différentes matières, à les croiſer en divers ſens, à les ſerrer; ils ſe ſont aviſés d'en fouler l'aſſemblage, pour lui donner plus de corps, de le catir pour en augmenter le luſtre. Les premiers tiſſus auront été des treſſes, des nattes; enſuite des espèces de feutres que la réflexion & le goût ont rendus plus unis & plus forts, en leur donnant une contexture plus régulière & plus ſolide, au moyen de la chaîne & de la trame dont les inſectes enſeignoient l'adroite combinaiſon. Ainſi, malgré les prétentions de notre ſupériorité, il faut en convenir, les animaux, même les plus vils, ont été nos premiers maîtres dans ces arts ſi utiles & ſi ingénieux; c'eſt de leur école que ſont ſortis les *pagnes*, les *kroſſes*, ou mantes, eſſais groſſiers dont les peuples ſauvages nous offrent des échantillons, & qui ont ſervi de rudimens à nos tiſſus les plus beaux. Il n'aura fallu qu'ouvrir les yeux, réfléchir, imiter & comparer. La femme aura inventé le fuſeau, la quenouille, la navette; l'homme peut-être les enſubles & les peignes. Alors les fils que fourniſſent les écorces intérieures des arbres, celles du chanvre & du lin la bourre & le coton des arbuſtes, la laine de la brebis & de la vigogne, le poil des chèvres & des chameaux, le duvet du caſtor & de l'autruche, la ſoie

des chenilles & des vers ſe ſeront convertis en toiles, en étoffes, en draps plus unis & plus ſouples, plus minces ou plus épais, plus frais ou plus chauds, ſuivant le beſoin & la volonté de ceux qui les employoient.

La Providence, auſſi bienfaiſante que ſage, avoit diſtribué, dans chaque pays, les plantes & les animaux ſelon que le climat leur convenoit; mais en même temps ſelon que leurs dépouilles convenoient aux beſoins des hommes placés dans ces mêmes climats: les écorces fines, le coton, la ſoie entre les tropiques; les plumes, le poil ſous les zones tempérées; la laine, les fourrures dans les régions froides; le *lin*, le chanvre presque par-tout; parce que les toiles ſont par-tout favorables à la ſanté, ſoit en ajoutant au bon effet des bains, là où ils ſont d'un uſage ordinaire, ſoit en y ſuppléant dans les pays où ils ſont trop négligés.

Eſſais de blanchiment et de teinture.

Aux couleurs triſtes & ternes qui ſont naturelles à la plupart des matières dont on fait les vêtemens, on aura d'abord ſubſtitué la blancheur ou la netteté que leur procure l'effet alternatif de la roſée & du ſoleil. Mais comme elles étoient ſujettes à s'altérer, à ſe ſalir aiſément, pour les rétablir, on a d'abord employé le lavage avec les terres marneuſes & bolaires; enſuite, par leurs qualités lixivieuſes & déterſives, les ſels de toute eſpèce ont fourni d'autres moyens. Enfin conduit par ce goût du changement ſi naturel à l'homme, on a remplacé la couleur native des matières veſtimentales par d'autres couleurs plus belles & plus durables.

Cependant où a-t-on pris l'idée de la teinture? d'où en a-t-on tiré les élémens? de quels objets pouvoit-on imiter les couleurs? Oh! l'on avoit ſous les yeux des indications ſûres, ſous la main des échantillons choiſis, dont la variété eſt auſſi riche qu'inépuiſable.

L'infuſion des fleurs, des herbes, des graines & des bois; le jus de certaines baies, de certains fruits preſſés entre les doigts, ou peut-être écraſés à deſſein; la diſſolution des terres colorées, détrempées

par les pluies entraînées par les ruiſſeaux, auront d'abord donné à penſer; la réflexion aura mis ſur la voie; quelques eſſais ſeront venus à l'appui.

Quant aux modèles, ils s'offroient par-tout; par-tout ils frappoient les regards. C'eſt le vert, ſi doux à l'oeil, le vert dont la nature a teint l'agréable tapis qu'à ſon réveil elle étend ſous nos pieds; ou dont elle peint ces lambris de feuillages, ombrages hoſpitaliers contre l'ardeur du jour. C'eſt l'azur tendre & pur dont elle a coloré le fond de cette voûte ſuperbe qui s'élève ſur nos têtes. Ce ſont les émaux auſſi brillans qu'utiles dont elle a diapré les champs, les prairies, les vergers qui nous environnent. C'eſt l'élégante parure qu'elle prodigue à ces oiſeaux, à ces papillons, à tant d'êtres vivans, de formes, de couleurs différentes, qui peuplent, qui animent ce riant payſage. C'eſt enfin, pour réunir toutes les nuances entre leſquelles le goût peut choiſir, c'eſt ce priſme aërien, cet arc majeſtueux que le ſoleil deſſine dans les nues qui lui ſont oppoſées.

Avec de tels ſecours, à la vue de pareils objets, l'homme né imitateur & porté ſans ceſſe à perfectionner en imitant, l'homme, dans l'art de ſe vêtir, comme la femme dans l'art de ſe parer, pouvoit-il ne pas faire de rapides progrès? Pouvoit-il ne pas finir par rivaliſer avec la nature, par égaler, par ſurpaſſer ſes modèles?

Afin de lui rendre les moyens de ſe vêtir plus faciles encore & moins coûteux, ne ſeroit-il pas poſſible d'augmenter en ce point ſes reſſources, ſes richeſſes? Qui nous empêcheroit de perfectionner les arts qui concourent à nous habiller, & d'en multiplier les matières premières, ſoit en tirant un parti plus avantageux des productions du pays, & de celles que nous employons, & de celles que nous négligeons; ſoit en appliquant à notre uſage quantité de ſubſtances étrangères qu'il y auroit moyen d'acclimater chez nous, comme on a fait de tant d'animaux & de végétaux exotiques? La nature ſi féconde & ſi variée, a voulu certainement unir les hommes par l'échange de ſes dons, par la communication de ſes bienfaits; & nos arts ſi bornés, ſi timides craindroient-ils

toujours de ſe les approprier? Elle répondra ſi bien à nos demandes, quand nous oſerons, quand nous ſaurons l'interroger & ſuivre ſagement ſes indications! *)

Coupe et forme des vêtemens.

Ces toiles, ces étoffes, ces draps une fois fabriqués, & teints ou laiſſés dans leur état naturel, comment les employer, comment les tailler pour s'en vêtir convenablement? Ils ſont ſuſceptibles de tant de formes diverſes!

Qu'à la naiſſance des ſociétés, les hommes ſe ſoient contentés de jeter ſur leurs épaules des peaux, des morceaux de toiles groſſières; ou que, ſans y rien changer, ils s'en ſoient enveloppé le corps; cela eſt tout ſimple: ils étoient trop bornés dans leurs conceptions pour ſoupçonner rien de mieux. C'eſt où en ſont encore les ſauvages habitans de ces points du globe entièrement iſolés ou nouvellement connus. Mais, dès qu'en ſe réuniſſant, les familles, les peuplades, les nations ſe ſeront éclairées, le ſentiment des convenances ſe ſera développé chez elles; l'expérience, la réflexion leur aura fait imaginer des manières de ſe vêtir plus commodes, plus ſéantes. En cela, comme en toute autre choſe, la diverſité des uſages aura été auſſi grande que celle des caractères, des esprits & des goûts. En effet, il n'eſt preſque pas un ſeul peuple, & même chez tel peuple, il n'eſt guères d'individu, qui, à cet égard, n'ait ſuivi, ne ſuive ſon idée, ſon caprice.

Cependant, abſtraction faite de la qualité des vêtemens plus ou moins chauds, ſuivant la différence des climats & des ſaiſons, peut-il y avoir pluſieurs manières de ſe vêtir, en ſorte que les habits rempliſſent l'objet que l'on doit ſe propoſer?

*) Nous développerons plus en détail nos vues, nos obſervations ſur cet objet dans le mémoire où nous conſidérerons l'art de ſe vêtir *ſous les rapports économiques*. Nous y joindrons, par forme d'*Appendice*, un *Tableau raiſonné des productions des trois règnes, tant indigènes qu'exotiques, dont on pourroit faire uſage;* en indiquant des procédés & des eſſais tentés avec ſuccès ſur différentes ſubſtances: le tout appuyé ſur des faits connus & des témoignages irrécuſables.

Sans doute il exiſte dans la nature un type original du beau & du bon en tout genre. En formant l'homme & les diverſes parties de ſon corps, n'a-t-elle pas taillé un patron, & préparé un moule pour les diverſes parties de ſon habillement? N'eſt-ce pas cette intention reconnue, cette néceſſité ſentie qui ont déterminé les peuples, à meſure que leur induſtrie & leur goût ſe ſont perfectionnés? N'en doutons pas. C'eſt d'après cette indication ſi claire, ſi poſitive qu'ils ont voulu que les étoffes s'appliquaſſent de près, & que deſtinées à couvrir le tronc & les membres du corps, elles en ſuiviſſent les diviſions principales, les formes, les contours.

Pour cet effet, il a fallu retrancher quelque choſe de ces étoffes en certains endroits, y ajouter en d'autres, diminuer ou augmenter, ſupprimer ou ſuppléer, afin de leur donner les proportions néceſſaires & de les rendre conformes au modèle. En un mot, l'art de ſe vêtir s'eſt, en quelque façon, rapproché de la ſculpture qui ôte d'un bloc les parties dont la ſuperfluité masque le trait, ou qui rapporte ſur une ſurface plane ce qui manque & ajoute ce qu'il faut pour former le trait en relief. Mais uniquement fait pour couvrir le nu, l'art encore innocent, loin de *l'accuſer*, ou de l'embellir, ſe contentoit de ne pas le défigurer.

Si, dans la forme de leurs vêtemens, la groſſièreté des peuples ſauvages méconnoît le deſſein, les proportions du beau naturel; eh! les fantaiſies du luxe, les caprices de la mode n'éloignent-ils pas autant de cette règle conſtante les nations parvenues à l'excès de la civiliſation? ou bien, donnant dans un travers oppoſé, l'art de la parure, les raffinemens de la coquetterie, en feignant de voiler la nudité, ne ſont-ils pas venus au point de la rendre ſouvent plus ſéduiſante? Ce ſera le ſujet de quelques obſervations, quand nous traiterons des vêtemens relativement aux moeurs. Revenons à notre objet.

La nature ſemble donc en général preſcrire à l'homme de modeler ſes vêtemens ſur ſon corps? Mais, dans l'ordre phyſique, cette règle admet néceſſairement bien des modifications, & même des exceptions

particulières, à raiſon du climat, des ſaiſons, de l'âge, du ſexe, du tempérament & des circonſtances perſonnelles où l'on peut ſe trouver.

1° La différence des climats & des ſaiſons, les révolutions lentes ou ſubites qu'y amène la nature, les changemens ſucceſſifs ou inſtantanés qu'y occaſionent les hommes, en néceſſitant, comme nous l'avons dit, des vêtemens de ſubſtances différentes, ne doivent pas mettre une moindre diverſité dans la coupe & la façon de ces vêtemens. Plus amples, plus larges dans les temps & les pays chauds, il eſt à propos, lorsqu'il fait froid, de les retrécir, de les faire coller davantage *). Dans le premier cas, des habits trop juſtes, trop *ſerrés*, *en gênant* la circulation du ſang & des autres humeurs, augmenteroient la chaleur, occaſioneroient du mal-aiſe, incommoderoient certainement. Dans le cas contraire, des vêtemens trop aiſés, trop larges laiſſeroient évaporer une partie de la chaleur animale & s'introduire une trop grande quantité du nitre ou de l'humidité répandus dans l'air atmoſphérique. Dans tous les cas, il faut ſe garantir de l'impreſſion fâcheuſe des météores & corps extérieurs, en retenant, en diſtribuant d'une manière convenable, dans toutes les parties du corps humain, *le calorique*, l'un des principes conſtitutifs du bien-être, de la ſanté, de la vie. Auſſi, de nouvelles circonſtances, des changemens ſurvenus dans la conſtitution phyſique du ſol & de l'air preſcrivent-ils de nouvelles meſures, des précautions nouvelles. C'eſt ainſi qu'à la ſuite des bouleverſemens que les tremblemens de terre & les éruptions volcaniques ont occaſionés en Italie, & des dévaſtations qui ſuivirent les conquêtes de Rome ou celles des peuples ſeptentrionaux, la manière de ſe vêtir y ſubit de grands changemens. Quand les bruyères & les forêts, les marais

*) Comme Tacite rapporte qu'étoient habillés les plus riches parmi les Germains. *Veſte non fluitante, ſicut Sarmatae et Parthi, ſed ſtrictâ et ſingulos artus exprimente.* (*De moribus Germ.*) C'eſt la différence des climats & des influences atmoſphériques qui a, ſans doute, établi la différence qui exiſte de tout temps entre la manière dont s'habillent les peuples de l'Orient & du Midi, & les coſtumes de ceux du Nord & de l'Occident.

marais & les lacs, venant à couvrir des contrées autrefois floriſſantes *), eurent rendu le climat plus humide, plus froid & mal-ſain, les habitans adoptèrent l'uſage du vêtement appelé *braccae* **), que portoient les Gaulois, les Germains & autres peuples du Nord. A plus forte raiſon ce vêtement devint-il néceſſaire aux Romains, lorsqu'ils s'étendirent dans les pays qu'habitoient ces premiers.

2° Il doit encore y avoir, dans la manière de s'habiller, des différences relatives à l'âge, au ſexe & au tempérament.

Dans la fougue de la jeuneſſe, comme entre les tropiques & dans l'été; à l'âge viril, comme ſous les zones tempérées & au printemps ou en automne; au déclin de la vie, comme vers les pôles & en hiver, la chaleur du ſang, comme celle de l'air, plus ou moins vive, exige que l'on aſſortiſſe, que l'on proportionne au degré de cette vivacité le genre & la forme des habits qui la tempèrent, ou l'accroiſſent convenablement.

Expoſées par la nature à des incommodités, tant habituelles qu'accidentelles, & d'ailleurs vouées à des occupations ſédentaires qui demandent de l'aiſance & de la grâce, les femmes plus délicates, plus ſenſibles, doivent en général être vêtues plus légèrement, mais plus exactement que les hommes, qu'une conſtitution plus robuſte deſtine aux travaux du dehors plus fatigans & plus pénibles.

Sans recourir aux médecins, ſans conſulter les règles de l'hygiène, les lumières de la raiſon qui nous éclaire ſur nos beſoins, indiquent

*) Voyez *Lanciſi* ſur l'augmentation des marais de l'Italie & les funeſtes effets qu'elle a eus, jusqu'à détruire des villes jadis très-peuplées. Telles étoient Aquilée & autres qui ſe ſont perdues ſous les eaux, ou ſont tombées en ruines par la déſertion, la mort de leurs habitans, victimes de l'inſalubrité, du méphitisme ſurvenu dans l'atmoſphère. On ſait, à ce ſujet, combien le deſſéchement des *marais Pontins* a été l'objet de la ſollicitude, ſoit des Céſars, ſoit des Pontifes qui leur ont ſuccédé; nous avons vu quelle étoit celle du vertueux & infortuné *Pie VI.*

**) Espèce de *braies*, de *haut-de-chauſſes* ou de *pantalons*, que les Romains ſubſtituèrent aux bandelettes (*faſciae*, *femoralia*, *tibialia*), dont ils s'enveloppoient les parties inférieures du corps.

aſſez, ſelon la différence des tempéramens & l'état accidentel de la ſanté, quels vêtemens on doit préférer pour la conſerver ou la recouvrer. Une des règles les plus importantes eſt d'éviter le paſſage ſubit d'un extrême à l'autre, paſſage également dangereux au phyſique, au moral, en politique, en tout.

3° A tout âge & en tout temps, on doit obſerver que, non ſeulement en repos ou couché, mais même debout & agiſſant, il eſt bon d'avoir les extrémités inférieures du corps plus couvertes & tenues plus chaudement que la tête & la poitrine, où la chaleur naturelle eſt plus forte, comme étant plus près du foyer.

4° Mais à quelque âge, en quelque temps que ce ſoit, jamais les habits ne doivent être étroits ni ſerrés au point de gêner le jeu des viſcères & la liberté des mouvemens. C'eſt ſurtout dans l'enfance & l'adolescence, que l'on doit éviter tout ce qui s'oppoſeroit à l'accroiſſement du corps, à l'exercice de ſes organes, au développement de ſes facultés. Auſſi, croyons-nous n'avoir rien de mieux à faire que de ſouſcrire aux anathèmes éloquens qu'a prononcés contre les maillots, les berceaux, les corps-de-baleine & autres entraves du corps humain, l'écrivain philoſophe qui a bien connu les hommes, & qui, dans l'éducation phyſique, eſt, à quelques erreurs près *), leur guide le plus ſûr.

Voilà ce que nous avons jugé de plus intéreſſant par rapport à la coupe & à la forme des habillemens.

Quant à leurs différentes couleurs, il eſt à propos d'obſerver leur effet continuel ſur la vue & ſur le corps. A proportion qu'elles approchent plus du vert, elles fatiguent moins les yeux. Le rouge éblouit; le noir & tout ce qui en tient, attriſte. D'ailleurs rien de ſi froid, l'hiver; rien de ſi chaud, l'été, que les habits noirs; &, par la raiſon contraire, rien de plus frais, l'été, ni de plus chaud, l'hiver,

*) Entre autres dangers des principes de Rouſſeau ſur l'éducation phyſique, on peut citer l'immerſion des enfans dans l'eau froide, dès leur naiſſance, & leur nudité presque totale & conſtante. Combien d'enfans ont péri victimes de ces méthodes exagérées, de ces innovations funeſtes, devenues une mode, une fureur!

que le blanc. Indépendamment de ce que, pour l'ordinaire, on ne teint en noir que les étoffes les plus défectueuſes, tout ce qui ſert à les teindre en cette couleur, étant d'une nature cauſtique, en brûle les parties velues les plus déliées, &, par conſéquent, les rend plus pénétrables, ſoit à l'action du ſoleil, ſoit à celle du nitre aërien. Le noir abſorbe les rayons du premier; & laiſſe, par les interſtices, paſſer les pointes aiguës du ſecond. Les étoffes blanches au contraire, outre qu'elles paroiſſent clairement ce qu'elles ſont, réfléchiſſent les rayons du ſoleil; &, par l'intégrité de leur tiſſure, ferment tout paſſage à l'air froid, ou du moins en diminuent conſidérablement l'action.

Il eſt ſans doute inutile, ou plutôt ſuperflu, d'ajouter que la propreté, ſource & compagne de la ſanté, doit préſider à la tenue du corps & à l'habillement, bien plus que l'élégance & le faſte qui ne ſervent que la vanité & l'oſtentation.

Outre ces obſervations phyſiques, il s'en préſente une foule d'autres concernant les fonctions que les individus rempliſſent dans la ſociété, l'état qu'ils y occupent, les convenances qu'ils doivent obſerver, les meſures que la prudence & l'honnêteté leur prescrivent, relativement à l'art, à la manière de ſe vêtir. Ces divers objets feront ſéparément le ſujet des mémoires que nous nous propoſons de donner à la ſuite de celui-ci.

OBSERVATIONS GRAMMATICALES et critiques ſur Montaigne, ou à ſon occaſion.

PAR MONSIEUR BASTIDE *).

Si la monotonie déplaît dans tout ouvrage de la ſcience & de l'art, elle doit être ſans doute particulièrement déplaiſante dans ceux des ouvrages de la ſcience & de l'art, qui, par leur nature, ſont de longue haleine. Fidèle au principe que je viens de mettre en avant, je n'ai pas manqué d'en faire l'application à l'ouvrage que mon tendre amour pour les fameux *Eſſais* m'a fait entreprendre. J'ai commencé, dès mon admiſſion dans cette Société ſavante, par ſoumettre à ſa critique éclairée mon *Eſſai* ſur les *Eſſais*. Enſuite, pour donner à l'Académie quelque choſe qui fût plus à moi que n'étoit ce dont je l'avois entretenue par trois fois, mon tour de l'entretenir encore étant arrivé, je lui ai fait entendre mes *balbutiemens* ſur la langue françoiſe dans quelques obſervations, auxquelles, tant mon ouvrage ſur *Montaigne*, que *Montaigne* même, avoient donné lieu. Aujourd'hui, laiſſant repoſer ce que j'appelle *le Montaigne du* 18ème *ſiècle*, je vais eſſayer de fixer pour quelques momens l'attention de ceux qui veulent bien me la prêter, par une ſuite des Obſervations dont je viens de parler.

*) Lu à l'Académie le 22 mars 1798.

„Reprendre en autruy mes propres fautes, ne me ſemble non plus „*incompatible*, que de reprendre ... celles d'autruy en moy." *Montaigne*, Liv. I, chap. 25, alin. 3. des éditions *Coſte*.

Cette phraſe, ſur laquelle *Coſte* a paſſé ſans y trouver le moindre embarras, cette phraſe m'embarraſſoit à cauſe du mot *incompatible*. On dira bien, me diſois-je „*Deux* charges ſont à la fois *compatibles* & *incom-*„*patibles*, ſuivant que l'on eſt réſolu à faire *injuſtice* ou *grâce* à celui qui „étant pourvu de l'une poſtule l'autre," mais on ne dira pas également „Refuſer à un tel tel office, parce qu'on ne veut pas ouvrir les yeux ſur ſes „titres & capacités, ne me ſemble non plus *incompatible*, que d'accor-„der ce même office à un tel, parce qu'on veut fermer les yeux ſur „ſon incapacité." Qu'*incompatible* ſoit auſſi déplacé dans cette dernière phraſe, faite d'après celle de *Montaigne*, qu'elle l'eſt dans celle-ci, c'eſt ce qu'on verra ſans peine, ſi l'on change un peu la tournure de la phraſe originale. „Reprendre en autruy mes propres fautes, „ne me ſemble pas *incompatible*, pas plus que de reprendre ... celles „d'autruy en moy." Ne ſachant d'abord à quel ſaint me vouer pour ſortir d'embarras, je m'adreſſe aux traducteurs allemands. Le premier me dit: „*Es ſcheint mir eben ſo wenig unerträglich, meine eigenen* „*Fehler an einem andern zu tadeln, als eines andern Fehler an mir zu* „*tadeln...*" & le ſecond „*In andern meine eigenen Fehler züchtigen,* „*ſcheint mir eben ſo erlaubt zu ſeyn, als an mir ſelbſt... die Fehler an-*„*derer zu rügen.*" Mais *unerträglich* ne répond pas à *incompatible*, ni *erlaubt* à *compatible*. Cependant *unerträglich* & *erlaubt* m'ont conduit à un doute, & ce doute a amené une leçon conjecturée. Il m'a paru qu'„*incom*patible" étoit une erreur de copiſte ou de typographe, & qu'il falloit lire „*im*patible." Subſtituons ce mot à celui d'„*incom*patible" dans la phraſe de *Montaigne* & dans la mienne, & ces phraſes ſeront claires, je penſe. „Reprendre en autruy mes propres „fautes, ne me ſemble non plus *impatible*, que de reprendre ... celles „d'autruy en moy." „„Reprendre en autruy mes propres fautes, ne

„„me ſemble pas *impatible*, pas plus que de reprendre ... celles d'au-„„truy en moy."" Mais, me demandera-t-on, *impatible* eſt-il *françois?* Du moins je le trouve dans *Oudin* *), & je voudrois qu'on lui accordât une place dans les Dictionnaires futurs. Car pourquoi ce mot ne ſeroit-il pas françois? *Compatible* n'eſt-il pas compoſé de *com* (ou *con*) & de *patible*, comme *impatible* l'eſt d'*im* (ou *in*) & de *patible?* Et *incompatible* n'eſt-il pas compoſé d'*in* & de *compatible*, ou d'*in*, de *com* (ou *con*) & de *patible?* Pourquoi même (puisque nous avons la main à la pâte) pourquoi *patible* n'iroit-il pas ſe placer *loco congruo* dans les Dictionnaires à faire, comme primitif de „*compatible*, „*impatible* & *incompatible?*" Il eſt *latin*, s'il n'eſt pas *italien*, & certainement il ne ſeroit pas dans la langue uniquement pour la montre. *Patible* exprimeroit „ce qui *peut* être ſouffert „*im*patible" ce qui *ne peut* pas être ſouffert „*com*patible" ce qui *peut* être ſouffert *à la fois* „*incom*patible" ce qui *ne peut* pas être ſouffert *à la fois.*" Mais quand *patible* ne devroit pas devenir *françois* (peut-être parce qu'il n'eſt pas *italien*) *menſurable* ne l'eſt pas non plus (bien qu'il ſoit & *latin* & *italien*) ce qui n'empêche pas que „*com*menſurable" ne le ſoit, ainſi qu'„*incom*menſurable", peut-être parce que l'un & l'autre eſt *italien* ſans être *latin*. Du reſte, *impatible* ne ſeroit pas le ſeul mot ſoi-diſant compoſé, dont le ſimple prétendu n'auroit point d'uſage. Pour ne parler que des adjectifs commençant de même, c-à-d. par *im* (ou *in* ayant le ſens de la négation) ſuivi d'un *p*, *partable* **), *placable*, *pudent*, ne ſont pas reçus dans la langue, bien qu'ils ayent depuis des ſiècles leurs paſſe-ports Transalpins. (*Partable*, *placable* & *pudent* ſont *latins*, & *partable* & *placable* ſont de plus *italiens.*) Si *perdable* & *perturbable* ne parviennent pas à être admis dans notre pauvre langue, auſſi ne le ſont-ils pas dans le *latin* & l'*italien*, & „*im*partable" n'eſt ni dans l'une ni dans l'autre de ces deux langues.

*) Et dans *Duez*, *Monet* & *Pomey*. Il n'eſt pas dans l'édition de *Borel* de 1750, bien que cette édition doive renfermer *tout ce qui s'eſt trouvé de plus dans Monet* &c.

**) Je trouve *partauble* dans *La Combe*.

„Qu'il (l'enfant à élever) ſe contente de ſe corriger ſoy-mesme, „& ne ſemble pas reprocher à autruy tout ce qu'il refuſe à faire, ny „*contraſter aux* moeurs publiques." Alin. 13.

Pasquier fait venir le ſubſtantif *contraſte* de l'italien *contraſto*, ce que j'admets *ſans contraſte*, pourvu qu'on me laiſſe auſſi dériver *contraſter* de *contraſtare*. Ce dernier verbe régit également le *datif* & l'*accuſatif*. C'eſt que *contra* régit ces deux cas, & encore le *génitif*. Mais nous, pour qui *contre* régit uniquement l'*accuſatif*, nous devrions dire, ce ſemble „*contraſter les* moeurs publiques" ſi *contraſter* avoit encore le ſens de *s'oppoſer*.

J'ai diverſes remarques à faire ſur *contraſte* & *contraſter*.

L'*Académie*, *Richelet*, *Trévoux* & ſon *Abrégé*, le *Richelet portatif*, *Alberti* *), font le *verbe* en même temps *actif* & *neutre*. Pour *Furetière* & *Danet* il eſt ſeulement *actif*, & pour l'A. *Féraud* il n'eſt que *neutre* **). Selon cet auteur, quand on veut employer *contraſter activement*, il faut dire „*faire* contraſter." Je penſe comme lui, mais comme lui j'ajoute humblement *ſauf meilleur avis;* & voici ſur quoi je me fonde. *Contraſter*, c'eſt, ſelon l'étymologie, *être en oppoſition:* „ſtare *contra*, *contra* ſtare." Il ſemble donc que l'emploi de ce verbe doive ſe réduire à dénoter que deux choſes ſont enſemble un contraſte, ſont en oppoſition l'une avec l'autre, & que pour donner à connoître l'*action* moyennant laquelle deux choſes ſont enſemble un contraſte, ſont en oppoſition l'une avec l'autre, il faille encore le verbe *faire*.

Selon l'A. *Féraud* „*contraſte* & *contraſter* ſe diſent au *figuré* des „ouvrages d'eſprit." Je ne ſais ſi cette définition ne ſeroit point imparfaite, & ſi l'on ne pourroit pas employer ces deux mots au figuré en parlant d'autre choſe que de *paſſions*, de *caractères* & de *ſentimens* par raport à une *production* de l'*eſprit*. Les Dictionnaires, à la vérité, ne me fourniſſent point d'exemples d'un pareil emploi, mais je ne crois pas qu'il fût impoſſible d'en trouver dans les bons auteurs, ſurtout dans

*) Et le Citoyen *Gattel*.

**) *Le Brun* ne l'a pas du tout.

ceux qui ont écrit depuis que l'on a commencé à ſecouer un peu le joug que l'*Académie françoiſe* avoit impoſé aux hommes de génie. Et ſi ces exemples étoient introuvables, ceux qui tenteroient de donner à *contraſte* & *contraſter* un emploi plus étendu que celui qu'autoriſent les définitions des Dictionnaires & leurs phraſes, excuſeroient en quelque manière leur hardieſſe par le néologisme heureux de *contraſtant*, dont je parlerai plus bas. Mais l'extenſion de l'emploi de *contraſte* & *contraſter* pourroit-elle être qualifiée de Néologisme? Peut-être que non. Nous avons vu *Montaigne* donner au verbe le ſens de *s'oppoſer*, & le ſubſtantif a auſſi pour cet auteur le ſens d'*oppoſition*. Après avoir rapporté les argumens que l'on allègue d'ordinaire en faveur du ſuicide, il ajoute: „Mais cecy ne va pas ſans *contraſte*: car pluſieurs tiennent que „nous ne pouvons abbandonner ceſte garniſon du monde, ſans le com„mandement exprès de celuy qui nous y a mis *)" Et dans *Monet* *contraſte* ne ſignifie que *débat de paroles*, & *contraſter* que *débattre*. Dans *Pomey contraſte* n'a que la ſignification de *débat ou contrariété*, & *contraſter* que celle de *débattre* **). Quant au *participe* (ou plutôt *adjectif verbal*) *contraſté*, *contraſtée*, il eſt dans *Richelet*, jusques dans l'édition de l'abbé *Goujet*: mais il n'eſt que là; & M. de *Wailly* n'en a point chargé ſon *Richelet portatif* ***). En effet, les expreſſions *Caractères bien contraſtés*, *Figures bien ou mal contraſtées*, ne me préſentent aucune idée. Il n'en eſt pas ainſi de *Caractères bien contraſtans*, *Figures bien ou mal contraſtantes*.

Contraſtant, *contraſtante* eſt un *adjectif verbal*, dont l'A. *Féraud* parle comme d'un *Néologisme*. Néologisme, ou bien *Archéologisme*, ce mot m'agréeroit beaucoup. D'abord il ſerviroit à exprimer, comme on vient de voir, ce que *contraſté* & *contraſtée* ne ſauroient rendre, ſelon

*) Liv. II, chap. 3, alin. 3.

**) Le *verbe* n'eſt pas encore dans la 2de édition de l'*Académie* de 1695.

***) A mon grand étonnement je l'ai trouvé dans *Gil-Blas* („c'étoient deux figu„res bien contraſtées" Liv. VIII, chap. 3.), & j'en ſuis fâché pour *Le Sage*.

ſelon moi. Enſuite il fourniroit une troiſième tournure pour parler de deux ou plus de choſes qui ſeroient en oppoſition entre elles. Enfin & ſurtout, ſon emploi donneroit peut-être une plus grande étendue à celui du *verbe* & du *ſubſtantif*, emploi qu'on a, je ne ſais pourquoi, reſtreint de la manière qu'on l'a vu ci-deſſus.

Cette nouvelle & troiſième tournure ſeroit ſouvent préférable aux deux autres plus anciennes. Par exemple, dans cette phraſe de Mad. de *Bellot* (que je ne me charge d'ailleurs ni d'approuver ni de critiquer)

„Les diverſes parties de ce tout, disjointes par leur ſituation, & „*contraſtantes*" (j'ajoute *entre elles*) „par leurs loix, leurs coutumes & leurs moeurs, ne furent jamais aſſez bien cimentées „pour former le véritable enſemble d'une monarchie,"

l'on ne diroit pas ſi bien, ce ſemble, ſoit

„Les diverſes parties de ce tout, disjointes par leur ſituation, & „*qui contraſtoient enſemble*" (ou *l'une avec l'autre*) „par leurs loix..."

ſoit

„Les diverſes parties de ce tout, disjointes par leur ſituation, & „*qui faiſoient entre elles un contraſte* par leurs loix...."

parce que 1° *disjointes* amène naturellement *contraſtantes*; 2° la ſeconde tournure, (& encore plus la troiſième,) allonge la période, déjà aſſez longue; 3° la ſeconde tournure, ſi l'on y emploie *enſemble*, & non *l'une avec l'autre*, contient deux fois le même mot, une fois comme *adverbe*, une autre fois comme *ſubſtantif*; 4° la troiſième tournure oblige ſans doute à recevoir dans

„qui contraſtoient enſemble,"

ou dans

„qui contraſtoient l'une avec l'autre,"

par forme de parenthèſe, les mots

„par leurs loix, leurs coutumes & leurs moeurs,"

qui ſuivent *contraſtantes*. Mais

„& qui, par leurs loix, leurs coutumes & leurs moeurs, fai-
„ſoient entre elles un contraſte,"

ne *contraſte* pas ſi bien avec

„*disjointes par* leur ſituation,"

que

„& *contraſtantes* (entre elles) *par* leurs loix, leurs coutumes &
„leurs moeurs."

De même dans cette phraſe de *Linguet*

„Une nation fière, énergique, dont les individus, plus que ceux
„de tout autre peuple, donnent, dans leur vie privée, les exem-
„ples les plus *contraſtans avec* la dépravation qui déshonore leurs
„comités,"

l'on auroit tort, peut-être, de ſubſtituer à

les plus contraſtans

Soit

qui font le plus grand contraſte qui contraſtent le plus

parce qu'outre que la *ſeconde* tournure, & encore plus la *troiſième;* donneroit un plus grand allongement à la période, qui déjà n'eſt pas mal longue,

„*des* exemples *qui* contraſtent le plus,"

ou

„*des* exemples *qui* font le plus grand contraſte,"

ſonneroit mal avec

„*qui* déshonore leurs comités,"

fin de la période: ſans compter que la ſubſtitution de l'une de ces deux tournures obligeroit de ſubſtituer *des* à *les* devant *exemples,* & que

„donner *les* exemples *les plus touchans,"*

me paroît avoir plus d'énergie que

„donner *des* exemples *qui touchent le plus,"*

ou que

„donner *des* exemples *qui font naître la plus grande*
„*émotion."*

„Un pur courtiſan ne peut avoir ny loy ny volonté de dire & „penſer *que favorablement* d'un maiſtre, qui, parmy tant de milliers „d'autres ſubjects, l'a choiſy pour le nourrir & esleuer de ſa main." Alin. 16.

Je me ſuis fondé ſur l'autorité de Meſſieurs *Berthelin*, *de Wailly* & *Alberti*, & ſur celle de *Trévoux* & du *grand Vocabulaire*, pour me ſervir, en retravaillant ce paſſage de *Montaigne*, de l'adverbe *défavorablement*. Mais pourquoi ne ſeroit-il pas *françois*, au moins françois *réfugié*, comme diſoit *Voltaire*, ſi je ne me trompe? *Défaveur* ſe dit; *défavorable*, auſſi: de là à notre adverbe il n'y a pas loin. D'ailleurs „*dé*faveur" venant apparemment de *faveur*, comme „*dé*favorable" de *favorable*, pourquoi „*dé*favorablement" ne viendroit-il pas de *favorablement?* Les Italiens ont également *favore*, *favorevole*, *favorevolmente*, & „*dis*favore, *dis*favorevole, *dis*favorevolmente." Je dis que *défaveur* & *défavorable* ſe diſent, parce que je les trouve dans l'*Académie* ſans remarque: car d'ailleurs l'abbé *Féraud* déclare le mot *défaveur* vieux dès le temps de *Bouhours*, & que *défavorable* s'eſt mieux ſoutenu. Il ſe tait ſur *défavorablement*. J'oſe croire qu'au moyen de ce mot j'ai mieux rendu la penſée de *Montaigne*, qu'elle ne l'eſt chez lui-même. „Ne pouvoir avoir ny loy ny volonté de dire & penſer „que favorablement de quelqu'un" ne me paroît pas auſſi net que „ne „pouvoir vouloir penſer défavorablement de lui;" & en tout cas ce ſeroient deux tournures pour une.

„Ceſte faveur & utilité corrompent, non ſans quelque raiſon, ſa „franchiſe, & l'esblouiſſent. Pourtant void-on *couſtumièrement* le „langage de ces gens-là divers à tout autre langage en un eſtat, & „de peu de foy en telle matière." Ibid.

„*Coutume*," dit *La Bruyère*, „devoit nous conſerver *coutumier*." Pourquoi pas auſſi *coutumièrement?* *Coutumier* s'eſt remontré dans le ſtyle *familier:* quant à *coutumièrement* il faudra voir. Mais je demande ſi *coutumier* dépareroit le *beau* ſtyle, dans lequel on l'employoit fort autrefois; & ſi, toutes préventions pour l'antique miſes

de côté, *ordinaires* ſonneroit mieux que *coutumières* dans ces deux vers de *Corneille:*

„Et mes yeux, éclairés des plus vives lumières,
„Ne trouvent plus aux ſiens leurs grâces *coutumières,*"

& ſi enfin *ordinaire* a *moins ſervi* que *coutumier?* Car il n'y a que l'*uſage*, ce ſemble, qui puiſſe faire *vieillir* les mots, comme les habits. Non, il y a encore la *mode.*

„Que ſa conſcience & ſa vertu" (celles du jeune-homme) „reluiſent en ſon parler, & n'ayent que la raiſon pour conduitte." Alin. 17.

Dans la première édition des *Eſſais* (*Bordeaux*, 1580.) *Montaigne* s'étoit borné à dire „Que ſa conſcience & ſa vertu reluiſent en „ſon parler." Depuis il a ajouté les mots „& n'ayent que la raiſon „pour conduitte" qui ne contribuent pas, à mon ſens, à la clarté de ſa phraſe, ſans compter qu'ils le mettent en contradiction avec lui-même. Car il dit ailleurs: „La *vertu* ſonne je ne ſçay quoy de plus „grand & de plus actif, que de ſe laiſſer, par une heureuſe com-„plexion, doucement & paiſiblement *conduire* à la *ſuitte* de la *raiſon,*" & encore ailleurs: „Faictes guider ce harnois" (de l'amitié) „par la „*vertu* & *conduitte* de la *raiſon.*" Du reſte M. Bode a manqué ici le ſens de ſon auteur. Il traduit: *Que ſa conſcience et ſa vertu reluiſent en ſon parler, et n'ayent que la raiſon pour conduitte*, par *Aus den Reden des Zöglings müſſen ſein Gewiſſen und ſeine Tugend hervorleuchten; und müſſen bloſs die Vernunft zur Führerin haben.* Son prédéceſſeur, le profeſſeur *Titius*, avoit été plus heureux que lui. Voici ſa traduction: *Seine Gewiſſenhaftigkeit und Tugend müſſen aus ſeinen Reden hervorleuchten, und bloſs die Vernunft zur Führerin haben.* Ceci, pour le dire en paſſant, ſert de preuve à ce qu'avancent les auteurs de la Gazette littéraire de *Jena*, c'eſt que ſouvent le premier traducteur allemand des *Eſſais* l'a emporté ſur le ſecond quant à la partie de la fidélité.

„*A d'aucuns* c'eſt un pur eſtude grammairien (que l'Hiſtoire), à „d'autres l'anatomie de la philoſophie." Alin. 18.

Aucuns ſent pour nous le palais. J'en ſuis fâché, car l'odeur du palais répugne à beaucoup de nez douillets, & cependant *aucuns* eſt plus bref & mieux ſonnant que ſon ſynonyme *quelques-uns*, & pourroit être employé en poéſie, & même dans la proſe, là où *quelques-uns* ne ſauroit être d'aucun uſage, ou ne ſeroit employé qu'aux dépens de l'oreille. S'il faut à un poëte *deux* ſyllabes, *quelques-uns* eſt nul pour lui; & ſi un proſateur veut choyer l'organe de ſon auditeur, il ſera charmé de pouvoir dire „quelque querelle qu'aucuns des critiques „du dernier ſiècle ayent faite à un tel, il n'en reſte pas moins un des „bons écrivains de ſon temps," au lieu de „*quelque que*relle *que quel-* „*ques*-uns des critiques du dernier ſiècle ayent faite à un tel, il n'en „reſte pas moins un des bons écrivains de ſon temps." *Quel, que, que, que, quel, ques*, en *huit* ſyllabes! Du reſte l'Académie voudra bien ſe rappeler ici ce que j'ai dit le 21e Avril dernier quant à *pour*, ſynonime de *quelque* *). Du reſte encore „à *d'*aucuns" que *Montaigne* emploie ici, ſauveroit un hiatus; & c'eſt le ſervice qu'il m'a rendu dans un quatrain épigrammatique oublié depuis long-temps, dont le 3e vers étoit:

„Mais cet eſprit, qu'*à d'aucuns* on dénie" **).

„Il y a dans Plutarque beaucoup de diſcours eſtendus très-dignes „d'eſtre ſceus .... mais il y en a mille qu'il n'a que touché ſimple- „ment. Il *guigne* ſeulement *du doigt* par où nous irons, s'il nous „plaiſt." Ibid.

L'un de nos confrères a défendu contre moi l'expreſſion *guigner du doigt*. Il prétend qu'elle eſt *bien jolie*, parce qu'elle exprime le plus petit mouvement poſſible du doigt, & qu'elle transforme le doigt en oeil. J'avoue que je ne ſaurois être ici de ſon avis. Pour *guigner* on ferme l'oeil *à demi*, c'eſt-à-dire qu'on ne fait pas de l'oeil *le plus petit* mouvement poſſible. Si donc on pouvoit *guigner* du *doigt*, le *guignement* n'exprimeroit le plus petit mouvement poſſible du doigt,

*) Voy. les Mémoires pour 1796, 4e claſſe, page 134.

**) *Aucun* mérite une plus ample diſcuſſion; & je la livrerai en ſon temps.

que par un ſecond dénaturement d'expreſſion, que je goûterois encore moins que le premier. A mon goût, autant vaudroit *flairer* de l'*oeil*, ou *voir* de l'*oreille* (*Panurge* mettoit ſes *lunettes* ſur l'*oreille*, afin d'avoir la *vue* plus *claire*) ou bien encore *clignoter* des *pieds*, que de *guigner* du *doigt*.

„Plutarque ayme mieux que nous le *vantions de* ſon jugement, „que *de* ſon ſçavoir." Ibid.

Vanter & *louer* ne ſont pas abſolument ſynonymes. D'abord le premier dit plus que le ſecond. Si donc on ne peut *louer* la *judiciaire* d'un homme, encore moins pourra-t-on la *vanter*. Enſuite on pourra bien *louer* l'*intégrité* d'un *Magiſtrat*, *voire* la *vanter*: mais ſi on le *loue de* ſon intégrité, on ne pourra pas pour cela l'*en vanter*. Non que l'intégrité d'un Magiſtrat ne ſoit *extrêmement louable* (ou *vantable*), mais c'eſt que „*vanter* quelqu'un de quelque choſe" ne ſe dit pas comme „*louer* quelqu'un de quelque choſe." Ainſi, dans cette façon de parler adverbiale, „Il fait bon battre glorieux, *il ne s'en vante pas*" on ne ſubſtitueroit point les mots *il ne s'en loue pas* aux mots *il ne s'en vante pas*, parce que *ſe vanter de quelque choſe* c'eſt *s'en glorifier*. Je ſuis même fâché que l'abbé *Féraud* ait dit: „Il fait bon battre *un* glorieux „(retranchez *un*) *car* (retranchez ce mot) il ne s'en *plaindra* pas" (dites au moins *plaint*) parce que, s'il eſt généralement vrai que l'on doit conſerver les proverbes dans toute leur pureté (comme l'abbé *Féraud* le ſoutient avec raiſon) il ſera vrai auſſi en particulier qu'on ne doit pas les changer de manière à leur ôter de leur énergie. Or il eſt ſans doute plus *dróle* de voir un *glorieux* ne pas ſe *glorifier* des coups de bâton reçus, qu'il le ſeroit de le voir ſe réduire à ne pas s'en *plaindre*.

„Ceux qui ont le corps gresle, le groſſiſſent d'*embourrures*: ceux „qui ont la matière exile l'enflent de paroles." Ibid.

Embourrer ou (comme on dit plus communément) *rembourrer*, c'eſt *garnir de bourre*: mais je ne trouve nulle part qu'*embourrure* ſoit

françois, du moins dans le ſens que *Montaigne* lui donne ici *); & je penſe que c'eſt le mot de *fourrure* qui peut avoir porté mon auteur à donner à *embourrure* le ſens qu'il lui attribue. Mais de ce qu'on diroit bien „groſſir ſon corps de *fourrures*," comme „groſſir ſon „corps de *bourre*," il ne s'enſuit pas, à mon jugement, que l'on pût dire „groſſir ſon corps d'*embourrures*." *Fourrure* eſt une „peau paſſée & „garnie de ſon poil," & *bourre* c'eſt du „poil détaché de la peau „d'une bête," p. c. l'un & l'autre mot exprime une *matière* avec laquelle on peut *groſſir*. Compoſons, Seigneur de *Montaigne*. Je conſens de toute mon âme à la réception de tel mot ſorti de votre fabrique: mais nous mettrons, ne vous déplaiſe, *bourre*, au lieu d'*embourrure*, dans le *Montaigne moderné* dont je m'occupe, à votre plus grande gloire, en faveur de ceux qui auront bien le temps de vous *lire*, mais à qui le loiſir défaudra pour vous *étudier*.

„En ceſte *practique* des hommes, j'entends y comprendre, & prin„cipalement, ceux qui ne vivent qu'en la mémoire des liures. Il (le „jeune homme) *practiquera* par le moyen des hiſtoires ces grandes „ames des meilleurs ſiècles." Alin. 19.

Le ſubſtantif *practique* étoit autrefois ſynonyme de *fréquentation*, comme le ſont encore *pratiquer* & *fréquenter*. C'eſt une bizarrerie que je ferai valoir avec une infinité d'autres, lorsque j'occuperai l'Académie „des bizarreries de l'uſage quant à la langue françoiſe."

„Entre les arts libérales, commençons par l'art qui nous faict li„bres. Elles ſeruent toutes voirement en quelque manière à l'inſtruc„tion de noſtre vie & à ſon uſage ... mais choiſiſſons celle qui y ſert „directement & *profeſſoirement*." Alin. 22.

Je trouve *profeſſoirement* digne de remplacer notre *ex-profeſſo*, & je m'en ſuis ſervi dans le préambule de la ſeconde partie de mon Mémoire du 17e octobre 1793, où j'ai dit: „Mon premier deſſein, Meſ„ſieurs, étoit de faire ſuccéder à la lecture que je viens d'avoir l'hon-

*) *Embourrure* eſt dans *Trévoux* & dans ſon *Abrégé*, mais comme un terme de Tapiſſier indiquant cette „*couverture* de toile qu'on met ſur la *bourre* d'une chaiſe."

„neur de vous faire, la communication de diverſes remarques ſur la „langue (peut-être aſſez curieuſes) auxquelles tant mon original, que „mon ouvrage propre ont donné lieu. Mais j'ai penſé depuis que ces „obſervations trouveroient une place plus naturelle dans quelque Mé„moire qui traiteroit *profeſſoirement* de la langue *)." *Ex-profeſſo* eſt bien rude & bien crud; & j'aimerois autant un mot formé ſur une langue vivante, à l'analogie d'autres mots du même genre, qu'un mot pris tout cruement d'une langue morte. Je rappelle ici ce que j'ai dit le 21e avril dernier, c'eſt que l'oreille délicate des Italiens leur a fait changer en *c*, ou en *es*, ou même en *s*, la ſyllabe *ex* des Latins, hors cinq mots compoſés du latin, qu'ils ont gardé cruement dans leur langue, & dont deux (*ex-profeſſo* & *ex-tempore*) **) ſe ſont auſſi fourrés dans la nôtre. Si l'on adoptoit *profeſſoirement*, cela n'empêcheroit pas qu'on ne conſervât *ex-profeſſo* en faveur de ceux qui aiment le *françois-latin* (comme d'autres chériſſent le *français-tudesque*) à l'inſtar de ce qu'on a fait dans l'orthographe françoiſe, où l'on a gardé de certaines lettres en l'honneur & gloire de l'étymologie.

J'ai fait valoir ci-deſſus *profeſſoirement* comme un adverbe formé ſur le françois à l'analogie d'autres adverbes. En effet je trouve entre

„profeſſion"
„profeſſoire"
& „profeſſoirement"

le même rapport qui exiſte entre

„acceſſion"
„acceſſoire"
& „acceſſoirement"

plus entre

„colluſion"
„colluſoire"
& „colluſoirement"

plus

*) Voy. les Mémoires pour 1796, 4e claſſe, page 129, ligne 16.
**) Ajoutez, ſi vous voulez, *ex-abrupto*.

plus encore entre

„illuſion"
„illuſoire"
& „illuſoirement,"

& j'obſerve que „méritoire" a formé „méritoirement," comme „no-„toire" a fait „notoirement" & „oratoire" donné oratoirement." J'obſerve encore en faveur de mon adverbe, que „profeſſer" & „profeſ-„ſeur" ſont de ſa troupe, au lieu que nous n'avons ni „acceſſer" ni „acceſſeur." Enfin, pour achever de parler ſur cette matière *ex-profeſſo* ou *profeſſoirement*, je dirai que ſi *acceſſoriamente* eſt italien, *profeſſoriamente* l'a été; du moins je le trouve dans *Oudin* *) avec *profeſſoirement* & *acceſſoirement*.

„C'eſt grand cas que les choſes en ſoyent là en noſtre ſiècle, que „la philoſophie ſoit, jusques aux gens d'entendement, un nom vain & „fantaſtique, qui ſe treuue de nul vſage & de nul prix, par opinion „& par effect. Je crois que ces *ergotismes* en ſont cauſe, qui ont „ſaiſy ſes avenues." Alin. 23.

Montaigne appelle plus bas *ergotiſtes* ceux que nous déſignons par le nom d'*ergoteurs:* mais *ergoterie* **) & *ergoteur* me ſemblent formés plus analogiquement qu'*ergotisme* & *ergotiſte* ***). Des 73 *verbes* en *oter* ou *otter* avoués par l'*Académie* †) il n'y en a pas un ſeul auquel réponde un *ſubſtantif* en *isme* ou en *iſte:* la terminaiſon *oter* (ou *otter*) y répond d'une part aux terminaiſons *otage* (ou *ottage*) *otation*, *otement* (ou *ottement*) & *oterie*, de l'autre aux terminaiſons *oteur* (ou *otteur*) & *otier* (ou *ottier.*) On y trouve

„agioter," „agiotage," „agioteur,"
„annoter," „annotation,"

*) Et dans *Duez* & *Placardi.*

**) Il eſt dans le *Traité de l'orthographe*, dans le *Dictionnaire grammatical* & dans ceux des citoyens *Gattel* & *Baſtien:* celui-là cite *Trévoux*, & celui-ci encore *Reſtaut.*

***) Ils ſont dans les *Dictionnaires françois* & *italien* de *Duez* & d'*Oudin*, qui écrivent „ergottisme" „ergottiſte."

†) *Poitiers* en a 24 de plus, dont 15 ſont dans le *Dictionnaire* du citoyen *Gattel.*

„ballotter," „ballottage,"
„barboter," „barboteur,"
„caboter," „cabotage," „cabotier,"
„cahoter," „cahotage,"
„carotter," „carottier,"
„chipoter," „chipotier,"
„chuchoter," „chuchoteur," „chuchoterie,"
„clignoter," „clignotement,"
„crachoter," „crachotement,"
„décrotter," „décrotteur,"
„dénoter," „dénotation,"
„ergoter," „ergoteur,"
„escamoter," „escamoteur,"
„fagoter," „fagotage," „fagoteur,"
„flotter," „flottage,"
„frotter," „frottage," „frottement," „frotteur,"
„gargoter," „gargotage," „gargotier,"
„noter," „noteur,"
„papilloter," „papillotage,"
„picoter," „picotement," „picoterie,"
„piloter," „pilotage,"
„radoter," „radotage," „radoteur,"
„faboter," „fabotier" *).

„La plus expreſſe marque de la ſageſſe, c'eſt vne *esjouiſſance* con-„ſtante." Alin. 24.

Je trouve *éjouiſſance* & *éjouir* plus doux à *prononcer*, & par conſ. à *entendre*, que „*réjouiſſance*" & „*réjouir*," tout comme je préfère, par la même raiſon, *épandre* à *répandre*."

*) Il ſeroit utile de rechercher pourquoi de certains mots (p. ex. ceux en „otta-„ge," „ottement," „otteur" & „ottier") ont un *tt*, & pourquoi d'autres (p. ex. ceux en „otage," „otation," „otement," „oterie," „oteur" & „otier") n'ont qu'un *t*, & ſi la différence eſt arbitraire ou fondée.

„ .... elle (la philoſophie) fait eſtat de *ſereiner* les tempeſtes de „l'ame." Alin. 24.

L'A. *Féraud* donne le mot de *ſereiner* à *Montaigne.* Si cela eſt, il a fait fortune bien vite, tout en le méritant *): car je le trouve déjà dans *le grand Dictionnaire* de 1593, & il eſt encore dans le *Dictionnaire* de *Monet* de 1636 avec „ſerener." Il ſeroit digne de prendre (ou de *reprendre*) à mon avis, comme a fait le verbe *raſſérener.* Si cela arrivoit, l'on auroit un mot pour rendre une *action*, & un autre pour exprimer la *réitération* de cette *action.* C'eſt ainſi qu'au lieu de dire *plus communément* „rembourrer" qu'„embourrer," je voudrois que l'on ne dît qu'„embourrer" lorsqu'on voudroit donner à connoître qu'on „garnit de bourre pour la *première* fois," & que „rem„bourrer" fût réſervé p. ex. pour cette phraſe: „Les fauteuils acadé„miques, après avoir reçu tant de générations de ſavans, veulent „être rembourrés." Quant à *ſérénifier*, s'il eſt *ſorti* de la fabrique de l'A. *Coyer*, comme le penſe l'A. *Féraud*, il faut l'y *renvoyer*, je penſe. *Sereiner* eſt à la fois *italien* & *latin*, & *raſſéréner* a tellement *pris* dans notre langue, qu'il *vieillit*, ſelon l'*Académie.*

„Ceux qui l'ont approchée (la vertu) la tiennent... logée dans „vne belle plaine fertile & fleuriſſante, d'où elle void bien ſous ſoy „toutes choſes, mais ſi peut-on y arriver (qui en ſçait l'addreſſe) par „des routtes ombrageuſes, gazonnées & doux-fleurantes, plaiſamment, „& d'vne pente facile & polie, comme eſt celle des *voutes céleſtes.*" Alin. 25.

Montaigne donne au ciel *pluſieurs* voutes, & d'autres écrivains ont autant de généroſité que lui: *La Fontaine* eſt plus chiche. Il dit, en s'adreſſant aux *amans*, aux *heureux amans:*

„Tenez-vous lieu de tout: comptez pour rien le reſte.
„J'ai quelquefois aimé: je n'aurois pas alors

*) Voy. les Mémoires de 1797, 4e claſſe, page 142.

„Contre le Louvre & ſes tréſors,
„Contre le firmament & *ſa voûte* céleſte,
„Changé les bois, changé les lieux
„Honorés par les pas, éclairés par les yeux
„De l'aimable & jeune bergère
„Pour qui, ſous le fils de Cythère,
„Je ſervis engagé par mes premiers ſermens:
„Hélas, quand reviendront de ſemblables momens!"

„Pour n'avoir hanté ceſte vertu ſuprême, belle, triomphante, „amoureuſe, délicieuſe pareillement & courageuſe, ennemie *profeſſe* „& irreconciliable d'aigreur, de desplaiſir, de crainte & de contrainte, „ayant pour guide nature, fortune & volupté pour *compagnes*, ils „ſont allez, ſelon leur foibleſſe, feindre ceſte ſotte image, triſte, que„relleuſe, despite, menaceuſe, mineuſe, & la placer ſur vn rocher à „l'escart, emmy des ronces; fantosme à eſtonner les gens." Ibid.

On *profeſſera* bien, on *fera* bien *profeſſion* d'être l'*ennemi* de quelqu'un, mais on ne ſera pas ſon ennemi *profès* (quand on le feroit *hautement*, *publiquement*, *irréconciliablement*) parce que l'adjectif-ſubſtantif *profès* (& ſon féminin *profeſſe*) eſt reſtreint à déſigner la perſonne qui a „fait les voeux de religion." Mais *profès* & *profeſſe* ne devant plus ſervir en apparence à l'uſage auquel on les avoit employés jusqu'ici, ne ſeroit-il pas à déſirer qu'ils acquiſſent une ſignification plus étendue que n'eſt celle que les Dictionnaires leur donnent? Cela les rangeroit dans la catégorie de *profeſſer* & de *profeſſion*, & encore de *mon profeſſoirement*.

„ . . . quand il (le disciple) commencera de ſe ſentir, luy pre„ſéntant *Bradamante* ou *Angelique* pour maiſtreſſe à jouyr, & d'vne „beauté naïfue, active, genéreuſe, non hommaſſe, mais virile, au „prix d'vne beauté molle, affettée, delicate, artificielle, l'vne tra„ueſtie en garçon, coiffée d'vn morion luyſant, l'autre veſtue en gar„ce, coiffée d'vn attifet *emperlé:* il (le gouverneur) jugera masle ſon „amour mesme, s'il choiſit tout diverſement à ceſt effeminé paſteur „de Phrygie." Alin. 26.

Emperler: mot à rajeunir, ſelon moi. Je dis *rajeunir*, parce que je le trouve dans *le grand Dictionnaire franç. latin* de 1593, & dans ceux de *Monet* & d'*Oudin*. Il ſerviroit à déſigner *orner de perles*, par conſéquent il contribueroit à la *briéveté* du ſtyle, qualité ſi néceſſaire, ce ſemble, dans un ſiècle *polyglotte;* & la fabrication m'en paroîtroit auſſi bonne que celle d'„*em*païller," „*em*panacher," „*em*penner," „*em*-„plumer," „*em*poiſſer," „*em*poiſſonner," & de nombre d'autres verbes que je pourrois accumuler ici.

„Il (le gouverneur) luy (au diſciple) fera ceſte *nouvelle leçon*, que „le prix & hauteur de la vraye vertu eſt en la facilité, vtilité & plai-„ſir de ſon exercice, ſi esloigné de difficulté, que les enfans y peu-„vent comme les hommes, les ſimples comme les ſubtils." Alin. 27.

Vraiment la *leçon* eſt *nouvelle* *), ſi *Montaigne* veut nous dire que „la vertu *tire* ſon prix & ſa hauteur de la facilité, de l'utilité, du „plaiſir de ſon exercice" ou, en d'autres termes, que „la vertu eſt „*priſable* & haute, *parce qu'*il eſt facile, utile & *plaiſant* de l'exercer." Cette maxime ne ſauroit, je crois, paſſer ſans contradiction, en ce qu'au moins il ne ſemble guère ſoutenable que les vertus *faciles, agréables*, ſoient *hautes, difficiles* à *atteindre*. Ailleurs *Montaigne* dit plus judicieuſement, à mon avis, à la ſuite de l'hiſtoire de *Spurina* („*qui oris decorem vulneribus confudit, deformitatemque ſanctitatis ſuae* „*fidem, quam formam irritamentum alienae libidinis eſſe maluit* **)" „Ceux qui ſe desrobbent aux offices communs & à ce nombre infiny „de reigles espineuſes, à tant de viſages, qui lient vn homme d'exacte „preud'hommie en la vie ciuile .... ils peuvent avoir autre prix, mais „le *prix* de la *difficulté* il ne m'a jamais ſemblé qu'ils l'euſſent; ny „qu'en *malayſance* il y ait rien au delà de ſe tenir droit emmy les flots „de la preſſe du monde, respondant & ſatisfaiſant loyalement à tous

*) *Titius* & *Coton* n'ont pas rendu *nouvelle*, & M. *Bode* a rendu *plaiſir* par *Beharrlichkeit*. Le premier traduit *hauteur* par *Gröſse*, le ſecond par *ſublimity*, & le troiſiéme par *Würde*.

**) *Valerius Maximus*, Lib. IV, in *Externis*, § 1.

„les membres de ſa charge," *dépenſant*, comme eût dit Me de *Sévigné*, dépenſant ſes momens & ſes fatigues *en pièces de quatre ſous* *).

„Si la fortune commune luy faut (à la vertu) elle luy eſchappe, „ou elle s'en paſſe." Alin. 28.

Le commentateur *Coſte* eſpéroit dès 1725 que quelqu'un expliqueroit l'énigme qu'il trouvoit dans la diſtinction faite par *Montaigne* entre *échapper à la fortune* & *s'en paſſer*, & il l'eſpéroit encore en 1739: c'eſt-à-dire qu'il eſt mort en eſpérant. J'avois d'abord, à l'effet de la ſolution de cette énigme, retranché le premier *elle*, & lui ſubſtituant *ou*, que je prenois devant le ſecond *elle*, je liſois: „Si „la fortune commune luy faut, ou luy eſchappe, elle s'en paſſe." La fortune *faut*, diſois-je, lorsqu'elle *ne vient pas:* elle *échappe*, quand elle *s'en va*. Depuis ayant fait une étude plus particulière de mon auteur, ſans en avoir encore procuré *quatre* éditions, comme *Coſte*, j'ai penſé que ce retranchement & cette ſubſtitution avec translocation étoient des actes un peu violens, & que la penſée de *Montaigne* s'expliquoit en quelque manière par d'autres paſſages des *Eſſais*. Il dit ailleurs, en parlant de *Marcellinus*, qu'„il entreprit de s'en aller „de ceſte vie, non de s'enfuyr, non d'*eſchapper à* la mort, mais de „l'*eſſayer*," & en parlant de *Vibius Virius* & des Sénateurs Capouans, qu'„il conclud que le beau eſtoit d'*eſchapper à* la fortune par leurs „propres mains," & en parlant de lui-même & de l'*imagination* „mon „art eſt de *luy eſchapper*, par faute de force de luy *reſiſter*," & encore, en parlant de la *fortune*, „je n'ay guere d'art pour ſavoir gauchir la „fortune & *luy eſchapper*, ou la *forcer*," & encore „ſi je ne puis la „*combattre*, je *luy eſchappe*," & encore „mon eslection ſera volontiers „d'*eſchapper*," & encore, en parlant de la température de l'air „je „prends plustost toute autre façon d'*eſchapper au* froid." Il m'a donc ſemblé qu'*échapper à la fortune*, c'étoit pour *Montaigne* „la *com*„*battre* avec le *courage* dans les *jambes*" comme diſoit un homme de ſa province, & que *ſe paſſer de la fortune*, c'étoit pour lui „la *mépriſer*"

*) Voyez encore Liv. III, chap. 2, alin. 7.

ne pas la regarder comme un *ennemi* devant lequel il faille *fuir*, ou qu'il faille *combattre*. Mais toujours pourra-t-on demander peut-être, comment on pourroit *combattre* un ennemi, ou lui *échapper*, s'il *faut*, s'il ne *préſente pas la bataille?* Du reſte, je crois que par „for-„tune *commune*" *Montaigne* entend celle qui eſt telle pour le *commun*, le *vulgaire*, le *gros* des *hommes*. *Titius* & *Bode* ont „*das ge-„meine Glück.*"

„Noſtre enfant ne doit au paidagogisme que les premiers quinze „ou ſeize ans de ſa vie: le *demeurant* eſt deu à l'action." Alin. 29.

Puisque *au demeurant* s'eſt conſervé dans le ſtyle familier, pourquoi ne pas continuer d'employer dans le même ſtyle *demeurant* comme *ſubſtantif*, ainſi qu'a fait ſi joliment *Malherbe* dans ſon ſonnet ſur un Livre de fleurs?

„Certes *), il a privé mes yeux
„De l'objet qu'ils aiment le mieux,
„N'y mettrant point de marguerite:
„Mais pouvoit-il être ignorant
„Qu'une fleur de tant de mérite
„Auroit terni *le demeurant?*"

Au demeurant eſt le ſynonyme d'*au reſte* & *au ſurplus;* & parce qu'*au reſte* & *au ſurplus* forment des *adverbes*, cela n'empêche pas que les *ſubſtantifs* qui entrent dans leur compoſition, ne s'emploient en guiſe

*) C'eſt ſans doute à quelque poëte *diſetteux d'*une ſyllabe que „certes," „jusques" & „onques," doivent leur *s* finale: car l'étymologie n'autoriſe pas la préſence de cette lettre dans les mots en queſtion, comme elle fait, par exemple, dans „Thèbes" venu de „Thebæ." Parce qu'elle l'embarraſſoit dans „Thèbes," *Piron* l'a retranchée ſans façon en „*épigrammatiſant* ſur les odes de Madame „de ***."

„Pauvre Sapho, quel aveugle délire
„De l'Hélicon vous fit courir les bois?
„Certes, s'il n'eût onc été d'autre lyre
„Que celle-là qui jura ſous vos doigts,
„Autour de lui des lions peu courtois
„Orphée eût vu ſe dreſſer les crinières,
„Arion eût ſous l'eau péri cent fois,
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
„Et Thebe encor ſeroit dans les carrières."

de ſubſtantifs & ſans la particule *au*. Il en eſt de même des expreſſions adverbiales *au contraire*, *au fond*, *au haſard*, *au préalable*, *au risque*. Bien plus, quoiqu'on dife plus ordinairement, ſelon l'*Académie* „le *reſte*" que „le *reſtant*" cependant le dernier mot, qui participe à la ſignification de *demeurant*, eſt non-ſeulement *ſubſtantif*, mais encore *adjectif*. Enfin *demeurant* étant un *participe actif*, tout ce qui fait pour „Concord*ant*," „Fend*ant*," „Fond*ant*," „Mord*ant*," „Pen„d*ant*" &c., (pour ne parler que des mots qui expriment des *choſes*) milite auſſi pour „Demeur*ant*."

„Je ſuis de l'aduis de Plutarque, qu'Ariſtote *n'amuſa* pas tant ſon „grand diſciple à l'artifice de compoſer ſyllogiſmes....qu'à l'*inſtruire* „des bons préceptes touchant la *vaillance* & *proueſſe*...." Alin. 30.

De ces deux mots, qui paroiſſent être ſynonymes, le premier ſe ſoutient encore dans le haut ſtyle & la poéſie, le ſecond a vieilli, avec celui de *preux* & ceux de „*preud'*homme" & „*preud'*hommie," ou „*prud'*homme" & „*prud'*hommie." Cependant, de *prude*, qui ſemble être le *féminin* de *preux* *), on a fait un *ſubſtantif féminin*, (qui s'emploie, comme *adjectif* de *tout genre*, tant pour les *femmes*, que pour les *jeunes gens*) & encore *pruderie*, qui, comme *prude* („ſubſtantif") par privilége odieux, n'eſt qu'à l'uſage de ceux qui veuleut parler des *femmes ſingereſſes* de la *ſageſſe*.

„Ny le plus jeune refuye à philoſopher, ny le plus vieil s'y laſſe. „Qui faict autrement, il ſemble dire, ou qu'*il n'eſt pas encores ſaiſon* „d'heureuſement viure, ou qu'*il n*'en *eſt plus ſaiſon*." Ibid.

Si ce paſſage de *Montaigne* fût venu à la connoiſſance de l'A. *Féraud*, je doute qu'il eût dit dans ſon *Dictionnaire critique*, au mot *ſaiſon*: „*La Fontaine* dit *être ſaiſon*, ſans *de*; ce *de* l'embarraſſoit *ap*„*paremment*."

(„Un

*) Le *maſculin* doit avoir été „pr*eude*" puis „pr*ude*" & le *féminin* a d'abord dû être „pr*eude*," témoin „pr*eud'*homme" & „pr*ud'*homme," & „pr*eud'*hommie" & „pr*ud'*hommie." Dans ces *quatre* mots le ' indique le *retranchement* d'un *e*.

(„Un homme de moyen âge,
„Et tirant ſur le griſon,
„Jugea qu'*il étoit ſaiſon*
„*De* ſonger au mariage.")

Car de ce qu'on diroit bien, ſelon les perſonnes & les circonſtances „Le mariage eſt hors *de* ſaiſon," „n'eſt plus *de* ſaiſon," „n'eſt pas „*de* ſaiſon," „n'eſt pas encore *de* ſaiſon," „eſt *de* ſaiſon," „eſt encore „*de* ſaiſon," il ne s'enſuit pas que l'on ne pût dire auſſi „Il eſt *ſaiſon* „de ſonger au mariage" à moins d'être de l'avis du ſage *Thalès*, lequel preſſé par ſa mere (de marieuſe mémoire) de ſoumettre ſon chef masculin au joug conjugal, s'en défit *dextrement* (dit *Plutarque*) d'abord en lui diſant „Il n'eſt pas encore temps" puis „Il n'eſt plus „temps," *refuſant*, comme eût dit *Montaigne*, refuſant *l'opportunité* à une *action*, qu'à tort ou à droit il regardoit comme *importune* *). *Saiſon* eſt au *figuré*" le temps *propre* à chaque choſe" ſelon l'A. *Féraud* même; & puisque l'on diroit bien „Il eſt *temps* de ſonger au mariage" à plus forte raiſon doit-on pouvoir dire „Il eſt *ſaiſon* de ſonger au „mariage." D'ailleurs je demande ſi, parce qu'on diroit ſans contredit „Le mariage eſt *de* ſaiſon" l'on diroit de même „Il eſt *de* ſaiſon de „ſe marier"? J'en doute très-fort.

„.... à l'ouyr" (Platon) „ſemble-il pas *preſter* plus de *temps* & de „*ſollicitude* aux exercices du corps" (qu'à ceux de l'esprit) „& eſtimer „que l'esprit s'en exerce quant & quant, & non au contraire?" Alin. 31.

„*Prêter* plus de temps." Nous ſommes plus *généreux:* nous *donnons* ce que, du temps de *Montaigne*, on ne faiſoit que *prêter*. Mais ſi, aux jours de mon auteur, on *prêtoit* ſon *temps*, & ſi de nos jours on le *donne*, par contre alors on ſe *battoit ſur* la conſcience **), & aujourd'hui l'on met ſeulement *la main deſſus:* c'eſt que nous l'avons *plus délicate*.

„On euſt failly, à l'adventure, moins *dommageablement* s'inclinant „vers l'indulgence." (pour les enfans.) Alin. 32.

*) *Montaigne*, Liv. 2, chap. 8, alin. 9.
**) „Eſſais" Liv. I, chap. 38, alin. 1.

„Dommageablement." Cet adverbe a vieilli, *dommageablement* pour la langue *).

„On doit *enſucrer* les viandes ſalubres aux enfants, & *enfieller* celles „qui leur ſont nuiſibles." Alin. 33.

Enſucrer eſt dans *Oudin: enfieller* je le trouve dans *le grand Dictionnaire françois-latin* de 1593 **), dans *Furetière*, dans *Trévoux* & dans ſon *Abrégé*. *Enſucrer* a pour lui l'italien *inſuccherare*, ce que n'a pas *ſucrer;* & *en* ſemble ſervir, avec nombre de *ſubſtantifs*, à former des *verbes* dont l'uſage eſt de faire connoître une *action* qui s'opère au moyen de la choſe indiquée par le ſubſtantif, lequel, avec *en*, compoſe le verbe. Tels ſont les verbes

„*en*cager,"
„*en*caiſſer,"
„*en*capuchonner,"
„*en*caquer,"
„*en*caver."

Quant à „*en*fieller ***)" le verbe „*em*mieller" fait particulièrement pour lui, & je ne vois pas quel ſeroit ſon ſubſtitut, à moins qu'on ne voulût dire que peu importe à la langue que l'on puiſſe dire en *un* mot „rendre[1] amer[2] avec[3] du[4] fiel[5] †)." Je trouve à la vérité *fieller* dans *Oudin:* mais auſſi je ne le trouve que là; & d'ailleurs j'y trouve également „*en*ſucrer." De plus ce qui fait pour „*en*ſucrer" à l'excluſion

*) Je le trouve dans „le grand Dictionnaire françois-latin" de 1593, dans *Monet* & dans *Oudin* & *Duez*.

**) Avec la remarque que *Ronsard s'en eſt ſervi*, mais que *notre langue eſt devenue plus ſévère* (& *plus pauvre*) & que *la Poéſie ne donne plus droit de faire des mots nouveaux.* C'étoit à de *nouveaux maux* (comme s'exprime Mr le chev. de *Monpas*) que ce *droit* étoit *réſervé.*

***) *La Combe* a „enfeillir" mais je crois que c'eſt une faute d'impreſſion, & qu'il faut lire au moins „enfeillir" car *ie* dans „fiel" & „enfieller" eſt, ſelon moi, le renverſement d'*ei.*

†) „Le mot *énumérer*, que nous devons à Mr *Linguet*, ſeroit plus court & plus „commode que la périphraſe *faire l'énumération* (de)." *Féraud.*

de *ſucrer*, fait auſſi pour „*en*fieller" à l'excluſion de *fieller*. Enfin l'Italien dit „*in*fielare" comme „*in*zuccherare."

J'ai parlé ci-haut de la prépoſition *en* comme ſervant, avec nombre de ſubſtantifs, à compoſer des verbes, dont l'uſage eſt d'indiquer une action opérée au moyen de la choſe que marque le ſubſtantif, lequel, avec *en*, compoſe le verbe; & rien ne s'oppoſeroit à ce ſyſtème de la formation des verbes dont il s'agit, ſi leur compoſition étoit généralement auſſi régulière que l'eſt celle des verbes ſusallégués. Mais il ſe trouveroit une furieuſe exception dans ce ſyſtème, en ce que *n* dans *en* ſe changeroit en *m*, lorsque la lettre initiale du prétendu ſubſtantif ſubſéquent ſeroit ou *m*, ou *b*, ou *p*, ſans que cependant le ſon de *n* fût changé en celui de *m*. P. ex. „*em*baller," „*em*barquer," „*em*bâter," „*em*baumer," „*em*boucher," „*em*bourſer," „*em*manché," „*em*mieller," „*em*paillé," „*em*paler," „*em*pâter," ſe prononcent comme s'ils étoient écrits „*en*baller," „*en*barquer," „*en*bâter," „*en*baumer," „*en*boucher," „*en*bourſer," „*en*mancher," „*en*mieller," „*en*pailler," „*en*paler," „*en*pâter," de ſorte qu'il ſeroit plus naturel de ſuppoſer que les verbes qui déſignent *ce qui ſe fait au moyen des ſubſtantifs qu'ils renferment*, au lieu d'avoir été formés par *en* ſuivi d'un *ſubſtantif* terminé en *verbe*, pour éprouver enſuite le changement de *n* en *m* dans *en* devant *b*, ou *m*, ou *p*, ont été formés *directement* ſur l'Italien ou le Latin, de ſorte que dans ces verbes *am* ne devroit pas ſe prononcer *an*, mais *ème* (cette ſyllabe *me* prononcée très-brève) comme *im* ne ſe prononce pas *ain*, mais *ime* (cette ſyllabe *me* prononcée pareillement très-brève). Je ne trouve point dans l'Italien (pour ne parler que de celui-ci) de verbe commençant par *inb* ou *inp*, & je n'y trouve que *trois* mots commençant par *inm*, ſavoir „*inm*alinconicare," (& ſes appartenances „*inm*alinconichire" & „*inm*alinconire") „*inm*al-„vagito" & „*inm*arcire:" encore le *premier* mot ſe retrouve-t-il ſous *imm*, avec „*imm*alinconichire."

„Toute *eſtrangeté* & *particularité* en nos moeurs eſt *évitable*, comme „ennemie de ſociété." Alin. 34.

Étrangeté. Quelle *étrangeté*, pourroit-on dire, d'avoir & l'*adjectif* (voire *in duplo*) & l'*adverbe*, & le *verbe*, & de n'avoir *pas* le *ſubſtantif*, ou de ne l'avoir *plus*! *)

Particularité a dans le paſſage de *Montaigne* le troiſième ſens que l'A. *Féraud* donne à *particulier*. Il ne l'a pas en Italien. Ne ſeroit-ce point une raiſon pour le lui donner dans notre langue? Ceux qui ont prétenduement fixé celle-ci, n'ont pas été infiniment curieux, à ce qu'il ſemble, d'emprunter de celle-là: au contraire ils ſemblent s'être étudiés à lui faire mainte reſtitution, mais bien arbitrairement, ſelon mes petites lumières. D'ailleurs *ſingularité* a le *troiſième* ſens de *particulier* & de *ſingulier*; & *ſingulier* eſt en quelque manière le *ſynonyme* de *particulier*.

Montaigne emploie encore *particulariſer* dans le ſens de *rendre particulier*. „Ma vieilleſſe me *particulariſe* & ſequeſtre aucunement des „formes communes **)." Je ne trouve que *ſingulariſer* qui faſſe pour *particulariſer* dans le ſens de *rendre particulier*; mais *ſingulariſer* eſt un verbe *réciproque* & non point *actif*.

Montaigne donne à *évitable* un ſens qui emporte un *devoir*. Mais des *huit* adjectifs en *itable* avoués par l'*Académie*, qui peuvent ſe rendre par des *verbes* de la *même* famille ***), *ſept* indiquent une *poſſibilité*, ou ſon *contraire* †). „Évi*table*" c'eſt ce qu'on *peut éviter* „Habi*table*," ce qu'on *peut habiter* „Indubi*table*," ce dont on *ne peut* pas *douter* „In-„évi*table*," ce qu'on *ne peut* pas *éviter* „Inhabi*table*," ce qu'on *ne peut* pas *habiter* „Inimi*table*," ce qu'on *ne peut* pas *imiter* „Profi*table*," ce qui *peut profiter*. Il n'y a que le ſeul *imitable* qui ſemble indiquer à la

*) Ils ſont tous *quatre* dans *le grand Dictionnaire françois-latin* de 1593, dans *Monet*, dans *Duez* & dans *La Combe*: „étrangeté" n'eſt déjà plus dans *Oudin*, édition de 1686.

**) Liv. III, chap. 9.

***) Tels ne ſont point „cha*ritable*," „équi*table*," „véri*table*."

†) On en peut dire autant de l'adjectif *amuſable*, inventé, dit-on, par la Marquiſe de *Maintenon* pour exprimer le tourment que lui faiſoit éprouver l'exercice de ſes nobles fonctions auprès de *Louis le Grand*: „Quel ſupplice d'*amuſer* un homme „qui n'eſt plus *amuſable*!"

fois ce qui *peut* & ce qui *doit* être *imité*. Je dis, *qui ſemble:* car ici, comme ailleurs, les Lexicographes ne ſont pas trop bien d'accord, ni entre eux, ni avec eux-mêmes. Selon *le grand Dictionnaire françois-latin* de 1593, *Monet*, *Pomey*, *Richelet*, *Furetière* *), *Danet*, *Trévoux* (& ſon *Abrégé*), *Wailly*, *Le Brun* & *Gattel*, *imitable* c'eſt ce qu'on *peut imiter*. Selon l'*Académie*, c'eſt encore ce qui *mérite* d'être *imité*, ou, comme s'exprime l'A. *Alberti*, ce qui *eſt à* imiter. Exemples. „Cela n'eſt pas imitable," „Cette action eſt plus admirable, „qu'imitable." Selon l'A. *Féraud* „Imitable ne ſe dit *guère* **) qu'avec „la négative" & en diſant cela il ne contredit pas la définition qu'il donne de ce mot. Mais quand il ajoute qu'„*imitable* diffère d'*inimi-*„*table*, en ce que celui-ci ſe dit du bien auquel on *ne peut* atteindre, „& celui-là du mal qu'il *faut* éviter" („„Virgile eſt *inimitable*, & „„Lucain *n*'eſt pas *imitable*,"") ce critique me ſemble être en contradiction avec lui-même. Car ſi *imitable* c'eſt ce qui *peut*, ce qui *doit* être imité, & ſi *imitable* ne s'emploie guère qu'avec la *négative*, il s'enſuit, je crois, que dans la phraſe

„Virgile eſt *inimitable*, & Lucain *n*'eſt pas *imitable*,"

les mots

„Lucain *n*'eſt pas *imitable*,"

peuvent ſignifier *autant*

„Lucain *ne peut* pas être imité,"

que

„Lucain *ne doit* pas être imité."

A mon avis *imitable* ſignifie *également* ce qui *peut* & ce qui *doit* être imité, ou il n'a pas cette *double* ſignification. Dans le *premier* cas la

*) Cependant *Furetière* & *Trévoux* ont la phraſe „La vie de Saint-Siméon Stylite" (qui, établi ſur une colonne haute de trente-ſix coudées, établie elle-même ſur le haut d'une montagne, employoit une partie de ſes utiles journées à faire force génuflexions) „eſt plus admirable qu'imitable" où *imitable* ſemble exprimer ce qui *doit* être imité, ce qui *mérite* de l'être, ce qui *eſt à* imiter, comme *admirable* indique ce qui *doit* être admiré, ce qui *mérite* de l'être, ce qui *eſt à* admirer.

**) Il ne connoît *guère* l'emploi de ce mot.

phraſe de l'A. *Féraud* donnera de l'embarras au lecteur, & l'obligera de faire ce raiſonnement: „*Imitable* ſignifie également ce qui *peut* & „ce qui *doit* être imité; or *imitable* ne peut avoir ici le *premier* ſens, „puiſque c'eſt celui d'*inimitable*, & qu'il s'agit *apparemment* de mettre „*Virgile* & *Lucain* en *oppoſition;* donc *imitable* a le *ſecond* ſens." Mais ſi *imitable* n'a que le ſens *contraire* d'*inimitable* *), la phraſe de l'A. *Féraud* n'aura pas de ſens. Il faudra donc, pour lui en donner un qui ſoit clair dès l'abord, renoncer généreuſement à l'antithèſe en faveur de la *lucidité*, & dire „Virgile eſt *inimitable*, & Lucain *ne doit* pas „être imité **)," ou, ſi l'on tient fortement à l'antithèſe „Virgile *ne* „*peut* pas être imité, & Lucain *ne doit* pas l'être."

Ceux pour qui *imitable* ſignifie ſimplement „ce qui *peut* être imité," comme *inimitable* „ce qui *ne peut* pas l'être" ont pour eux le *Latin*, & ceux pour qui le ſecond ſens d'*imitable* eſt „ce qui *doit* l'être" ont l'*Italien* de leur côté, & cela fait peut-être en faveur des étymologiſtes qui trouvent le *François* dans l'*Italien*, non dans le *Latin*, & qui penſent que ce que le *François* a de commun avec le *Latin*, il l'a parce que l'*Italien* le lui a fourni, après l'avoir emprunté lui-même du *Latin*.

Outre ces *huit* adjectifs en *itable*, l'A. *Féraud* a encore *irritable*, comme un mot de nouvelle fabrique, ainſi qu'*irritabilité*. On s'eſt *haſardé* à dire *irritabilité* des *perſonnes*, après l'avoir d'abord dit ſeulement des *nerfs*. J'applaudis de grand coeur à ceux qui ſe ſont *expoſés* ainſi pour la langue, & j'en ferois autant à ceux qui s'*aventureroient*

*) Et il n'en devroit pas avoir d'autre, puiſque c'eſt ſon ſens unique en Latin, d'où l'Italien l'a tiré, ſi ce n'eſt le François, & qu'*inimitable* (qui lui eſt oppoſé) dans l'Italien, comme dans le François, ſignifie ſimplement ce qui *ne peut* être imité. J'oſe croire qu'on s'eſt mépris pour *imitable*, comme on a fait, ſelon l'A. *Féraud*, pour *inimitable*. Quelques auteurs ſe ſont ſervis d'*inimitable* pour ſignifier qu'une choſe *ne doit* pas être imitée. D'autres voulant dire la même choſe, ſe ſeront ſervis d'*imitable* avec la *négative*, & leur exemple ſera devenu règle, grâce aux ſoins de l'*Académie françoiſe*.

**) „Quand on veut ſignifier qu'une choſe *ne doit pas être imitée*, il ne faut pas ſe „ſervir d'*inimitable*.... Il faut dire *ſimplement*, qu'*on ne doit pas l'imiter*." *Féraud*.

à dire encore *irritable* des *perſonnes:* car enfin, comme dit le *commentateur* de *Montaigne* (je ne ſais *d'après* qui) „ce ſont les *mots* qui „ſont faits pour les *choſes*, & ce ne ſont pas les *choſes* qui ſont faites „pour les *mots.*" Il eſt *latin*, ainſi qu'*irritabilité*, s'il n'eſt pas *italien* (non plus qu'*irritabilité*) & s'il ne s'emploie plus uniquement en parlant des nerfs, auſſi n'avoit-il pas cet emploi reſtreint chez les Latins. On en peut dire autant d'*irritabilité*. C'eſt ainſi qu'*iraſcible* (mot *italien* & *latin*) après avoir croupi pendant des ſiècles dans ces phraſes ſurannées „appétit irascible," „faculté irascible," „partie iras„cible," eſt retourné à ſon uſage primitif: car on l'emploie, ſelon M. *Marin*, en parlant d'un *homme*.

Je trouve auſſi dans *Montaigne* l'adjectif *agitable;* mais le ſens qu'il lui attribue fait contre le ſens qu'il donne à *évitable*. „Leur ame" (celle du vulgaire) „pour eſtre plus craſſe & obtuſe, eſt moins péné„trable & *agitable* *)." Ici *agitable*, comme *pénétrable*, indique une *poſſibilité*.

Avant de finir ſur *agitable*, & pour finir, ſi cet adjectif prenoit, je déſirerois qu'outre le ſens qu'il tiendroit de ſon Créateur, on le fît encore participant de la ſignification qu'a le verbe *agiter* comme *ſynonyme* de *discuter*. Alors il figureroit p. ex. dans cette phraſe: „Il eſt „des queſtions, qui, ſelon les temps & les lieux, ſont *agitables* & *non „agitables* **)."

„On reprochoit à Diogènes, comment, eſtant ignorant, il ſe „mesloit de la philoſophie. „„Je m'en mesle,"" dit-il, „„d'autant „„*mieux à propos.*"" Alin. 35.

Mieux à propos. Cette expreſſion eſt-elle autoriſée? Je croirois qu'oui. On dit *bien-à-propos* ***) & *mal-à-propos*. *Mieux* eſt le

*) Liv. III, chap. 12.

**) Les ennemis des ſynonymes n'auroient rien à dire ici: car *débattable* & *discutable* ne ſont pas encore françois.

***) Et on le dit depuis long-temps: témoin ce Rondeau ſur *Ogier* le *Danois*:

„*Bien-à-propos* s'en vint Ogier en France
„Pour le pays des mescreants monder.

comparatif de *bien*, & ſignifie quelquefois *plus*; & je penſe que l'on diroit bien „Je m'en mêle d'autant *plus* à propos," comme „Je m'en „mêle d'autant plus mal-à-propos." D'ailleurs *à-propos* a ici le ſens de „convenablement à la perſonne qui parle."

„Ja n'eſt beſoin de conter ſa vaillance,
„Puisqu'ennemys n'oſoyent le regarder.
„Or quand il eut tout mis en aſſeurance,
„De voyager il voulut s'enharder.
„En Paradis trouua l'eau de Jouvence,
„Dont il ſe ſçeut de vieilleſſe engarder
„*Bien-à-propos.*

„Puis par ceſte eau ſon corps tout decrepite
„Transmué fut, par maniere ſubite,
„En jeune gars frais, gracieux & droict.
„Grand dommage eſt que cecy ſoit fornettes:
„Filles connoy, qui ne ſont pas jeunettes,
„A qui ceſte eau de jouvence viendroit
„*Bien-à-propos.*"

Recherches

RECHERCHES SUR L'L MOUILLÉE.

PAR MONSIEUR BASTIDE *).

J'ai l'honneur de mettre ſous les yeux de l'Académie la 2de partie du 2^d^ volume de mon *Recueil d'obſervations ſur la langue françoiſe.* Cette ſeconde partie, qui va du feuillet 300 excluſivement, au feuillet 400 incluſivement, a été commencée en Mars 1797, ou vers ce temps-là, puiſque j'ai préſenté ma 1ère partie à l'Aſſemblée ordinaire du 16e de ce mois-là. Malgré toute la modeſtie dont je dois me piquer plus qu'un autre, je ne ſaurois m'empêcher de répéter itérativement ici ce que j'ai dit le 12e février 1795, lors de la préſentation du premier volume de mon Recueil, c'eſt que *ne doutant pas qu'il ne contienne bien des choſes haſardées, j'oſe croire auſſi qu'il renferme de l'intéreſſant.*

Au feuillet 334 r. commencent ſpécialement mes Recherches ſur les étymologies françoiſes, dans leſquelles le haſard m'a engagé, & dont je me propoſe de communiquer le réſultat à mes doctes Confrères. Je commence dès aujourd'hui.

Me trouvant au printemps paſſé chez une Dame de mes amies, j'aperçois la Grammaire de *Wailly* ſur ſa table. Je l'ouvre au haſard, & j'y tombe ſur ce paſſage: „*Gentil* fait .... gentiment. Cet

*) Lu à l'Académie le 25 octobre 1798.

„adverbe a ſans doute été ainſi formé, parce que dans *gentil* la lettre „*l* ne ſe prononce pas." Revenu chez moi, je me mets à rechercher pourquoi *gentil* ſe prononce *genti*, pourquoi l'*l* de *gentil* n'étant ni *mouillée*, ni même *prononcée*, le *féminin* de ce mot eſt, non *gentie*, ni même *gentile*, mais *gentille;* pourquoi les adverbes terminés en *ment* étant formés, à ce qu'on dit, par l'addition de ces quatre lettres à la terminaiſon féminine des adjectifs terminés au masculin par une conſonne, l'adverbe *gentillement* a fait place à *gentiment*, formé en apparence par l'addition de *ment* à l'adjectif *masculin* tel qu'il ſe *prononce*. Me voilà engagé dans la matière de l'*l* mouillée, & tellement engagé, que, jusqu'à cette heure, j'ai barbouillé ſur *icelle* plus de deux mains de papier.

La Grammaire de *Wailly* ne me ſatisfaiſant pas au ſujet de l'*l* mouillée, j'ouvre celle de *Reſtaut*, & j'y trouve ſur cette lettre ce qui va ſuivre:

„Il y a encore quelques conſonnes, qui, ayant un ſon différent „de celui des autres, auroient pu s'écrire avec des caractères parti„culiers: mais pour les exprimer on a joint enſemble pluſieurs des „lettres déjà établies. Ce ſont *ch*, *gn* & l'*l* mouillée."

„Le ſon de l'*l* mouillée ſe reconnoît dans les mots *travail*, *ſoleil*, „*orgueil*."

„Quand l'*l* a ce ſon coulant & mouillé, elle eſt toujours précé„dée d'un *i*, & quelquefois ſuivie d'une autre *l* auſſi mouillée: mais on „n'ajoute cette ſeconde *l* à la première, que pour la lier avec une „voyelle ſuivante."

„L'*i* qui précède toujours cette *l* mouillée, eſt quelquefois ſeul, „c'eſt-à-dire qu'il n'eſt qu'à la ſuite d'une conſonne, comme dans „les mots *péril*, *gentilhomme*, *fille*, *famille*, &c."

„Cet *i* eſt quelquefois précédé d'une voyelle ſimple ou d'une „voyelle compoſée, avec laquelle il ſe joint pour ne faire qu'une ſeule „ſyllabe."

„La voyelle ſimple qui précède l'*i*, ne peut être qu'*a* ou *e*."

„*A*, comme dans *émail*, *bail*, *travailler*, *caillou* &c."

„*E*, comme dans *pareil*, *vermeil*, *bouteille*, *vieillard* &c."

„La voyelle compoſée qui précède l'*i*, ne peut être que *ou* ou *eu*."

„*Ou*, comme dans *bouillir*, *fouiller*, *rouille*, *ſouillure* &c."

„*Eu*, comme dans *deuil*, *ſeuil*, *feuillet*, &c."

„Après les conſonnes *e* & *g*, quand il faut les prononcer avec le „ſon rude, on met *ue* au lieu de *eu*, comme dans *cercueil*, *orgueil*, „*cueillir*, *recueillir*, &c., parce que ſi après ces conſonnes on mettoit „*eu*, on pourroit prononcer *cerſeuil*, *orjeuil*, &c., le *c* prenant le ſon „de l'*s*, & le *g* celui de l'*j* avant l'*e*, comme on l'a dit."

„On écrit *oeil*, que l'on prononce comme *oeuil*."

„Il y a cinq manières d'articuler l'*l* mouillée avec les voyelles qui „la précèdent, qui ſont *il*, *ail*, *eil*, *ouil*, *euil* (*ueil* & *oeil* ſe prononçant comme *euil*) & l'on voit par ces articulations, auſſi bien que „par les différens exemples que nous venons d'apporter, que l'*l* mouillée eſt toujours exprimée par *il* ou *ill*, & que ces deux ou trois caractères ne doivent être regardés que comme une ſeule conſonne."

„L'*l* n'eſt pas mouillée toutes les fois qu'elle eſt précédée de la „voyelle *i*: car on prononce avec le ſon ordinaire de l'*l* les mots *illuſtre*, *ſubtil*, *ville*, *tranquille* & pluſieurs autres."

„L'*l* n'eſt jamais mouillée au commencement des mots."

L'*l* mouillée, ſelon *Reſtaut*, eſt donc une conſonne différente des dix-huit que l'on compte ordinairement dans la langue françoiſe, & de la catégorie de *ch* & de *gn*. Au lieu d'écrire ces trois lettres avec des caractères particuliers, on a joint enſemble pluſieurs des lettres déjà établies, ſavoir *c* & *h*, *g* & *n*, *i* & *l*, ou *i* & *ll*.

Mais *il* ou *ill* ne ſe prononçant pas toujours comme il ſe prononce p. ex. dans *péril* & *fille*, & ayant auſſi le ſon qu'il a p. ex. dans *ſubtil* & *ville*, il eſt bien ſingulier qu'on n'ait pas ſubſtitué *gli* ou *li* à *il*, ou *ill*, repréſentant l'*l* mouillée; & d'autant plus, comme nous le verrons peut-être en ſon lieu, que l'*l* mouillée exiſte en grande partie dans les mots françois, parce que nombre de ces mots tirent leur

origine de mots italiens où *gli* ſe trouve, ou bien de mots latins où ſe trouve, non pas *il* (encore moins *ill*), mais *li*, remplacé dans l'Italien par *gli;* & d'autant plus encore, que nous ſemblons avoir été prendre notre *ch* au-delà des Alpes. *Nous n'avons point* (dit *Ménage* au mot *bisbille*, qu'il fait venir de l'italien *bisbiglio*) *nous n'avons point de lettre dans notre langue pour repréſenter ce glio des Italiens, et il ſeroit à propos d'inventer pour cela une ſorte d'l.* Cette ſorte d'*l* eſt tout inventée dans notre *l* mouillée, & la preuve en eſt, que les Italiens rendent cette lettre par *gli*, p. ex. dans *bigliardo*, qui, ſelon l'abbé *Alberti*, eſt pris du françois *billard.* J'aurois donc dit à la place de *Ménage: Nous n'avons point dans notre il, ou ill, un caractère propre à exprimer le ſon de l'l mouillée, et il ſeroit à propos de lui ſubſtituer le gli des Italiens* [1]).

Selon *Reſtaut*, quand l'*l* a ce ſon coulant & mouillé qui ſe reconnoît p. ex. dans les mots *travail, ſoleil, orgueil*, elle eſt toujours précédée d'un *i.*

Cette règle eſt en partie vraie, quand l'*i*, qui précède l'*l* mouillée, eſt précédé d'une voyelle ſimple, c'eſt-à-dire (ſelon *Reſtaut*) d'*a* ou d'*e*, ou d'une voyelle compoſée, c'eſt-à-dire (ſelon le même Grammairien) d'*ou* ou d'*eu* (*ue* & *oe* ſe prononçant comme *eu*): elle eſt abſolument fauſſe, quand l'*i*, qui précède l'*l* mouillée, eſt ſeul (comme dit *Reſtaut*) ou n'eſt qu'à la ſuite d'une conſonne. En voici la preuve.

Dans *bail, pareil, fenouil, ſeuil, recueil, oeil*, l'*l* mouillée eſt précédée d'une voyelle, ou ſimple, ou compoſée, & cette voyelle, ou ſimple, ou compoſée, eſt ſuivie d'un *i*, que ſuit l'*l* mouillée *ſimple.*

Dans *bataille, bouteille, dépouille, feuille*, l'*l* mouillée eſt précédée d'une voyelle, ou ſimple, ou compoſée, & cette voyelle, ou ſimple, ou compoſée, eſt ſuivie d'un *i*, que ſuit l'*l* mouillée *double.*

Dans *babil* & *famille* au contraire, dont certainement l'*l* eſt mouillée, cette lettre eſt précédée d'une voyelle ſimple (ſavoir d'*i*) qui (comme s'exprime *Reſtaut*) „eſt ſeule, ou n'eſt qu'à la ſuite d'une

„conſonne" (*b* ou *m*), & que ſuit *immédiatement* l'*l* mouillée *ſimple* ou *double*.

De même dans *Juillet* (dont, ſans contredit, l'*l* eſt auſſi mouillée) en prononçant le mot comme l'abbé *Féraud* le veut [2]), ſavoir *Juigliè*, l'*l* mouillée eſt précédée d'une voyelle compoſée (ſavoir d'*ui*) qui eſt *ſeule*, ou n'eſt qu'*à la ſuite d'une conſonne* (*J*) & que ſuit *immédiatement* l'*l* mouillée *double*.

Voici donc comme, à mon petit jugement, la règle devoit être conçue:

„L'*l* mouillée eſt toujours exprimée par *il* ou *ill* (& ces deux ou „trois caractères ne doivent être regardés que comme une ſeule con„ſonne) lorſque l'*i* eſt précédé d'*a*, ou d'*e*, ou d'*o*, ou d'*u*, ou „d'*eu*, ou d'*ie*, ou d'*oe*, ou d'*ou*, ou d'*ue*, ou d'*ui*. Lorſque l'*i* eſt „ſeul, c'eſt-à-dire qu'il n'eſt qu'à la ſuite d'une conſonne, l'*l* qui le „ſuit *peut* être mouillée ſans être *proprement* précédée d'un *i*."

Exemples. „B*ail*," „bat*aille*," „par*eil*," „bout*eille*," „o*ille*," „j*uillet*," „f*euil*," „f*euille*," „v*ieil*," „v*ieille*," „*oeil*," „fen*ouil*," „an„d*ouille*," „rec*ueil*," „j*uillet*," „bab*il*," „*fille*."

Mais quelle bizarrerie, que non-ſeulement l'*l* puiſſe *n'être pas* mouillée lorſqu'elle eſt précédée de la voyelle *i*, mais qu'encore elle puiſſe *être* mouillée ſans être *proprement* précédée de cette voyelle! Seconde raiſon pour adopter le *gli* des Italiens, ou le *li* des Latins, à l'effet d'exprimer l'*l* mouillée.

Selon *Reſtaut* l'*l* mouillée eſt quelquefois ſuivie d'une autre *l*, auſſi mouillée: mais on n'ajoute cette ſeconde *l* à la première, que pour la lier avec une voyelle ſuivante.

Voilà pour la parole *écrite;* mais quant à la parole *prononcée*, je ne ſens point de différence entre le ſon du maſculin *pareil* & celui du féminin *pareille*. Pour prononcer le *maſculin*, il faut ajouter aux *deux* ſyllabes dont il eſt compoſé, & dont la *ſeconde* eſt terminée par une *l* mouillée, une ſeconde *l* mouillée ſuivie d'un *e* muet, c'eſt-à-dire une *troiſième* ſyllabe prononcée très-brève; & en prononçant le *féminin*

on doit paſſer très-vite ſur la *dernière* des *trois* ſyllabes qui le compoſent; & ſi l'on veut indiquer ſur le papier la prononciation de ces deux *adjectifs*, l'un *masculin*, l'autre *féminin*, on eſt réduit à ſe ſervir de ſignes *communs*. L'abbé *Féraud* marque à la vérité la prononciation de

pareil par *pa-rè-il*,

& celle de

pareille par *pa-rè-glie*; [3])

mais ſi *glie* eſt néceſſaire pour indiquer les *ll* mouillées du *féminin*, je ne vois pas comment *il* exprimeroit l'*l* mouillée du *masculin*.

„La voyelle ſimple qui précède *quelquefois* l'*i* (précurſeur perpétuel de l'*l* mouillée) „ne peut être (dit *Reſtaut*) qu'*a* ou *e*."

J'ajoute *o* pour „*oille*" & „*imbroille* [4])" & quelques mots ſurannés, & *u* pour „*Juillet*" prononcé *Ju-gliè*, & divers autres mots.

„La voyelle compoſée qui précède l'*i*, ne peut être (ajoute *Reſ-*„*taut*) qu'*ou* ou *eu*, *ueil* & *oeil* ſe prononçant comme *euil*."

J'ajoute *ie* pour *vieil* & les mots qui tiennent à *vieil*, & *ui* pour *Juillet* prononcé *Jui-gliè*, & divers autres mots.

„Après les conſonnes *c* & *g*, quand il faut les prononcer avec le „ſon rude, on met (dit *Reſtaut*) *ue* au lieu d'*eu*, comme dans *cer-*„*cueil*, *orgueil*, *cueillir*, *recueillir*, &c., parce que ſi après ces con-„ſonnes on mettoit *eu*, on pourroit prononcer *cerſeuil*, *orjeuil* &c., le „*c* prenant le ſon de l'*s*, & le *g* celui de l'*j* avant l'*e*."

Mais de ce que, pour faire obtenir à *ce* le ſon de *kè*, & non celui de *ſè*, & à *ge* le ſon de *guè*, & non celui de *gè*, il y faut inférer un *u*, il ne s'enſuit pas du tout, à mon avis, que cette lettre inſérée ait, avec la lettre *e*, qu'elle *précède*, le ſon qu'elles auroient eu enſemble, ſi la lettre qui précède *ſuivoit*; ni qu'on ait été prendre *après* *e* l'*u* qu'on a mis *devant*. *U* appartient à *c* ou *g* qui le précède, *e* reſte pour lui; & c'eſt indépendamment de l'*u* qu'il ſuit, & abuſivement, qu'il a le ſon d'*eu*. Cela eſt ſi vrai, que dans *oeil*, où la lettre

e n'eſt ni *précédée*, ni *ſuivie* d'*u*, cette lettre ſe prononce *eu*; & c'eſt ce que j'appelle une prononciation abuſive.

Mais d'où vient-elle cette prononciation?

Elle vient, je penſe, de ce que l'oreille françoiſe s'étant trouvée ennemie du ſon *oil* („oglie") on a ſubſtitué à *o*, tantôt *e*, tantôt *eu* [5]), & transporté la prononciation d'*euil* aux mots où l'orthographe étoit *eil*; & de fait les ſons que donnent *eil* & *euil* ont quelque affinité entre eux. Quant à *oeil*, je le regarde comme un double monſtre: car parce qu'*oil* déplaiſoit à l'oreille, au lieu d'y ſubſtituer *e* ou *eu* à *o*, on y a laiſſé *o*, ajouté *e*, & donné à *oe* le ſon d'*eu*.

Sed haec altioris ſunt indagiñis: ergo revenons à *Reſtaut*.

Il y a, ſelon lui, cinq manières d'articuler l'*l* mouillée avec les voyelles qui la précèdent, qui ſont *il*, *ail*, *eil*, *ouil*, *euil*; *ueil* & *oeil* ſe prononçant comme *euil*.

Mais il eſt encore bien ſingulier qu'*ue* & *oe* puiſſent avoir le ſon d'*eu*, & la preuve en eſt, que, ſelon l'A. *Féraud*, en écrivant *accueil*, p. ex., on eſt induit à prononcer, ou *a-ku-eil*, ou bien *a-keil* (c'eſt-à-dire *a-kè-glie*), *ue* [6]) ne pouvant peindre à l'oeil le ſon de la diphthongue *eu*, & l'*u* n'étant là que pour donner au *c* un ſon fort (celui du *k*), & que M. de *Wailly* écrit „acc*oeu*il" pour rendre l'orthographe conforme à la prononciation. Moi je ne changerois rien à l'orthographe d'*accueil*, de *cercueil*, d'*orgueil* & de *recueil*, mais j'y conformerois la prononciation; ou, ſi celle-ci devoit l'emporter ſur celle-là, j'écrirois, aux déſirs de l'A. *Féraud*, *accueuil*, *cercueuil*, *orgueuil*, *recueuil*. Quant à l'*o*, que M. de *Wailly* voudroit ſubſtituer à l'*u* entre *c* (ou *g*) & *e*, je n'en voudrois pas, & cela par la raiſon que (comme je me flatte de le prouver dans la ſuite de ces recherches) l'*e* ou l'*eu* a remplacé l'*o* dans les mots où M. de *Wailly* voudroit le remontrer. Je l'expulſerois même d'*oeil* par la raiſon que j'ai dite, ſavoir qu'il s'y trouve côte-à-côte de la lettre qu'on lui a ſubſtituée, & par conſéquent en quelque manière deux fois. L'*oe*, ſelon l'A. *Féraud*, eſt un caractère étranger à notre langue, qu'on a banni

de presque tous les mots où un ancien uſage l'avoit placé. Mais ſi ce caractère étoit étranger à notre langue, & ſi, pour cette cauſe, on l'a banni de *presque tous* les mots françois, pourquoi ne pas le bannir de *tous*, en tant que l'étymologie le permettoit, ou qu'ici, comme ailleurs, on vouloit ſe mettre au-deſſus de l'étymologie? Il n'étoit queſtion, pour cet effet (quant aux mots où l'*l* mouillée ſe trouve) que de l'expulſer encore d'*oeil* (& de ſes compoſés) en écrivant *eil* ou *euil*.

Qu'il me ſoit permis de discuter ici particulièrement l'opinion de Monſieur de *Wailly* ſur l'*o*.

De ce qu'on écrit par *oe*, *noeud*, *voeu*, *oeuf*, *coeur*, *choeur*, *moeurs*, *boeuf*, *moeuf*, parce qu'ils viennent du latin *nodus*, *votum*, *ovum*, *cor*, *chorus*, *mores* [7]), *bos*, *modus*, il croit qu'il ſeroit à propos d'écrire *oeuil*, *oeuillade*, *oeuillet*, *coeuillir*, *recoeuillir*, *accoeuillir*, *recoeuil*, *écoeuil* &c., qui viennent d'*oculus*, *colligere*, *collectio*, *ſcopulus* &c.

Avec tout le reſpect que je dois à cet illuſtre Grammairien, je lui répondrai ce qui va ſuivre.

On écrit par *o* (& non par *oe* [8])) *noeud*, *voeu*, *oeuf* &c., parce que cette lettre ſe trouve dans *nodus*, *votum*, *ovum* [9]) &c. Mais on écrit ſans *o*, *feu*, *heure*, *jeu*, *meuble*, *neuf*, *peuple*, *ſeul*, bien que cette lettre ſoit auſſi dans *focus*, *hora*, *jocus*, *mobilis*, *novus*, *novem*, *populus*, *ſolus*. Il y auroit donc *autant* de raiſon d'écrire *euil*, *euillade*, *euillet* &c., qu'*oeuil*, *oeuillade*, *oeuillet* &c. Mais il y auroit encore *plus* de raiſon d'écrire *eil*, *eillade*, *eillet*, ou plutôt *euil*, *euillade*, *euillet*, qu'*oeil*, *oeillade*, *oeillet* [10]). *O* eſt induement dans *oeil* (comme je l'ai déjà dit, & comme je me flatte de le prouver en ſon lieu) *e* y tenant ſa place; & quant à *u*, qui ſeroit dans *euil*, il a tantôt été joint à *e*, ſubſtitué à *o*, tantôt non; & puiſqu'on le fait ſonner dans *oeil*, on devroit auſſi l'y écrire.

Ce que je viens de dire pour *oeil*, *oeillade*, *oeillet*, il faut auſſi le dire pour *écueil*, que M. de *Wailly* fait venir de *ſcopulus*, mais que

je

je dérive de *ſcolium* (fait du Grec σκόλιον) parce que je trouve dans *ſcolium* la raiſon de l'*l* mouillée d'*écueil*, raiſon que je ne ſaurois découvrir dans *ſcopulus*. Il faut encore le dire pour *cueillir*, *recueillir*; *accueillir*, *accueil*, *recueil*, que M. de *Wailly* trouve dans *colligere* & *collectio*, & moi dans *coglière* & autres mots italiens, parce qu'il me faut un motif de l'*l* mouillée, ou ſimple, ou double, qui ſe trouve dans ces cinq mots, ſi je ne veux pas regarder cette *l* comme étant mouillée *induement* [11]).

L'*u*, ai-je dit, a tantôt été joint à l'*e* ſubſtitué à l'*o* dans des mots où l'*l* mouillée ſe trouve, tantôt non. Je n'ai pu jusqu'ici me rendre raiſon du défaut d'uniformité qui exiſte à cet égard: mais que cette variation ſoit arbitraire ou fondée, toujours eſt-il bien bizarre, non-ſeulement que l'orthographe ne s'accorde pas *toujours* avec la prononciation, mais qu'encore de deux mots où l'*e* ſubſtitué à l'*o* ſe trouve ſans l'*u*, & qui ont la même origine, l'un ſe prononce comme ſi l'*u* y étoit, l'autre non. *Gue* a dans *orgueil* le même ſon que *gueu* dans *gueule*, & dans *orgueilleux*, *s'enorgucillir* (j'ajoute *orgueilleuſement*) il ſe prononce comme *gué* [12]). Par cette raiſon M. de *Wailly* voudroit que l'on ajoutât un *u* à l'*e* d'„orgueil."

J'ai dit que dans les mots où l'*e* a pris la place de l'*o*, on lui a tantôt joint un *u*, tantôt non, & qu'il ſemble que l'on devroit écrire l'*u* là où ſon inſertion a lieu dans la parole *prononcée*. Mais a-t-on eu raiſon d'ajouter un *u* à l'*e* ſubſtitut de l'*o*? Il me ſemble que non, & que *cueuillir*, *recueuillir*, *accueuillir*, *accueuil*, *recueuil* (prononcés *keu-glir*, *re-keu-glir*, *a-keu-glir*, *a-keu-glie*, *re-keu-glie*) peinent pour le moins autant à l'organe qui exprime la parole, & à celui qui la reçoit, que *cueillir*, *recueillir*, *accueillir*, *accueil*, *recueil*, (prononcés *kè-glir*, *re-kè-glir*, *a-kè-glir*, *a-kè-glie*, *re-kè-glie*.)

„L'*l* (dit *Reſtaut*) n'eſt jamais mouillée au commencement des „mots [13])." Et puis, allez vous promener: „vous apprendrez les „autres exceptions par l'uſage." Moi je n'aurois pas renvoyé mes lecteurs avec ſi peu de choſe; & non-ſeulement je leur aurois donné

une nomenclature exacte des mots où l'*l* mouillée ſe trouve (la regardant pour le moins comme auſſi néceſſaire que p. ex. celle des adverbes en *ment* où l'*e* qui précède cette ſyllabe n'eſt pas *muet*, mais *fermé*) mais encore j'aurois été jusqu'à éplucher les mots ou l'*l* eſt mouillée *induement*, & ceux où pareille *l* pourroit & même *devroit* être mouillée.

Reſtaut veut que l'*l* mouillée étant quelquefois ſuivie d'une autre *l*, auſſi mouillée, cette ſeconde *l* ne ſoit ajoutée à la première que pour la lier avec une voyelle ſubſéquente.

Si cette ſeconde *l* eſt auſſi mouillée, il ſemble que l'on doive lui donner le ſon de la première, c.-à-d. celui de *gli*. Mais mon *oreille*, comme je l'ai déjà dit, ne me fait ſentir aucune différence entre le ſon du masculin *pareil*, & celui du féminin *pareille*. Ici, comme là, j'entends le ſon *pa-rè-glie*, ni plus, ni moins, & cela doit être: car (comme nous nous en convaincrons peut-être dans la ſuite) le *maſculin*, avant d'être *pareil* a dû être *pareille*, & n'aura éprouvé le retranchement de ſes deux lettres finales, qu'à l'effet de le diſtinguer de ſon *féminin*, au moins ſur le *papier* [14]).

Je crois donc qu'avec *Reſtaut* même il faut regarder les caractères *il* ou *ill* comme une *ſeule* conſonne.

J'ai dit qu'à la place de *Reſtaut* j'aurois livré aux lecteurs de ma Grammaire une nomenclature complete des mots où l'*l* mouillée figure. Cette nomenclature eſt ci-jointe [15]). Je ne ſaurois à la vérité garantir qu'elle ſoit complete: cependant je crois pouvoir me flatter qu'il n'y manque rien d'important, & que tous les termes les plus uſuels y ſont.

Selon *Reſtaut* „il y a cinq manières d'articuler l'*l* mouillée avec „les voyelles qui la précèdent, qui ſont *il*, *ail*, *eil*, *ouil*, *euil*, *ueil* „& *oeil* ſe prononçant comme *euil*." Je penſe que ce Grammairien ſe trompe ici à un double égard. Car outre que je trouve avant l'*l* mouillée, en ſus d'*a*, & d'*e*, & d'*i*, la lettre *o* pour les mots *oille* & *imbroille* [16]), & *u* pour le mot indiquant le 7e mois de l'année pro-

noncé *Ju-glie* [17]), & en ſus d'*eu* & d'*ou*, la diphthongue *ui* pour le même nom de mois articulé *Jui-gliè*, & *ie* pour *vieil* & les mots qui tiennent à *vieil*; on devroit conclure du mot *articuler*, que *Reſtaut* emploie [18]), que l'*l* mouillée ſe *lie* dans la *prononciation* avec la voyelle ſimple ou compoſée qui la précède. Or c'eſt ce dont je ne ſaurois me convaincre; & je trouve plutôt, quelle que ſoit la voyelle que l'*l* mouillée ſuit, que cette *l*, bien loin de former une ſyllabe avec cette voyelle & la conſonne précédente (s'il en précède une) forme une nouvelle ſyllabe avec la voyelle qui la ſuit ſur le papier ou dans la prononciation. Je dis *ſur le papier ou dans la prononciation.* 1° Sur le *papier*, ſi l'*l* mouillée eſt *redoublée* (pour parler avec *Reſtaut*) comme dans *bataille*, *bouteille*, *feuille*, *dépouille*, *oille*, *Juillet* [19]). 2° Dans la *prononciation*, ſi l'*l* mouillée n'eſt pas redoublée, parce qu'alors, comme au premier cas, on entend une ſeconde, troiſième, quatrième ſyllabe, &c., ſelon que le mot eſt monoſſyllabe, diſſyllabe, triſſyllabe, &c. *Bail*, *appareil*, *écureuil*, *fenouil*, *oeil*, ſonnent comme s'ils étoient écrits *baille*, *appareille*, *écureuille*, *fenouille*, *oeille*; & peut-être ferai-je voir dans la ſuite qu'ils ont dû originairement être écrits de la ſorte.

Ce qui paroît avoir induit *Reſtaut* en erreur, c'eſt le cas où l'*l* mouillée eſt précédée de la voyelle *i*. Mais ce cas, comme je l'ai établi ci-deſſus, eſt une exception à la règle établie par ce Grammairien, & portant que l'*l* mouillée eſt *toujours* précédée d'un *i*. Dans ce cas, qui, à la vérité, eſt unique, mais qui pour cela n'en eſt pas moins bizarre, on mouille l'*l*, ſans qu'un *i* vous ait dit „mouillez l'*l* „qui va me ſuivre" guidé, ſoit par la connoiſſance que l'on a de l'étymologie du mot dont il s'agit, ſoit par l'avertiſſement que le maître a donné. Ainſi on ne mouille pas l'*l* dans *fil*, ni dans *ville*, & on la mouille dans *cil* & dans *fille*, ou bien à cauſe de l'*autos epha*, ou bien parce qu'en bon Étymologiſte on ſait que *fil* & *ville* viennent de *filum* & de *villa*, & *cil* & *fille* de *cilium* & de *filia*.

Pour faire disparoître cette bizarrerie, il faudroit mettre deux *ii* dans les mots où l'*l* mouillée ſe trouve après cette voyelle, ſavoir l'un pour exprimer la troiſième des voyelles qui précèdent toujours l'*l* mouillée, & l'autre pour avertir que l'*l* qui va ſuivre doit être mouillée.

Au lieu donc de dire comme *Reſtaut:* „Il y a cinq manières „d'*articuler* l'*l* mouillée avec les voyelles qui la précèdent &c.," je crois que j'aurois dit: „Les voyelles qui *précèdent* l'*l* mouillée ſont *a*, *e*, *i*, *eu*, *ou*, &c.

Reſtaut ne dit pas quelles ſont les *voyelles* qui *ſuivent* l'*l* mouillée; & cependant cette indication ſembloit plus néceſſaire que celle des voyelles qui *précèdent* cette lettre, puiſque c'eſt vraiment avec les voyelles qui la ſuivent qu'elle s'*articule* [20]).

Recherches faites, je trouve que les voyelles ſubſéquentes de l'*l* mouillée, ce ſont les cinq voyelles *ſimples* de l'alphabet (en y comprenant les *trois* ſortes d'*e*) ſoit *ſeules*, ſoit *ſuivies* d'une ou de pluſieurs *conſonnes* (prononcées ou *non* prononcées) & les voyelles *compoſées au*, *eau*, *eu*, *oi*, *ou*, ſoit *ſeules*, ſoit *ſuivies* d'une *conſonne.*

Les conſonnes qui ſuivent ces voyelles ſimples ou compoſées ſont *c*, *d*, *l*, *m*, *n*, *ns*, *nt*, *r*, *rd*, *rs*, *rt*, *ſ*, *t*, *ts*, *x*, & ces conſonnes & voyelles ſe combinent ainſi: *ac*, *am*, *an*, *ant*, *ar*, *ard*, *art*, *as*, *at*, *er*, *es*, *et*, *ir*, *is*, *on*, *ons*, *ot*, *ots*, *aud*, *aut*, *eul*, *eur*, *eurs*, *eux*, *oir*, *ois.*

Exemples:

„ta*ill*able,"	„bienvei*ll*ance,"	„brai*ll*arde,"
„vei*ll*aque,"	„feu*ill*antine,"	„pai*ll*ard,"
„feu*ill*age,"	„caſti*ll*an,"	„naſi*ll*arde,"
„gri*ll*ade,"	„grou*ill*ante,"	„feu*ill*ard,"
„oei*ll*ade,"	„fai*ll*ant,"	„vei*ill*ard,"
„barbou*ill*age,"	„ſurvei*ll*ant,"	„égri*ll*ard,"
„ti*ll*ac,"	„feu*ill*ant,"	„ſou*ill*ard,"
„vai*ll*amment,"	„bri*ll*ant,"	„cou*ill*art,"
„défai*ll*ance,"	„bou*ill*ant,"	„pai*ll*aſſe,"

„ aurillas,"
„ escarbillat,"
„ Guillaume,"
„ antiquaille,"
„ vermeille,"
„ feuille,"
„ vieille,"
„ apoſtille,
„ oeilleton,"
„ oille,
„ andouille,"
„ braillé,"
„ appareillé,"
„ défeuillé,"
„ bouzillé,"
„ chatouillé,"
„ crémaillére,"
„ oeillére,"
„ railler,"
„ appareiller,"
„ effeuiller,"
„ bourſiller,"
„ bredouiller,"
„ vieilleſſe,"
„ gentilleſſe,"
„ courcaillet,"
„ oreillette,
„ feuillet,"
„ barillet,"
„ oeillet,"
„ graſſouillet,"
„ Juillet,"
„ piailleuſe,"
„ appareilleuſe,"
„ grappilleuſe,"
„ bailleul,"
„ filleul,"
„ brailleur,"
„ ailleurs,"
„ teilleur,"
„ bouſilleur,"
„ bredouilleur,"
„ pailleux,"
„ merveilleux,"
„ crouſtilleux,"
„ pouilleux,"
„ bailli,"
„ envieilli,"
„ bouilli,"
„ treſſaillir,"
„ cueillir,"
„ vieillir,"
„ bouillir,"
„ chamaillis,"
„ margouillis,"
„ paillo,"
„ guilloché,"
„ failloiſe,"
„ Marſeilloiſe,"
„ brandilloire,"
„ bouilloire,"
„ tailloir,"
„ cueilloir,"
„ égrilloir,"
„ agenouilloir,"
„ Marſeillois,"
„ réveillon,"
„ négrillon,"
„ avillons,"
„ ſouillons,"
„ parpaillot,"
„ vieillot,"
„ chevillots,"
„ caillou,"
„ émaillure,"
„ feuillure,"
„ chevillure,"
„ ſouillure,"
„ millaud,"
„ couillaut."

Je trouve encore que les mots qui contiennent l'*l* mouillée, ſimple ou double, ont 287 terminaiſons différentes [21]), ſavoir, 77 où l'*l* mouillée eſt précédée d'*a*, 38 où cette lettre eſt précédée d'*e*, 23 où elle eſt précédée d'*eu*, 10 où elle eſt précédée d'*ie*, 85 où elle eſt

précédée d'*i*, 8 où elle eſt précédée d'*oe*, 5 où elle eſt précédée d'*o*, 37 où elle eſt précédée d'*ou*, 4 où elle eſt précédée d'*u* ou d'*ui*.

Voici ces 287 terminaiſons différentes, que j'ai trouvées jusqu'ici dans plus de 1250 mots:

1. *Ail.*
2. *aillable.*
3. *aillac.*
4. *aillacoſſe.*
5. *aillade.*
6. *ailladé.*
7. *aillader.*
8. *aillage.*
9. *aillamment.*
10. *aillance.*
11. *aillanderie.*
12. *aillandier.*
13. *aillant.*
14. *aillante.*
15. *aillantiſe.*
16. *aillard.*
17. *aillarde.*
18. *aillardelettes.*
19. *aillardement.*
20. *aillarder.*
21. *aillardet.*
22. *aillardir.*
23. *aillardiſe.*
24. *aillasse.*
25. *aillasson.*
26. *aille.*
27. *aillé.*
28. *aillebotte.*
29. *aillebotteux.*
30. *aille-bottis.*
31. *aillebourg.*
32. *aillement.*
33. *ailler.*
34. *aillère.*
35. *aillereſſe.*
36. *aillerie.*
37. *ailles.*
38. *aillet.*
39. *ailletage.*
40. *ailleteau.*
41. *ailleter.*
42. *ailleton.*
43. *ailletot.*
44. *aillette.*
45. *ailleul.*
46. *ailleur.*
47. *ailleurs.*
48. *ailleuſe.*
49. *ailleux.*
50. *aillezais.*
51. *ailli.*
52. *aillibilité.*
53. *aillible.*
54. *aillib*lement.
55. *aillicoque.*
56. *aillie.*
57. *aillir.*
58. *aillis.*
59. *aillissement.*
60. *aillis*te.
61. *aillite.*
62. *aillivage.*
63. *aillive.*
64. *aillo.*
65. *ailloche.*
66. *ailloir.*
67. *ailloiſe.*
68. *aillon.*
69. *aillonner.*
70. *ailloque.*
71. *aillot.*
72. *aillottement.*
73. *aillotter.*
74. *aillou.*
75. *aillou*tage.
76. *aillouteux.*
77. *aillure.*
78. *Eil.*
79. *eillable.*
80. *eillage.*
81. *eillan.*
82. *eillance.*
83. *eillant.*
84. *eillaque.*

85. eillard.
86. eillarde.
87. eille.
88. eillé.
89. eilleau.
90. eillède.
91. eillée.
92. eillement.
93. eiller.
94. eillère.
95. eilleret.
96. eillet.
97. eillette.
98. eilleur.
99. eilleure.
100. eilleuſe.
101. eilleuſement.
102. eilleux.
103. eilli.
104. eillie.
105. eillir.
106. eillis.
107. eillisser.
108. eilloir.
109. eillois.
110. eilloiſe.
111. eillole.
112. eillon.
113. eillons.
114. eillote.
115. eillure.
116. euil.
117. euillage.
118. euillant.
119. euillantine.
120. euillard.
121. euille.
122. euillé.
123. euillée.
124. euillement.
125. euiller.
126. euilleret.
127. euilles.
128. euillet.
129. euilletage.
130. euilleté.
131. euilletée.
132. euilleter.
133. euillette.
134. euilli.
135. euillir.
136. euillu.
137. euillue.
138. euillure.
139. Ieil.
140. ieillard.
141. ieille.
142. ieillerie
143. ieilleſſe.
144. ieilli.
145. ieillie.
146. ieillir.
147. ieillot.
148. ieillotte.
149. il.
150. ils.
251. illa.
152. illac.
153. illade.
154. illage
155. illan.
156. illant.
157. illante.
158. illanter.
159. illaquer.
160. illar.
161. illard.
162. illarde.
163. illardement.
164. illarder.
165. illardiſe.
166. illas.
167. illat.
168. illâtre.
169. illau.
170. illaud.
171. illaume.
172. ille.
173. illé.
174. illebarrer.
175. illebaude.
176. illebeuf.
177. illedin.
178. illedou.
179. illée.
180. illement.

181. illemet.
182. illemette.
183. illemot.
184. illenai.
185. iller.
186. illerée.
187. illeret.
188. illerette.
189. illeri.
190. illerie.
191. illerine.
192. illerole.
193. illeron.
194. illes.
195. illeſſe.
196. illet.
197. illeté.
198. illetée.
199. illeter.
200. illette.
201. illetter.
202. illettier.
203. illeveſée.
204. illeul.
205. illeule.
206. illeur.
207. illeuſe.
208. illeuſement.
209. illeux.
210. illi.
211. illoché.
212. illochée.
213. illocher.
214. illochis.
215. illoir.
216. illoire.
217. illon.
218. illonnage.
219. illonne.
220. illonné.
221. illonnée.
222. illonner.
223. illonnerie.
224. illonneur.
225. illons.
226. illot.
227. illotage.
228. illote.
229. illoter.
230. illotine.
231. illotiner.
232. illots.
233. illure.
234. Oeil.
235. oeillade.
236. oeillader.
237. oeillère.
238. oeillet.
239. oeilléterie.
240. oeilleton.
241. oeilletonner.
242. oil.
243. oille.
244. oillé.
245. oillée.
246. oiller.
247. ouil.
248. ouillac.
249. ouillage.
250. ouillamini.
251. ouillant.
252. ouillante.
253. ouillard.
254. ouillarder.
255. ouillart.
256. ouillaut.
257. ouille.
258. ouillé.
259. ouillée.
260. ouillement.
261. ouiller.
262. ouillère.
263. ouillerie.
264. ouillet.
265. ouillette.
266. ouillettement.
267. ouilletterie.
268. ouilleur.
269. ouilleuſe.
270. ouilleux.
271. ouilli.
272. ouillie.
273. ouillir.
274. ouillis.
275. ouillitoire.
276. ouilloir.

277.

277. *ouilloire.*
278. *ouillon.*
279. *ouillonnement.*
280. *ouillonner.*
281. *ouillons.*
282. *ouillouſe.*
283. *ouillure.*
284. *uille.*
285. *uilles.*
286. *uillet.* *uillet.*
287. *uilly.*

J'ai dit que je comptois 38 terminaiſons de mots françois où l'*l* mouillée eſt précédée d'*e*. J'aurois pu ajouter *ou d'ue*. Mais comme l'*u* n'eſt dans ces mots qu'afin que le *c* qui précède l'*e* ne ſe prononce pas *s*, ou que le *g* n'ait pas *devant e* le ſon de *s*, j'ai cru pouvoir joindre les mots où l'*ue* ſe trouve, aux mots qui renferment l'*e*. J'aurois pu confondre auſſi avec les mots où l'*eu* ſe trouve ceux où l'*e* eſt précédé d'*o*, puisque dans ces mots *oe* ſe prononce comme *eu*.

J'ai dit encore que je comptois 85 terminaiſons différentes de mots où l'*l* mouillée a l'*i* pour précurſeur: c'eſt-à-dire qu'il y a 85 ſortes de mots où l'*l* ſe mouille ſans qu'un *i* ait donné l'avertiſſement de la mouiller, lorsqu'il exiſte ſeulement 77 ſortes de mots où l'*a* précède l'*i* ſuivi de l'*l* mouillée, 38 ſeulement où l'*e* précède ces *deux* lettres, 37 ſeulement où l'*ou* les précède, 23 ſeulement où l'*eu* les précède, 10 ſeulement où l'*ie* les précède, 8 ſeulement où l'*oe* les précède, 5 ſeulement où l'*o* les précède, 4 ſeulement où l'*u* les précède. Quelle bizarrerie, peut-on s'écrier, que l'*i* devant être la marque de l'*l* mouillée, on le trouve à dire dans le plus grand nombre des mots où l'*l* doit ſe mouiller! Je dis *dans le plus grand nombre des mots*: car pour 5 mots où l'*l* mouillée, précédée d'*i*, ſuit *u* ou *ui*, pour 11 mots où cette lettre, précédée d'*i*, ſuit *o*, pour *autant* de mots où cette même lettre, précédée de même, ſuit *oe*, pour 12 mots où, avec ſon précurſeur, elle ſuit *ie*, pour 63 mots où elle ſuit *eu*, pour 130 mots où elle ſuit *e*, pour 172 mots où elle ſuit *ou*, pour 405 mots où elle ſuit *a*, j'en trouve, *ſauf erreur*, 521 où l'*l* ſe mouille ſans qu'elle ſoit proprement précédée de l'*i*. Je dis *proprement*, parce qu'à la vérité l'*i* précède dans ces mots l'*l* qui doit ſe mouiller, mais appartient à la conſonne précédente, avec laquelle elle forme une ſyllabe.

C'eſt, je penſe, l'étymologie qui motive la préſence de l'*l* mouillée dans les mots qui la renferment. C'eſt donc dans l'étymologie que j'ai été chercher la raiſon de cette *l*, & après avoir cherché je crois m'être aſſuré

1°. que cette lettre eſt quelquefois de contrebande dans les mots où l'on en met une [22]);

1°. que par contre elle manque dans d'autres mots, où l'on rend par des lettres différentes d'*il* ou *ill* le ſon que ces deux ou trois lettres doivent exprimer.

Pour convaincre l'Académie de la vérité de ces deux propoſitions, j'ai deſſein d'examiner avec elle l'étymologie de paſſé 1300 mots, ſi *le jour du jugement* ne *nous prend* pas trop tôt *au collet* [23]), comme dit le *Philoſophe Périgourdin;* & cet examen fait & parfait, peut-être que nous ſerons à même d'en tirer quelques réſultats généraux: c'eſt tout ce qu'on peut prétendre, je crois, en matière d'étymologies.

Je reviens pour un moment à ma première propoſition. J'ai dit que l'*l* mouillée manque dans beaucoup de mots où elle pourroit & devroit être. Si cette propoſition ſe trouve vraie, elle fournit un nouvel argument contre la manière de repréſenter l'*l* mouillée: car ſi cette lettre *peut* ſe déſigner autrement que par *il* ou *ill*, rien n'empêcheroit qu'on n'employât *uniformément* des ſignes différens d'*il* ou *ill*, ces derniers s'employant quelquefois à marquer une prononciation différente de celle de l'*l* mouillée.

Avant de terminer ce Mémoire, je crois devoir prévenir une objection qu'on peut me faire, je le ſens. „Quoi," me dira-t-on, „quoi, „après vous être annoncé, quant à vos connoiſſances étymologiques, „avec la modeſtie qui vous convient à cet égard, comme à tant d'au„tres; après avoir, à la ſuite de tant d'autres, rendu à l'un de nos „Confrères la juſtice qui lui revient, entreprendre de joûter avec cet „illuſtre dans une carrière où les *Caſeneuve*, les *Huet*, les *Ménage* ont

„ſi ſouvent ſaigné du nez...." *Que vous dirai-je, Meſſieurs*, (répondrai-je avec mon bon *Prémontval*) *que vous dirai-je? L'eſprit a ſoufflé; et toujours attentif à ſon ſouffle, je ne puis que m'y laiſſer emporter* [24]). Je ſens toute la difficulté de mon entrepriſe; je ſens encore qu'elle eût été mieux aux mains de celui que l'on me montre à la hauteur où j'aime à le voir placé: mais ſans prétendre lui *tenir* jamais *palot* [25]), (comme dit encore mon ami *Montaigne*) peut-être que je pourrai me dire un jour, dans le plus ſecret de mon amour-propre: *Anch'io ſon Etimologiſta.* Si cela m'arrive, *ſublimi feriam ſidera vertice.*

NOTES.

1) Ayant, depuis que ce Mémoire eſt écrit, creuſé plus profondément dans la matière que j'y traite, il m'a paru qu'*lh* indiqueroit au mieux dans *tous* les cas l'*l* qu'on appelle *mouillée*. Et cet *lh* ne feroit pas un caractère nouveau dans la langue, car on trouve

„Maſſi*ll*argues," „Mi*ll*aud," „Vari*ll*es,"

écrits auſſi

„Maſſi*lh*argues," „Mi*lh*aud," „Va*rilh*es;"

& cette dernière orthographe indique mieux la prononciation que la première. Si l'on écrit „Maſſi*li*argues" on ne ſait pas ſi l'on doit prononcer le mot en *cinq* ſyllabes, ou s'il doit n'en avoir que *quatre*; & ſi l'on écrit „Maſſi*ll*argues" on ignore ſi les *ll* ſont *mouillées* ou non. La même ignorance peut avoir lieu au *ſecond* chef pour „Mi*ll*aud" & „Vari*ll*es."

Dans „Mi*lh*an" (qui eſt l'un des mots françois formés d'„Æmi*li*anus") on ne trouve pas la difficulté que peuvent offrir „Emi*li*on" & „Mi*ll*on" autres noms françois de ce Saint.

Le nom de *Maillart* (non pas celui du burleſque orateur du 16e ſiècle, dont une muſe gaillarde a dit qu'il étoit *occupé à rebâtir Sodome*, mais celui du vénérable évêque de Chartres, qui ſouſcrivit au troiſième concile de Châlons en compagnie de 38 autres évêques, 6 députés d'abſens, 6 abbés & un archidiacre) *Maillart*, dis-je, n'eſt, à ce que j'imagine, un mot à *ll* mouillées, que parce qu'après la ſuppreſſion de l'*e* de „Malehardus," *l* & *h* ſe ſont touchés. Je ſais que l'on trouve *Malardus* dans *Trévoux*, & que, ſelon les ſavans qui ont travaillé ſous ce nom de ville, l'uſage a changé le mot de *Malard*, dont quelques-uns ſe ſervent, en celui de *Maillard*, dont les *ll* ſe mouillent, & dont l'*a* eſt long: mais outre qu'il faudroit admettre, en ſus du changement des *ll* ſimples en *ll* mouillées, la réduplication de l'*l* de *Malardus*, pour avoir *Mallard* entre *Malard* & *Maillard*, je trouve *Malehardus* dans le *Vocabulaire hagiologique*, & mon *inſtinct étymologique* me porte vers l'opinion ſelon laquelle les *ll* mouillées de *Maillard* viennent de l'*l* & de l'*h* de *Malehardus*, & non d'une *double* corruption de *Malard*.

Du reſte, ſi mon inſtinct m'a bien mené, on voit qu'*lh*, comme marque des *ll* mouillées, bien loin d'être étranger dans la langue, y peut avoir un degré paſſable d'antiquité; & ſi cet *lh* étoit adopté, l'*h* qui s'y trouve pourroit avoir un ſecond uſage, ſavoir celui d'indiquer le *g* lorſqu'il doit avoir un ſon différent de celui de l'*j*.

En attendant ſon adoption, ce caractère marque la prononciation de l'*l* mouillée dans un *Dictionnaire de prononciation* dont je m'occupe, & pour lequel j'ai déjà recueill.

plus de 45000 mots, c'eſt-à-dire bien au-delà de ce que contient le *Nouveau Dictionnaire portatif de la langue françoiſe.*

A propos de ce caractère *lh*, je dirai que ceux qui écrivent *Montlheri* ont tort: il faut écrire *Mont'héri.* En admettant que ce mot a été fait avant le 12e ſiècle, il vient de *Mons-Letherici*, dont, après ſuppreſſion du *t*, l'*h* a été converti d'*h* aſpiré en *h* ſimple, ce qui a donné lieu à un hiatus & de ſupprimer l'*e* de *le. Lethericus*, ou *Letherici*, *Léthérique*, *Léthéric*, *Léthéri*, *Léhéri*, *Lehéri* (prononcé d'abord „Le-*hé*-ri" puis „Le-*é*-ri") *L'héri.*

Les changemens qui ont eu lieu dans *Avoutire* (voyez ci-deſſous) & *Mont'héri*, ſavoir dans le premier mot par le convertiſſement d'*erium* ou *erii* en *ire*, & dans le ſecond par la ſuppreſſion du *t* de *the*, ont eu lieu auſſi reſpectivement dans *Léhire*, fait d'*Eleutherius* (où *erius* a été changé en *ire* avec ſuppreſſion du *t* de *therius*) dans *Echire*, fait d'*Eucherius*, dans *Frenir*, fait de *Fermerius*, dans *Madir* & *Madire*, faits d'*Emeterius* &c. &c.

Et pour finir ſur *lh*, j'ajouterai que j'ai connu un deſcendant de réfugiés françois, dont le nom de famille, écrit *Fillies*, ſe prononçoit *Fi-lie.*

[2]) C'eſt-à-dire dans ſon *Dictionnaire grammatical*, car dans ſon *Dictionnaire critique* il veut le contraire. Le citoyen *Gattel* eſt pour *Ju-gliè;* moi je ſuis pour *Jui-gliè*, parce que je tiens que l'*i* a été inféré dans ce mot, fait de *Julius* par diminution, comme il l'a été dans *Juin*, venu de *Junius*, & dont on a fait auſſi *Juignet* par diminution.

Parce que la prononciation *Ju-gliè* ne peut ſe fonder que ſur la circonſtance qu'on a pris l'*i* de *Juillet* pour la lettre qui précède toujours l'*l* mouillée, mes lecteurs prendront peut-être du ſoupçon au ſujet de *cuiller*, que l'uſage veut que l'on prononce *ku-glière*, & s'attendront que je détruirai ce ſoupçon, ou que je le tournerai en certitude. Si telle devoit être leur attente, je ne voudrois pas qu'elle fût déçue. Ainſi voyons ce qui en eſt de l'orthographe & de la prononciation de *cuiller.*

„Il n'y a pas de mot qui ait été écrit de plus de manières différentes." *Dictionnaire critique.*

Je le crois bien: on l'a eu auſſi fréquemment *à la bouche*, que l'uſtenſile dont il eſt l'indicateur.

„*Cuiller*, *Cuillier*, *Cuillère*, *Cuillière*, *Culière*, & même *Cueiller* ou *Cueillère.* „Cette „dernière orthographe & la prononciation qu'elle indique ſemblerait plus conſor„me à l'étymologie & au ſens du mot, qui vient de *cueillir*, & qui en eſt l'inſtru„ment. ....." *Idem.*

Mon avis eſt, que ſi *cuiller* vient de *cueillir*, on devroit l'écrire, non pas *cueiller*, ni même *cueillère*, pas même encore *cueillier*, mais *cueillière.*

1) Pas *cueiller*, ni même *cueillier*, parce que ce ne ſeroit pas la peine de mutiler l'orthographe pour un ſeul mot au mépris du *genre* de ce mot & de ſa *prononciation*; (*cueiller* ou *cueillier* ſeroit le ſeul mot en *ier* qui auroit le genre *féminin.*)

2) Pas *cueillère*, mais *cueillière*, parce que les terminaiſons françoiſes *ier* & *ière* répondent *régulièrement* aux terminaiſons latines *arius*, *aria*, *arium*, qui, comme *ier* & *ière*, indiquent *en partie* des *inſtrumens*, des *uſtenſiles*, & qui, *pour l'ordinaire*, ont formé *ier* & *ière.*

Ce que je viens de dire pour *cueiller* & *cueillier*, & pour *cueillère* & *cueillière*, doit valoir auſſi pour *cuiller* & *cuillier* d'une, & pour *cuillère* d'autre part.

Voilà pour le cas où *cueillir* a donné *cuiller*. Mais ſi *cuiller* vient de *cochlearium*, la choſe eſt différente, & l'on peut encore mettre en queſtion l'orthographe du mot en queſtion.

Or que *cuiller* vienne de *cochlearium*, plutôt que de *cueillir*, c'eſt ce que je crois, fondé

1) Sur ce qu'on a appelé *Cochlearia* l'herbe autrement nommée *Herbe aux cuillers*;

2) Sur ce que, pour *deux* orthographes (*cueiller* & *cueillère*) où ſe trouve l'*e* de *cueillir*, il y en a *cinq* (*cuiller*, *cuillère*, *cuillier*, *cuillière*, *culère*,) où cet *e* ne ſe trouve pas;

3) Sur ce que, pour avoir orthographié
cueiller, & *cueillère*,
comme
cuiller, *cuillère*, *cuillier*, *cuillière* & *culière*,
il ne paroit pas que l'on ait jamais prononcé l'*e* de *cueiller*, ou *cueillère*, la différence de la prononciation s'étant bornée à celle de l'*i*, dont on a tantôt fait une diphthongue avec l'*u* antécédent, & que tantôt on a traité en précurſeur de l'*l* mouillée;

4) Sur ce qu'il eſt pour le moins auſſi apparent que notre uſtenſile de table tient ſa dénomination de ſa *forme*, qu'il l'eſt que ſon *uſage* l'a dénommé.

Mais on me demande quel mot françois *cochlearium* a donné. Celui de *culière*.

„Cochlearium," „Cochléarie," „Cochléare,"
„Cochléaire," „Cochlaire," „Colaire,"
„Coleire," „Colière," „Culière."

En prononçant ce dernier mot, formé très-analogiquement, on a la prononciation actuelle de *cuiller*, & par conſéquent je crois que l'on peut dire que cette *prononciation* eſt fondée, ſi l'*orthographe* ne l'étoit pas. Et elle l'eſt, dès que l'on veut paſſer la ſuppreſſion de l'*e* final & le changement de *li*, ſuivi d'une *voyelle*, en *ill*, changement qui produit l'*l* mouillée. („Culière," „Cuillère," „Cuiller.") Mais l'*i* de *Culière* n'étant pas dans le *Latin*, & provenant ici du *renverſement* d'*ei*, ſubſtitué à *ai*, formé par l'addition de l'*i* à l'*a* de *Cochlearium*, il ſeroit plus régulier d'écrire *Culière*, que *Cuillère*.

Si l'on vouloit admettre qu'après avoir changé l'*o* de *Cochlearium* en *u*, on y a ajouté un *i*, pour faire de ces *deux* lettres une *diphthongue*, le mot ſeroit *Cuilière*, qu'on auroit tort de changer en *Cuillère*, ou *Cuiller*, puiſque de ce changement réſulteroit, comme dans *Juillet*, l'incertitude de la prononciation. Mais pour 18 noms de Saints où l'*o* latin eſt devenu *u*, je n'en ai que 4 où la diphthongue *ui* réſulte de cette même lettre.

„*Si melius quid habes, accerſe, vel imperium fer.*"

3) Voici comme il indique la prononciation des mots en *eil* que mon Répertoire me fournit.

1) Dans le *Dictionnaire critique*:

„Accueil," („A-keuil,")
„Appareil," („A-pareil,")
„Cercueil," („Cér-keuil,")
„Conſeil," („Kon-ſeil,")
„Écueil," („É-keuil,")
„Éveil," („É-veil,")
„Méteil," (. . . . .)
„Nompareil," („Non-pareil,")
„Orteil," („Orteil,")
„Pareil," („Pareil,")
„Recueil," („Re-keuil,")
„Réveil," („Ré-veil,")
„Soleil," („So-leil,")
„Sommeil," („So-meil,")
„Vermeil," („Ver-meil,")
„Vieil," (. . . .)

2) Dans le *Dictionnaire grammatical*:

„Accueil," (. . . . .)
„Appareil," („Apa-reil,")
„Cercueil," (. . . . .)
„Conſeil," („Kon-ſeil,")
„Écueil," („É-keuil,")
„Éveil," („Évé-*glie*,")
(„Éveille, au lieu d'„Éveil,")
„Méteil," (. . . .)
„Nompareil," („Non-pareil,")
„Orteil," („Or-teil,")
„Pareil," („Pa-reil,")
„Recueil," („Re-keuil,")
„Réveil," („Ré-veil,")
„Soleil," („So-leil,")
„Sommeil," („So-meil,")
„Vermeil," („Ver-meil,")
„Vieil," (Vieil.")

Voilà bien de la variation. Et l'on ne ſauroit *guère* mettre celle-ci ſur le compte des imprimeurs, puisque les Dictionnaires *grammatical* & *critique* s'accordent ſur la manière de déſigner la prononciation de

„Nompareille," („Nonparè-*glie*,")
„Pareille," („Parè-*glie*,")
„Vermeille," („Vermè-*glie*.")

Le citoyen *Gattel* marque la prononciation de l'*l* mouillée dans les mots en *eil* au moyen d'*il* pour

„Accueil," „Cercueil," „Ecueil,"

& de *glie* pour

„Appareil," „Conſeil," „Éveil," „Nompareil,"
„Orteil," „Pareil," „Réveil," „Sommeil."

Pour

„Méteil," „Soleil," „Vermeil," „Vieil,"

il ſe borne à donner l'avertiſſement de *mouiller l'l*; & pour

„Recueil,"

il indique la prononciation ainſi:

„Re-keu-glie."

Moi j'aurois indiqué *uniformément* la prononciation de ces *ſeize* mots, quant à l'*l* mouillée, au moyen de *gli*, en avertiſſant de prononcer comme *eu* l'*e* qui, dans „accueil," „cercueil," „écueil," „recueil," précède l'*l* mouillée, & comme *è* dans „appareil," „conſeil," „éveil," &c.

4) Et, ſi vous voulez, *bonne-voglie*, qui devroit s'écrire *bonne-voille*, puiſqu'*imbroille* ne s'écrit pas *imbroglie*.

5) Et en écrivant *oeil*, on peut être induit à prononcer *oa-lie*.

6) Peut-être auſſi qu'*e* a remplacé *eu*; & c'eſt aſſez mon avis, parce qu'*e* a quelquefois *encore* le *ſon* d'*eu*.

7) *Moeurs* ne vient de *mores* qu'en tant que *mores* eſt le pluriel de *mos*, qui, par *mor* . . ., renfermé dans le *génitif*, *datif* &c., a fait *more*, *mor*, *meur*, *moeur*, auquel on a ajouté l'*s* marque du pluriel. *Mores* eût fait *moeures*, ou l'on eût conſervé *mores*, comme on a fait *flores*. Celui-ci a gardé la prononciation latine („flo-rè-ſe") & *laudes* ſe prononce *lô-de*.

8) L'*e* appartient à l'*u* qui le *ſuit*, & non à l'*o* qui le *précède*.

9) Encore trouve-t-on

neud comme *noeud*, & *eus*
& *veu* - - *voeud* & *voeu*, *euſes* } pour *oeufs*,
& *beuf* - - *boeuf*, *eüves* }
& *meurs* - - *moeurs*, & *eulx* } pour le pluriel d'*oeil*,
& *cueur* - - *coeur*, *eus* }
& *ſeur* - - *ſoeur*, *eus* }
& *Quillebeuf* - *Quilleboeuf*, & *eivre* pour *oeuvre*,
& *Feurs* - - *Foeurs*, & *euvrer* - - *oeuvrer*,
& *foeu* - - *feu*,
& *Joeudi* - - *Jeudi*,

& *beuiller* n'a pas d'*o*, non plus qu'*aveugle*, *aveuglé*, *aveuglée*, *aveuglement*, *aveuglément*, *aveugler*. Cependant ces ſept derniers mots (& *beſicle* & *bigle*) viennent d'*oculus* comme *oeil*, & celui-ci a du être *eugle* & n'eſt devenu ce qu'il eſt que parce que *gl*, au lieu d'être prononcé *ghe-le*, comme il l'eſt dans *aveugle* &c., a été prononcé *glie* ou *lie*.

Eu étant donc dans les mots qui participent à l'origine d'*oeil*, & celui-ci ſe prononçant comme s'il étoit écrit *euil*, il y auroit un double motif de l'écrire de la dernière façon.

Ce

Ce qui prouve qu'*o* ne devroit pas être dans les mots où il fait ſociété à *eu* qui le repréſente, c'eſt le mot *mours*, ancien ſynonyme de *moeurs*.

„Por remembrer des anceſſours
„Les fez, & les diz & les mours,
„Doit-on les livres & les geſtez,
„Et les eſtoires lire as feſtes."

(„Pour remettre en mémoire les faits, les dits & les moeurs des ancêtres,
„on doit lire aux jours de fête les livres, les geſtes & les hiſtoires.")

Or l'*o* latin a tantôt été remplacé par *eu*, tantôt par *ou*, & s'il ne s'eſt pas fait revoir dans les mots qui ont reçu *ou* à ſa place, il doit auſſi peu ſe remontrer dans ceux où *eu* lui a ſuccédé.

Si l'on me dit que *moours* pourroit ſe prononcer *mo-ours*, je répondrai que celui qui ignore qu'*o* ne ſonne pas dans *oeil*, peut auſſi être tenté de prononcer ce mot *o-eil*.

Obſervez en paſſant le mot *voeud*: il tient le milieu entre *voeut*, que *votum* a dû former, & notre *voeu*.

Du reſte *oeil* n'eſt pas le ſeul mot où la même lettre paroiſſe deux fois. Dans *Bivouac*, que je ſais venir de l'Allemand *Beywacht*, l'*ou*, qui eſt fait du *w* (comme dans *Gouache*) n'a pas expulſé le *w*. Je ſais que l'on écrit auſſi *Bivac*, & qu'on prononce plus communément le mot ſelon la dernière orthographe que ſelon la première; mais ce ſeroit une raiſon pour conformer auſſi l'orthographe d'*oeil* à ſa prononciation, en l'écrivant *euil*, ou du moins pour écrire en concurrence *oeil* & *euil*. Ceux qui ne font pas pour les êtres ſuperflus, n'auront pas de peine à ſe décider entre les deux alternatives.

A propos d'*ou*, formé de la conſonne allemande *w*, j'obſerve que comme dans *Bivouac* il ſert à former (ſelon le citoyen *Gattel*) la diphthongue *oua* (ſelon l'A. *Féraud* *oua* eſt diſſyllabe) de même dans *Colioure*, où il vient du *b* de *Caucoliberis*, il entre, ſelon MM. *Féraud* & de *Wailly*, dans la compoſition de la diphthongue *iou*. Dans *Brioude*, où il vient du *v* qui ſe trouve dans *Brivas*, il forme, ſelon l'A. *Féraud*, ce qu'il appelle, d'après *Valart*, une *diphthongue impropre*. Moi je tiens que dans „Brioude," „Colioure," „Liourade," (dont il ſera parlé plus bas) il forme à lui ſeul une ſyllabe, parce que l'*i* qui le précède ſe trouve dans „Brivas," „Caucoliberis," „Liberata," mais que dans „*Lioubette*," (fait de *Lubetia*, comme „Loubece" & „Louvece") il forme une diphthongue avec l'*i* qu'il ſuit & qui n'eſt pas dans le latin; & que *Brioude* doit avoir ſeulement deux ſyllabes, ſi *Colioure* n'en a que trois: le C. *Mentelle* en décidera.

Mais puiſque je m'en remets au *jugement* de cet habile géographe ſur la nature de l'*ou* qui eſt dans *Brioude* & *Colioure*, je veux *mettre ſur* ſon *bureau* mes étymologies de ces deux noms de ville.

1) *Brivas* donne dans les cas ſubſéquens du nominatif *Brivas* . . ., dont je fais *Brivate*. Celui-ci devoit, ſelon l'analogie, donner ultérieurement *Brivé* par *Brivat*, *Brivait*, *Briveit*, *Brivet*, comme *Arelas*, par *Arelat* . . ., devoit donner *Arlé*. Mais de *Brivate* on a fait *Briouate* par *Briuate*, puis *Briouade*, dont on a retranché l'*a*, parce que cette lettre & *ou* ſe heurtoient. *Arelas* a été traité différemment. On ſeroit tenté d'en faire venir *Arles* par le retranchement de

la terminaiſon *as* & l'addition d'*e* à *Arel*. . . . (Celle d'*s* eſt ſans conſéquence) Mais *Arles* ayant deux noms latins, ſavoir *Arelas* (qui fait au génitif &c. &c. *Arelat* . . .) & *Arelate* (où *Arelat* . . . ſe trouve dans les *ſix* cas) il n'eſt pas apparent (indépendamment d'autres raiſons) y ayant une double raiſon de former le mot françois *analogiquement*, c'eſt-à-dire ſur la terminaiſon latine *at* (qui ſe trouve dans *Arelat* . . ., génitif &c. &c. d'*Arelas*, & dans *Arelate*) qu'on l'ait formé, *contre l'analogie*, du nominatif *Arelas*. C'eſt donc d'*Arelat*... que je fais venir *Arles* par *Arelait*, *Arelait*, *Arlait*, *Arleit*, *Arlet*, *Arlé*, *Arle*, comme *Oublié* d'*Oblatum*, (lequel eût régulièrement fait *Oblé*, ou *Oublé*, ou *Oublié* diſſyllabe) & *Tempête* de *Tempeſtas*, qui donnoit plutôt *Tempéte*.

Et parce qu'il m'importe du tout au tout qu'*Arelat* . . ., & non pas *Arelas*, ait donné *Arle*, renfermé dans *Arles*, j'ajouterai que le nom de la ville anciennement appelée *Mimas*, & de nos jours *Mende*, devroit être *Mime*, ou *Mimes*, ſi *Mimas* l'eût donné au lieu de *Mimant* . . ., qui eſt renfermé dans *Mimantis* &c., & qui a fait *Mimante*, *Mimente*, *Miente*, *Mente*, *Mende*. J'ajouterai encore qu'il eſt ſi vrai que les mots françois en *é*, qu'il faut dériver de mots latins en *as*, n'ont pas été formés ſur cette déſinence du nominatif, mais ſur *at*, qui ſe trouve dans les cas ſubſéquens, que lorſqu'un mot latin en *as* n'a pas eu un génitif en *atis*, on lui en a forgé un. Ainſi *Tabracas*, dont je ſuppoſe que le génitif eſt *Tabracae*, a donné *Trabate*, lequel ſuppoſe *Tabracat* . . . dans le génitif &c.

2) Venons à *Colioure*. *Caucoliberis*, *Caucolibère*, *Caucolibere*, *Caucolibre*, *Caucolivre*, *Caucoliourre*, *Cocolioure*, *Coliourre*.

On pourroit, dans cette généalogie de *Colioure*, faire paſſer encore *Caucolivre* par *Caucoliure* (comme *Brivate* par *Briuate*) car on a pris plus d'une fois le *v* pour un *u* (dans l'Eſpagnol on a fait de même, témoin *Ciudad*, fait de *Civitas*) comme on le verra dans la ſuite de ces Mémoires. Quant au changement du *b* en *v* & d'*au* en *o*, il eſt fréquent; & le retranchement de *co* dans *Caucolioure*, ou *Cocolioure* (car *Caucolioure* peut avoir fait *Cocolioure* & *Colioure*, au lieu de *Caulioure* & *Colioure*; & je ne garantis pas l'ordre de mes mots intermédiaires: ce qui ſoit dit une fois pour toutes) je le trouve tout-à-fait digne de la vivacité françoiſe, laquelle, à force d'opérer, eſt parvenue plus d'une fois à réduire *cinq* ſyllabes à *deux*: je le prouverai peut-être un jour.

Les changemens qui ſont dans *Caucolibère*, *Caucolibere* & *Caucolibre* ce ſont ceux qu'il faut admettre dans *libre* & *livre*, faits tous deux de *liber*. Je rends mes lecteurs attentifs à ces changemens, parce que c'eſt au moyen d'*iceux*, & de celui d'*o* en *eu*, & d'*eu* en *è*, que je trouve *re*, lettres finales françoiſes, dans *or*, lettres finales latines, comme on va le voir.

Ménage, après avoir rapporté différentes opinions ſur l'étymologie de *Sire*, ajoute qu'il vient indubitablement avec *Seigneur* du latin *Seniore*, ablatif de *Senior*, dont les écrivains de la baſſe latinité ſe ſont ſervis, parce que „les perſonnes *âgées* ont eu *de* „*tout temps* les *premières* dignités, témoin le mot de πρεσβευτὴς parmi les Grecs, & „celui de *Senator* parmi les Latins." De *Siore*, (ajoute *Ménage*) contraction de *Seniore*, nous avons fait *Sieur*. De *Siore*, les Italiens ont fait *Sire*, dont nous avons fait *Sire*.

C'eſt-à-dire que *Sire* ne vient pas tellement de *Seniore*, ablatif de *Senior*, que ce ne ſoit plutôt un mot *Italien*, fait d'un mot ſoi-diſant *Latin*. Quel mépris de l'art étymologique, de cet art qui peut ſeul fixer l'orthographe & la prononciation!

Moi je n'ai beſoin que de *Senior* pour trouver *Seigneur*, *Sieur* & *Sire*; & je n'ai même que faire de l'ablatif *Seniore*, dont l'*é* ne me donne pas l'*e* de *Sire*, qui réſulte de la *prononciation* de l'*r* de *Senior*, & de pas autre choſe.

1) *S̆en̆iōr*, *Séniore*, *Sénieure*, *Seinieure*, *Seigneure*, *Seigneur*;

2) *S̆en̆iōr*, &c. &c. &c. &c., *Seigneur*, *Seineur*, *Seieur*, *Sieur*;
(L'*i* de *Sieur* provenant de l'*e* de *S̆en̆iōr*, ce mot devroit être *diſſyllabe*.)

3) *S̆en̆iōr*, &c. &c. &c. &c., *Seigneure*, *Seignère*, *Seignere*, *Seinere*, *Seinre* . . . .

Ici le mot pouvoit devenir *Sindre*, comme *moinre*, fait de *minor*, eſt devenu *moindre*: il eſt devenu *Sire*, & il fait ſociété à *pire*, fait de *pejor* par *péjeur*, qui s'eſt dit, & qui a dû être *pejre*, comme *Sire* a dû être *Sinre*.

Voici un mot qui participe aux changemens qu'ont éprouvé *Colioure* & *Brioude*. Il s'agit de *Liourade*, fait de *Liberata* comme *Livrade*. Dans *Liourade*, comme dans *Colioure*, le *b* eſt devenu *ou*, & le *t* a été adouci en *d*, comme dans *Brioude*. Du reſte *Sainte-Livrade* étant un nom de ville de l'antique Guienne, & *Liourade* ayant été dans la Guienne le nom françois de *Sancta Liberata*, je me crois pleinement autoriſé à changer le *b* & le *v* en *ou*.

Dans *Ciotat* & *Cioutat*, le *v* de *Civitas* a été changé en *o* & en *ou*; & ſi *ou* forme une diphthongue avec *i* dans *Brioude* & *Colioure*, il peut auſſi la former (ainſi qu'*o*) avec cette même lettre, dans *Cioutat* & *Ciotat*, dans leſquels, du reſte, *o* & *ou* ont expulſé la voyelle ſubſéquente *i* („Civitas") comme *ou* a expulſé *a* dans *Brioude* („Bri„vas . . .") & *e* dans *Colioure* (Caucoliberis).

On peut demander d'où provient l'*ou* d'*Olioules*, ſi c'eſt du *v* d'*Olivula*, (d'où je le dérive) ou bien de l'*u* ſubſéquent. Si c'eſt du *v*, le mot eſt de la claſſe de *Brioude*, *Colioure* & *Cioutat*. Si c'eſt de l'*u*, il eſt de la catégorie d'*Avoutre*, dont je vais parler. Je tiens que c'eſt du *v*. On trouve *Montoliou* („Mons Olivus") nom d'une ancienne abbaye du diocèſe de Carcaſſone, & ſelon moi l'*ou* d'*Oliou* eſt le *v* d'*Olivus*, converti en *f* dans *Olif*, que je me remets d'avoir vu dans le ſens d'*Olive*.

J'ai dérivé ci-devant *Olioules* d'*Olivula*. On trouve dans la traduction françoiſe de *Buſching* „Ollioules," „Ollieules," „Osiula," mais je crois qu'il y a dans ces trois mots une double faute, en ce qu'„Osiula" devroit être „Olivula" ou tout au moins „Oliula," & qu'*Olioules*, bien loin de s'écrire *Ollioules*, ne devroit pas même s'écrire *Olioulles*. Du reſte il y a entre *Ollieules* (ou plutôt *Olieules*) & *Olioules* la différence qui ſe trouve entre *meurs*, qui devroit ſe dire au lieu de *moeurs*, & *mours*, qui s'eſt dit pour *moeurs*.

Du reſte encore ſi *Oliula* étoit le vrai mot, au lieu d'*Olivula*, *Olioules* ſeroit ſans contredit dans le goût d'*Avoutre*.

Celui-ci, ou *Avouetre*, peut en quelque manière ſervir de pendant à *Bivouac*. Je dis *en quelque manière*, parce que dans *Bivouac* le *v* précède l'*ou* qui l'a remplacé, au lieu que dans *Avoutre*, ou *Avouetre*, le *v* a été *poſpoſé* à l'*ou*, qu'il a formé ailleurs, mais qui eſt ici formé par l'*u*. Quoi qu'il en ſoit, l'*Académie* donne à *Avoutre*, &

à ſon ſynonyme *Avouètre*, la ſignification de *bâtard Adultérin*. Selon *Pasquier* *avoutrie* s'eſt dit autrefois pour *adultère*. *Borel* a dans la même ſignification *Avoutire* & *Avoutrie*; & *Avoutire* ne ſauroit être une faute d'impreſſion, puiſque, dans les vers de l'*Ovide manuſcrit* qu'il cite, *Avoutire* rime avec *dire*. Il eſt vrai que dans un autre paſſage de l'*Ovide* il écrit *Avoutrie*, mais *La Combe* écrit *Avoutire*. Je crois que l'un & l'autre s'eſt dit. Je les trouve dans *La Combe* avec *Avoutère* & *Avoutre*, & je fais venir ces quatre mots d'*Adulterium*; & *Avoutrie*, me prouve que les mots latins en *ius*, *ia*, *ium* ont pû faire des mots françois en *ie* avant de former ceux qui ſe terminent actuellement en *e*. Mais voyons l'étymologie de mes quatre mots.

Adulterium, *adulterie*, *aultèrie*, *aoultèrie*.

Jusqu'ici ces quatre mots ont cheminé enſemble, puis ils ſe ſont ſéparés.

1) Le premier eſt devenu *aoulterie*, *aoultrie*, *avoultrie*, *avoutrie*.

2) Le ſecond eſt devenu d'abord *aoulteirie*, puis *aoultirle*, puis *aoultire*, puis *avoultire*, puis *avoutire*.

3) Le troiſième d'*aoultèrie* eſt devenu *aoultère*, puis *avoultère*, puis *avoutère*;

4) Le quatrième a fait deux ſtations de plus, en ce que d'*avoutère* il eſt devenu *avoutere*, puis *avoutre*.

Avoutre, dans la ſignification de *bâtard adultérin*, vient auſſi, *me ſentiente*, d'*adulter*, & l'on ne gagneroit rien à le faire venir d'*adulterinus*, qui renferme *adulter*. Dans cette ſignification il a *avoiſtre* pour ſynonyme, & ce ſynonyme je le fais auſſi venir d'*adulter* avec *avoutre*. La prononciation d'*avoiſtre* & d'*avouetre* eſt la même, c'eſt-à-dire qu'*oi* & *oue* y ſonnent *oa*, comme dans *goitre* & *goitre*, faits l'un & l'autre de *guttur*, comme *avoltetre* & *avoiſtre* d'*adulter*. Et ſi *s* eſt dans *avoistre*, auſſi eſt-il dans *goître* & *boîte* au moyen de l'*accent circonflexe*.

Dans *avouldre*, qui a la ſignification de *bâtard adultérin*, le *t* d'*adulter* a été adouci en *d*: il l'a été dans *Brioude*. Mais je ne conçois pas comment *Guyet* trouvoit l'*r* & l'*i* d'*avoutrie* dans *abortus*, qui lui donnoit tout au plus le *v* d'*avoutrie* par le changement notoire du *b* en *v*; & cependant *ri* méritoit quelque conſidération dans *avoutrie*, car je tiens avec les C. C. *Dewailly* que „c'eſt dans les finales que ſe montre, „pour ainſi dire, à découvert la phyſionomie d'une langue" (& que par cette raiſon il faudroit traiter les étymologies françoiſes ſur *ces finales*, & ſe réſoudre quelquefois à la ſimple *conjecture* quant aux changemens arrivés dans le *corps* des mots.) Auſſi *Guyet*, après avoir dérivé *avoutrie* d'*abortus*, opère-t-il ſur *abortare*, d'où, par *avortare* & *avortaria*, il tire ces terribles lettres *ri* qu'*abortus* ne lui donnoit pas.

Ménage trouve la dérivation de *Pasquier plus naturelle*: mais d'*adulter* il fait *avulter*, puis *avoutre*, & d'*avulteria*, qu'il fait apparemment d'*avulter* (ſans s'expliquer ſur la manière) il fait *avoutrie*. A ſa place je crois que j'aurois dérivé *avoutrie* de l'Italien *avolteria* (qu'il ſemble dériver d'*adulterium*) puiſqu'il eſt décidé qu'*avolteria* a depuis long-temps le ſens d'*avoutrie*, comme il l'eſt que le François a pris de l'Italien, & que par conſéquent il ne peut être queſtion que du plus ou du moins; & je crois que du reſte j'aurois renvoyé à examiner dans mes *Origines Italiennes* comment le *d* d'*Adulterium* eſt devenu *v* dans *Avolteria*. Mais on trouve *aoultr* dans le Bas-Breton en la ſignification d'*adultère* (comme je l'apprends du docte *Ménage*, lequel cependant n'a pas ſu employer ſa ſcience à *profit* de *ménage*) & cette circonſtance me confirme dans mon opinion que l'*ou* d'*avoutrie* eſt l'*u* d'*adulterium*, & que le *v* a été inſéré pour ſe-

parer *a* d'*ou*. Et j'ai trouvé plus d'une fois que le François, après avoir retranché une conſonne, l'a reſtituée, ou en a mis une autre à la place. Par exemple on ſeroit tenté de trouver le *d* de la terminaiſon françoiſe *endre* dans le *d* de la terminaiſon latine *endere*; mais on ſe tromperoit; & la preuve en eſt que l'on trouve *prenre* pour *prendre*, & *ſusprenre* (peut-être *ſurprenre*) pour *ſurprendre*. Et ſi le *d* n'avoit pas été ajouté dans les mots françois, comment ſeroit-il dans *cendre*, *geindre* (ſi on fait venir celui-ci de *gemere*) *gendre*, *moindre*, *moudre*, *pondre*, *ſemondre* (ſi ce dernier vient de *ſubmonere*) *tendre*, *Vendredi*, &c., puiſqu'il n'eſt pas dans *ciner* . . ., *gener*, *minor*, *molere*, *ponere*, *tener*, *Veneris dies*? Et comment le *b* ſeroit-il dans l'Anglois *chamblot*, ſynonyme de *chamelot*, & fait, comme ſon ſynonyme, de *camelus*, s'il n'avoit pas été inſéré dans *chamlot*?

Quant au remplacement d'une conſonne par une autre, les mots en *aindre*, *eindre* & *oindre* en offrent des exemples dans *contraindre*, *plaindre*, *Aindre*, *aſtreindre*, *atteindre*, *ceindre*, *joindre*, *oindre*, *poindre*, faits de *conſtringere*, *plangere*, *Inger*, *aſtringere*, *attingere*, *cingere*, *jungere*, *ungere*, *pungere*: car je penſe que dans tous ces mots le *d* a été ajouté pour ſéparer l'*n* de l'*r*, qui étoient devenus voiſins par la ſuppreſſion du *g* & de l'*e* de *conſtringere* &c. &c.; & en cela je ſuis d'une opinion différente de celle de *Ménage*, qui, tout en ſoutenant que *peindre* a été fait de *pingere* par l'*addition* du *d*, & non par le *changement* du *g* en *d*, veut cependant que l'on ait commencé par dire *pignere*, parce que les Italiens diſent *dipignere*, ſans nous dire ce que l'on gagne à faire *pignere* de *pingere* pour trouver *peindre*.

On trouve *aombrer*, fait d'*adumbrare*, & *aorer*, fait d'*adorare*, & *aorner*, fait d'*adornare*; & ſi le *premier* & le *dernier* de ces mots étoient encore d'uſage, on y auroit ſans doute remis le *d* qui a été reſtitué au *ſecond*.

Lorſque le François, docile à ſon *oreille*, n'a pas fait diſparoître ſur le *papier*, par la *reſtitution* ou l'*addition* d'une *conſonne*, l'*hiatus* que ſa *vivacité* avoit produit, il a retranché dans la *prononciation* l'une des voyelles génératrices de l'hiatus.

Ainſi

ſaon,	il le prononce	*ſan*,
Laon	. . . . .	*Lan*,
paon	. . . . .	*pan*,
taon	. . . . .	*tan*,
Saône	. . . . .	*Sône*,
Saoul	. . . . .	*Sou*,
Août	. . . . .	*Oût*.

(& puiſqu'on trouve *Gaond*, *Gand*, *Gan*, *Gon*, tous faits de *Godo* avec *Godon*, il faut qu'en prononçant *Gaon*, ſubſtitué à *Goon*, fait de *Godon*, on ait tantôt négligé la prononciation de l'*a*, tantôt celle de l'*o*.)

Et lorſqu'il n'a pas jugé à propos de ſe débarraſſer de l'hiatus, il l'a du moins *adouci* par l'inſertion ou la répétition d'une voyelle. C'eſt du moins, à mon avis, la raiſon pour laquelle nous prononçons *crayon* comme s'il étoit écrit *crai-ion*, lorſqu'il devroit ſe prononcer, & qu'il s'eſt peut-être prononcé *crai-on*, l'*y* n'y étant que l'*i* d'*ai* ſubſtitué à *ei*, ſubſtitué à l'*e* de *crēta*, & *créon* ſe trouvant.

L'homme eſt quelquefois inconſéquent. Le François eſt homme. Donc le François peut être quelquefois inconſéquent dans la prononciation des mots. *Cadurcum*

& *Cadureinus*, par le retranchement du *d*, ont dû faire, après quelques mutations, *Caor* & *Caorſin*. Pour ſe débarraſſer de l'hiatus d'*a-o*, on y a inſéré un *h*, mais on prononce *ca-or* & *ca-or-ſin*. On peut dire que l'aſpiration de l'*h* étoit un peu pénible dans *cahors* & *cahorſin*; & c'eſt ſans doute à cauſe de cela qu'on ne l'aſpire pas dans d'autres mots lorsqu'il y ſuit l'*a*.

L'*anagramme*, (ſi j'oſe ainſi dire, & ſi je ne me trompe) a encore été pour le François un moyen de ſacrifier à l'euphonie, témoin ce qui va ſuivre.

Ménage dérive *reniſler* de *renaſiculare* par le changement de l'*u voyelle* en *u conſonne* & de l'*u* conſonne en *f*; & *renaſiculare* il le forme de *naſus*: mais il faut avoir ſon *faciam te bene venire* (comme diſoit Monſieur *Formey*) pour *mettre* cette entrepriſe à *chef*. „*Naſus*, *naſi*, *naſicus* (d'où *Naſica*) *naſiculus*, *naſiculare*, *renaſiculare*, *renaſler*, *reniſler*: „comme *ronfler* de *runculare*; & *écorniſler* d'*excorniculare*."

Mais 1) dans l'étymologie de *reniſler* il y a de plus que dans les deux autres le changement de l'*i* en *a*, & ce changement ne me ſemble pas une bagatelle, n'en ayant par devers moi que peu d'exemples & qui ne ſont pas *applicables* au cas préſent; au lieu que le changement de l'*u* en *o*, qui eſt dans l'étymologie de *ronfler*, eſt fréquent;

2) Bien loin que l'*u* du ſoi-diſant *renaſiculare* eût expulſé le *c*, il en eût plutôt été chaſſé; & c'eſt au moyen de l'expulſion de l'*u* entre le *c* & l'*l* qu'on trouve en grande partie l'*l* mouillée;

3) *Renaſiculare* donneroit plutôt l'étymologie de *renâcler*, dont *renaſquer* me paroit venir par ſuppreſſion de l'*l*.

Je forme tout ſimplement *reniſler* de la particule réduplicative *re* & du verbe *inſler*, fait d'*Inflare*. Quand on *reniſle*, on fait *rentrer* (*re-in*) la *morve* en *reſpirant*. (*flare*) Mais *re-inſler*, (ou *ré-inſler*) faiſoit un hiatus; & par cette raiſon on l'a *anagrammatiſé*: de là *reniſler*. C. Q. F. D.

Comme, à mon âge, je ne ſaurois me flatter de faire part au public de mes idées *loco vel tempore congruo*, ni de leur donner à l'aide de cette circonſtance un relief dont elles auroient grand beſoin, & comme, par cette raiſon, je me permets de dire avec *Montaigne* „s'il n'eſt pas bien à ce qui précède & à ce qui ſuit, il eſt bien en ſoy," je vais donner un *allongeail* à cette Note par un *lopin* ſur l'étymologie d'*ancêtres*, à propos d'*anceſſours* qui ſe trouve dans les quatre vers du chanoine *Gaſſe* cités ſur le mot de *mours*.

Ménage fait venir *ancêtres* d'*anceſſore*, ablatif d'*anceſſor*, qu'on a dit par contraction pour *anteceſſor*.

En attendant qu'il ſoit vérifié qu'*anceſſor* a été abrégé d'*anteceſſor*, je me contente modeſtement du dernier, & j'opère.

Anteceſſor, *Antéceſſore*, *Antéceſſeure*, *Antéceſſeur*, *Anceſſeur*, (on trouve *Antéceſſeur* & *Anceſſeur*) *Anceſſère*, *Anceſſere*, *Ancèsre*, *Anceſtre*, *Anceſtres*, *Ancêtres*. On a inſéré le *t* entre l'*s prononcé* & l'*r*, parce que le ſon *ſe-re* déplaiſoit; & la ſyllabe *té* on l'a ſupprimée parce qu'elle étoit ſuivie de la ſyllabe *ce*, prononcée peut-être *cé*: *té-cé*.

Dans *anceſſours* l'*o* latin a été changé en *ou*, comme il l'a été en *eu* dans *anceſſeurs*.

10) Je m'expliquerai ailleurs plus amplement ſur cet *autant* & ce *plus*. En attendant je dirai qu'il eſt ſi vrai que l'on devroit écrire *eil* ou *euil*, au lieu d'*oeil*, que l'on ne conçoit pas ſur quel ſingulier *yeux*, pluriel d'*oeil*, peut avoir été formé, s'il ne l'a pas été ſur *eil*.

Je m'étois ſouvent demandé d'où pouvoit venir *yeux*: enfin je crois l'avoir trouvé.

Ciel, fait de *Coelum*, par *cel* & *ceil* (prononcé *cèl*) a pour pluriel *cieux*, autrefois *cieulx*.

Bétail, autrefois *beſtail*, fait de *beſtiale* par *beſtial*, a pour pluriel *beſtiaux*, autrefois *beſtiaulx*.

Il faut donc admettrre qu'*yeux*, autrefois *yeulx* (où l'*y* n'a que l'emploi de l'*i*) & plus anciennement *iex*, a eu pour ſingulier *iel*, & ce mot eſt renverſé d'*eil*, comme *ciel* l'eſt de *ceil*.

Et comme *ciel* a pour pluriels *ciels* & *cieux*, de même *oeil* fait au pluriel *oeils* & *yeux*.

Si l'on a dit *vieils*, on ne dit plus que *vieux*. Ce pluriel me prouve que le ſingulier *vieil* peut venir de *vetulus* („vétule," „véule," „véeule," „véèle," „vèle," „vél," „veil," „vieil,") & qu'il devroit être *viel*, renverſé de *veil* (comme *ciel* l'eſt de *ceil*) & que ſi *ciel* n'eſt pas *cieil*, & ſi *vieil* n'eſt pas *viel*, c'eſt parce qu'on a prononcé *ceil* „cè-le" & *veil* „vè-lie." Peut-être auſſi que *veil* (prononcé *vè-le*) a fait *viel*, comme *ceil* a fait *ciel*, & qu'on y a inféré l'*i* abuſivement comme lettre pénultième (peut-être pour diſtinguer une *vieille* „vetula" d'une *vielle* „rotata famiuca") & ce qui porteroit à croire le dernier, c'eſt qu'on a *viellette* dans le ſens qu'exprime notre *vieillotte*.

11) Elle l'eſt, ſi l'on tire *cueillir* de *colligere*, parceque l'*l* mouillée réſulte en grande partie de ſyllabes latines où *li* eſt *ſuivi* d'une des cinq *voyelles*. D'ailleurs *colligere* donne *cueillir*.

Colligere, *Colligere*, (les *e* muets) *Colligre*, *Collire*.

On a ajouté un *i* à l'*o* de *Collire* (comme dans *poids* fait de „pondus") d'où *Coillire*, & puis on l'en a *décaché* dans la *prononciation* en prononçant *coillire* dans le goût d'*oille* & *imbroille*; & de là les *ll* mouillées.

Mais parce que l'*o*, devant ces lettres, déplaiſoit à l'oreille françoiſe, on lui a ſubſtitué d'abord *eu*, puis *è*, d'où, après ſuppreſſion de l'*e* final, & inſertion de l'*u* à l'effet de conſerver au *c* initial le ſon du *K*, eſt finalement réſulté *cueillir*.

Et voilà comment on tire *cueillir* de *colligere*, ſans faire paſſer celui-ci par *colligire*, à la *Ménage*. L'*i* final de *cueillir* c'eſt celui de *colligere*.

12) Au moins devroit-il ſe prononcer comme *guè*.

13) Excepté dans le nom d'un quadrupède du Pérou, que l'on trouve écrit *Glama*, *Lhama* & *Llama*, & que l'on prononce comme un Italien prononceroit *Gliama*. L'orthographe *Glama* me prouve que *gl* a pû être prononcé *glie*, ou *lie*, monoſſyllabe, comme *glèle*, auſſi monoſſyllabe; & j'avois grand beſoin de cette circonſtance dans mes étymologies.

14) La *quantité* eſt la même, comme la *prononciation*. *Eil* eſt bref; *eille* auſſi.

15) Elle l'eſt devenue depuis, par mon travail ſur les ſyllabes françoiſes, dont il ſera parlé dans la ſuite de ces Mémoires.

16) Et quelques mots ſurannés.

17) Et divers autres mots.

18) Et de ce qu'il a dit plus haut, que „cet *i* (*qui précède toujours* l'*l* mouillée, ſelon lui) „eſt quelquefois précédé d'une voyelle ſimple ou d'une voyelle compoſée, „avec laquelle il ſe *joint* pour ne faire qu'une *ſeule* ſyllabe."

19) Prononcé „*Ju*-gliè" ou „*Jui*-gliè."

20) Et que même, quand elle *termine* le mot ſur le *papier*, elle eſt *ſuivie* dans la *prononciation* d'un *e* muet.

21) Lors de la lecture de ce Mémoire je n'en avois qu'autant. J'ai trouvé le reſte au moyen de ma *recherche* des *ſyllabes françoiſes*, entrepriſe ſur le *Traité d'orthographe*, & que je pouſſe tous les jours plus loin ſur d'autres Dictionnaires plus nouveaux & plus complets.

22) Voyez ſur le mot *vieil* la Note 10.

23) *Eſſais* de *Montaigne*, Livre I, chapitre 25, alinea 19, des éditions *Coſte*.

24) *Préſervatif contre la corruption de la langue françoiſe*, Tom. II, pag. 215.

25) *Eſſais* de *Montaigne*, Livre I, chapitre 25, alin. 3.

Sur

SUR
les Monumens ſépulcraux des anciens peuples du Nord.

PAR MONSIEUR HIRT *).

Traduit de l'allemand.

J'avois compoſé, à la prière d'un de mes amis, un court mémoire ſur une ſoi-diſante antique, trouvée dans une urne ſépulcrale en Siléſie, lequel mémoire fut inſéré dans le ſecond cahier des *Annales de la Monarchie Pruſſienne.*

Ce monument étoit, en lui-même, de peu d'importance; cependant je crus qu'il pourroit donner lieu à des recherches intéreſſantes. Dans cette vue je pris la liberté de propoſer pluſieurs queſtions, qui s'adreſſoient principalement à ceux qui avoient fait des recherches particulières ſur les plus anciens peuples de nos contrées. Ces queſtions ne pouvoient provenir ſans doute que d'un homme auſſi peu verſé que moi dans les antiquités du Nord. Ce n'étoit pas non plus mon intention d'entrer moi-même dans des recherches de cette nature; je ne voulois qu'ouvrir un champ intéreſſant aux amis de l'hiſtoire de leur patrie.

Pendant que mon mémoire en queſtion étoit ſous preſſe, j'appris que dans le voiſinage de Berlin on avoit fait une découverte importante d'anciens tombeaux remplis d'urnes, dont je voulus me convaincre &

*) Lu à l'Académie le 30 août 1798.

m'inſtruire par mes propres yeux. Enſuite, à peine mon mémoire eut-il paru, que je reçus de différens endroits des renſeignemens qui ſe rapportoient en partie aux queſtions que j'avois propoſées. Mais au lieu de voir ma curioſité ſatisfaite, mon attention ſe porta plus vivement que jamais ſur cet objet, au point que je ne pus m'empêcher de faire une excurſion dans un domaine qui naguère m'étoit entièrement inconnu. Je ſentis bientôt à la vérité, que je n'errois pas dans les contrées riantes du Midi, où chaque nouvelle recherche éclaire l'eſprit & ſatisfait l'âme. Les ſombres déſerts de l'ancien Nord, où les peuples errans & mécontens du pays qu'ils habitoient, ſe déplaçoient tour-à-tour les uns les autres, ont peu de charmes pour l'oeil du voyageur antiquaire. Par une ſuite de la pénurie des renſeignemens & des monumens de ces contrées, le fil de la recherche eſt à tout moment rompu. Cependant je m'aperçus bientôt, que malgré les travaux eſtimables de pluſieurs ſavans, l'étude des antiquités du Nord eſt encore ſuſceptible de plus d'un éclairciſſement. Pour parvenir à ſe guider en quelque ſorte dans ce labyrinthe, il ne ſuffit pas d'y employer un travail de quelques mois, il faudroit néceſſairement des années. Je fus donc obligé de me contenter d'informations & de recherches ſuperficielles, d'autant plus que pluſieurs connoiſſances préliminaires, à la tête desquelles je place l'étude approfondie des langues du Nord, me manquoient abſolument. Ce que je fournis ici, c'eſt plutôt des obſervations & des fragmens, que des réſultats.

Je commencerai par une lettre de Monſieur *Kloſe*, paſteur à Domentze proche Schweidnitz. Elle conſiſte en réponſes placées dans le même ordre que l'étoient les queſtions de mon mémoire inſéré dans le ſecond cahier des Annales de la Monarchie Pruſſiénne. La voici.

„J'ai vu dans les Annales de la Monarchie Pruſſienne au cahier du mois de février de cette année, p. 149. & ſuiv. pluſieurs queſtions propoſées à l'occaſion d'une antique trouvée dans une campagne de

M. de *Bomsdorf* à quatre milles de Breslau, auxquelles je prends la liberté de répondre en partie.

1) On trouve preſque dans toute la Siléſie des urnes ſépulcrales. D'abord on les a trouvées ſans les chercher; enſuite on a fait des fouilles pour en découvrir: on les a recueillies, décrites, gravées & publiées. Les urnes ſépulcrales trouvées dans le voiſinage de *Kran*, ſur le *Töpferberg* près de Liegnitz, à Ranſen, à Maſſel, ſont connues de tous les antiquaires de la Siléſie.

2) Rien à l'extérieur n'indique l'exiſtence de ces urnes. Elles ont été enfouïes trop long-temps au-delà de l'âge des plus vieux chênes, pour qu'une forêt plantée par deſſus ait pu réſiſter aux ravages des ſiècles. Il en eſt de même des monceaux de terre ou des collines qui, s'il y en a eu, ont dû par une ſuite des révolutions auxquelles le terrain étoit aſſujetti, disparoître, & être nivelées depuis long-temps. Par-tout, en deça & au-delà de l'Oder, & preſque toujours dans des circonſtances analogues, on trouve de ces urnes.

Le feu comte *Matuſchka* en tira du *Pitſchenberg*, montagne qui eſt vis-à-vis de moi; & plus récemment encore on en a déterré à *Preilsdorf* proche *Laaſan*, lorsqu'on y creuſoit les fondemens d'une clôture de cimetière. J'ai envoyé quelques-unes de ces urnes à couvercle, à M. *Waker* alors Inſpecteur des antiques à Dresde.

Nous ne trouvons jamais ces urnes iſolées; elles ſont toujours, ſi j'oſe m'exprimer ainſi, réunies en familles. On voit preſque toujours deux grandes urnes au milieu, & pluſieurs petites autour, ce qui ſemble indiquer naturellement les cendres des parens & des enfans; à une certaine diſtance, de nouvelles urnes de grande taille, entourées de petites: en un mot, c'eſt un véritable ſyſtème planétaire. Ce ſont ſans doute les membres d'une maiſon, d'une commune, d'une tribu qui repoſent enſemble, ſelon que leurs relations étoient plus ou moins étroites.

Les lieux deſtinés à la ſépulture étoient des collines, ou du moins des éminences, telles que la contrée en préſentoit. Nos ancê-

tres aimoient à conſerver auſſi long-temps que poſſible les cendres qui leur étoient chères. Or l'eau & l'humidité ſont les plus redoutables ennemis d'une immortalité de cette nature. On trouve pour l'ordinaire ces urnes ſépulcrales ſur le penchant des collines, & à la profondeur d'une aune & demie.

3) Il n'y a extérieurment aucune marque, aucun indice de l'art, qui apprenne aux paſſans que c'eſt là que repoſent les reſtes précieux de perſonnes chéries. Les urnes ſans couvercle auſſi bien que celles à couvercle, contiennent de la terre, qui fut ſans contredit jadis de la cendre. On y trouve auſſi quelquefois des os, des *aiguilles* de tête, de petits miroirs de métal, des fragmens de couteaux & de pincettes, & des monnoies. Je m'abſtiens d'entrer dans de plus grands détails, & je renvoie le lecteur aux *Annales de Liegnitz par Thebeſius*, à la *Maslographie d'Herrmann*, & à d'autres ouvrages qui contiennent la deſcription & la délinéation de ces monumens.

4) Il a déjà été répondu d'avance à la queſtion 4°. Ces urnes ſont à couvercle & ſans couvercle, à anſes & ſans anſes; en les déterrant elles ſont extrémement tendres, feuilletées & caſſantes; mais à l'air elles deviennent en fort peu de temps dures comme du fer. L'argile dont elles ſont compoſées, eſt d'ordinaire bleuâtre, ſouvent tirant ſur le noir, jamais blanche ou jaune. Je n'ai point remarqué de vernis ſur elles.

5) Ces urnes renferment indubitablement la cendre de nos premiers ancêtres. On les trouve dans les montagnes comme dans le plat pays. C'eſt la cendre des Lygiens, des Quades, des Marcomans, les habitans poſtérieurs du pays n'ayant jamais pénétré dans les montagnes, & les peuples de l'eſt, les Vénèdes, Huns, Lechiens, Sarmates n'ayant pas été dans l'uſage de brûler leurs morts, comme ceux de la Germanie & les Romains. Nos ancêtres ont ſans contredit eu commerce avec les Romains, du moins les ont-ils combattus (comme p. ex. les Marcomans), & dans les veſtiges de leurs ſépul-

tures nous trouvons plusieurs effets qui étoient manifestement des fabrications romaines, comme par exemple les monnoies.

Mais quoiqu'on trouve en grande quantité ces rassemblemens d'urnes sépulcrales, leur nombre cependant n'est pas aussi grand qu'une nation aussi nombreuse sembleroit le supposer, sans doute parce que celles qu'on avoit découvertes avant nous, ont été mises de côté & détruites sans bruit.

On ne trouve à côté de ces urnes aucun indice, encore moins des inscriptions sur la pierre ou sur l'airain, mais bien sur leur surface des formes & des moules, des figures, des traits en relief, des excavations de toute espèce. Les monnoies sont grossièrement travaillées, la plus grande partie en cuivre; il y en a peu d'argent.

6) Je suppose que les anciennes monnoies, que l'on trouve quelquefois sur les hauteurs en labourant, étoient aussi anciennement renfermées dans des urnes que la charrue aura brisées, sans que celui qui la conduisoit, s'en aperçût.

7) Les aiguilles de tête sont ordinairement munies de deux boutons, dont l'un se dévisse. Elles sont semblables à celles dont se servent encore aujourd'hui les femmes de Neisse, de laiton ou de cuivre. Tout ce qu'on trouve de cette nature, est toujours dans une urne ou dans un pot, quand ils ne sont pas brisés ou renversés.

Je n'y ai jamais trouvé de la corne, de l'ambre, de l'ivoire, mais bien de longues brochettes ou aiguilles pointues, plus longues que des broches à tricoter, ressemblantes à des lardoires, & servant ou d'ornement ou de défense. Peut-être étoit-ce de ces poinçons dont se servoit Domitien quand il s'amusoit à la chasse des mouches.

Domentze, proche Schweidnitz, le 14 février 1798. *Chrétien Godefroi Klose*, Pasteur."

Les notices de l'estimable M. *Klose*, quoiqu'elles ne soient pas satisfaisantes à tous égards, sont cependant précieuses, puisqu'elles nous viennent de la part d'un homme présent aux fouilles & observateur

attentif de tout ce qu'on y découvroit. Les circonſtances qu'il cite, ſurtout au Nro. 2 & 4, correſpondent ſi exactement au mode de découverte de ces urnes dans pluſieurs contrées de la Marche, & tout récemment encore dans le voiſinage de Berlin, qu'on ne ſauroit raiſonnablement douter que ce ne ſoit le même peuple qui à l'époque de ces urnes ſépulcrales, occupoit & la Siléſie & la Marche.

Pour rendre cette reſſemblance encore plus palpable, je vais rapporter, comme témoin oculaire, les détails de cette dernière fouille.

Dans la forêt dite *Haſenheide* (forêt des lièvres) ſituée entre la porte de Halle & celle de Cottbus, à un quart de mille environ de Berlin, quelques journaliers labouroient à la bêche un champ au pied d'une petite éminence, qu'on appelle les *Rollberge*. Ce champ avoit naguères fait partie de la forêt. A la profondeur d'environ un pied & demi, ils trouvèrent en divers endroits des cailloux qu'ils enlevèrent, ſans faire d'abord attention à la manière dont ces pierres étoient artiſtement arrangées. Ces pierres environnoient & couvroient à la façon d'un caveau, des urnes de terre cuite. Mais ces urnes étant très-fragiles avant que l'air auquel elles doivent reſter expoſées quelque temps les ait endurcies, non-ſeulement les coups de bêche les briſèrent en morceaux, mais les réduiſirent en grande partie en poudre. Les laboureurs prirent les oſſemens & les cendres qu'il y trouvèrent entremêlés, pour des reſtes de Ruſſes & d'Autrichiens, qui pendant la guerre de ſept ans avoient occupé cette poſition. Cependant les diſtances régulières de ces maſſes de pierres & l'arrivée de pluſieurs ſpectateurs les rendit plus attentifs à la choſe; & de cette manière, après avoir détruit une grande quantité de ces vaſes, dont ils firent eux-mêmes monter le nombre à plus de ſeptante, ils en ſauvèrent quelques-uns. La quantité de cailloux qu'on tira de cette fouille & qui avoient formé la voûte de ces urnes, ſervit également à prouver que le nombre des vaſes briſés n'étoit point porté trop haut.

Ils étoient placés comme il ſuit:

Un grand vaſe au milieu repoſoit ſur un gros caillou; ſur des cailloux plus petits environnans étoit placée une groſſe pierre aplatie par en bas, qui ſervoit en quelque ſorte de couvercle au vaſe; de manière pourtant qu'il ne poſoit pas immédiatement ſur le bord même du vaſe, mais ſur les cailloux environnans.

Autour de cette grande urne ſe trouvoient placées de la même manière, quatre, cinq, à ſix petites, de grandeurs différentes, d'où l'on peut conclure que la diverſité d'âge déterminoit toujours la grandeur de l'urne cinéraire. A la diſtance de quatre à cinq pas on trouvoit un groupe ſemblable, & ainſi de ſuite; ce qui répond parfaitement à la comparaiſon ingénieuſe que M. *Kloſe* fait de ces groupes d'urnes avec le ſyſtème planétaire.

Les urnes étoient extraordinairement tendres & caſſantes au moment de la fouille; le plus léger attouchement les faiſoit tomber en pièces. Mais expoſées à l'air, elles reprenoient en peu de temps leur dureté originaire. L'argile dont elles étoient compoſées, n'eſt ni pure ni bien cuite; elle a des taches d'un rouge jaunâtre mêlé de noir & de bleu, & point de vernis *).

Il ne faut point attribuer cette grande fragilité des urnes au moment où on les ſort de terre, à la mauvaiſe qualité de l'argile qui ſert à leur compoſition, car les vaſes paîtris de la meilleure argile & parfaitement bien cuits, ſont tout auſſi caſſans. J'en ai été témoin oculaire plus d'une fois dans les fouilles & découvertes d'anciens monumens ſépulcraux dans le royaume de Naples & de Sicile, où les vaſes peints, ſi connus, ſe trouvent encore toujours en plus grande quantité que jamais.

Pour en revenir aux urnes de la Marche, elles reſſemblent auſſi à celles de la Siléſie pour la forme & pour les ornemens. Sur une d'elles, que le foreſtier *Koch* de la *Haſenheide* poſſède, on aperçoit un orne-

*) Les éditeurs du *Journal de Brandebourg* ſe trompent ſur ce point, dans la notice abrégée qu'ils donnent de cette découverte dans le mois de février de leur journal.

ment fait à traits grossiers avec une racloire, & représentant des festons de fleurs & de fruits, dont les deux bouts sont retenus & réunis dans des anneaux. Les grossiers potiers du Nord avoient donc déjà des idées d'ornemens gréco-romains de cette espèce. C'est ce que confirment d'autres vases, que j'ai vus depuis soit en nature au château royal, soit gravés en taille-douce; des bâtons ornés, des cannelures, l'ornement connu des vagues de la mer, du méandre & du labyrinthe y paroissent assez souvent, mais toujours grossièrement exécutés par des mains barbares.

Dans les vases on a trouvé des ossemens mêlés de cendres, avec une couche de sable fin & très-pur par-dessus, qui rempliſſoit le vase jusqu'au bord & y étoit très-comprimée.

Ayant que de déposer les ossemens dans l'urne, on en avoit tapissé le fond & les côtés intérieurs d'un tissu cellulaire, à-peu-près comme on double de nos jours une boëte de lin ou de coton, quand on veut y conserver quelque chose de cassant ou de précieux. Ces filamens me parurent dans les commencemens un véritable tissu, mais après y avoir regardé de plus près, je trouvai que ce n'étoit pas l'ouvrage de l'industrie humaine, mais le produit brut d'une plante. Curieux de m'en instruire plus à fond, je fis parvenir un échantillon de ces filamens à mon collégue M. le professeur *Willdenow*. Ses recherches ne lui fournirent d'autre résultat, si ce n'est que c'étoient les fils des racines les plus fines d'une plante aquatique. *Thebesius* fait déjà mention de cette manière de tapisser l'intérieur des urnes, & suppose que ce sont des fils, résidus du linge dans lequel on recueilloit les ossemens, & qu'on déposoit avec eux dans l'urne.

Jaques de Mellen *) a également remarqué ces filamens, cependant il ne sait s'il doit les prendre pour des fils de soie ou de laine. Du reste, il a comparé très-ingénieusement ce mode de

*) *Historia urnae sepulcralis Sarmaticae. Jenae* 1679.

de tapiſſer les urnes, avec les nids de certains oiſeaux, ſurtout des linotes *).

Je ne parvins à voir que cinq vaſes conſervés de toute cette importante découverte, dont trois ſe trouvoient entre les mains du foreſtier *Koch* à la *Haſenheide;* le quatrième, qui étoit le plus grand de tous, avoit été acquis par le ſieur *Louis*, teinturier de Berlin, & j'obtins le cinquième d'un maître de cabaret de la *Haſenheide.* Un des vaſes appartenans au ſieur *Koch* me parut remarquable à cauſe des lignes ou ornemens dont j'ai fait mention plus haut, & qui forment des feſtons de fruits. Ils étoient tous intacts, & remplis d'os & de ſable. Le vaſe dont le ſieur *Louis* étoit poſſeſſeur, n'avoit plus ni ſable, ni cendres, ni tapis cellulaire; on s'étoit contenté d'y rejeter les os, en y ajoutant quelques fragmens de bronze, qu'on avoit trouvés pêle-mêle avec ces os. Le plus grand & le plus remarquable de ces fragmens reſſemble à un éperon ordinaire, avec cette différence que le demi-cercle qui doit mordre le talon de la chauſſure eſt ſi étroit, qu'il ſeroit trop petit, même pour le pied d'un enfant. Au lieu de la molette ordinaire de nos éperons on y a affermi une pointe pentagonale peu aiguë. On a trouvé de pareils fragmens de métal dans d'autres urnes, & il ſe peut qu'ils ayent ſervi d'ornement au cimier du casque.

L'urne dont je fis l'acquiſition étoit la plus petite de toutes, & encore intacte. J'en examinai le contenu avec un ſoin infini; je commençai par en enlever la couche ſupérieure de ſable fin & très-comprimé; après quoi j'y trouvai une couche d'os & de cendres, avec leur enveloppe cellulaire. Les os étoient petits, & beaucoup plus tendres que ceux du vaſe du ſieur *Louis.* Son urne contenoit les oſſemens d'un homme fait, & la mienne renfermoit les reſtes d'un enfant

*) Cependant ces filamens ne ſe trouvent pas dans toutes les urnes. J'ai depuis examiné deux urnes auxquelles on n'avoit point encore touché jusqu'ici, & qui ſe trouvent dans le cabinet des curioſités du Roi; & je n'y ai point aperçu de tapis cellulaire.

de quelques années. Je n'y trouvai aucun fragment de laiton ou de quelque autre matière.

On voit combien cette deſcription eſt conforme dans tous les points eſſentiels, au rapport de M. *Kloſe* ſur les urnes Siléſiennes. On ne peut douter que ces urnes n'ayent appartenu au même peuple, ſoumis aux mêmes uſages & aux mêmes rites funèbres.

Mais quelle eſt la nation à qui ces monumens & ces urnes appartiennent?

Ce point eſt tout auſſi conteſté que la queſtion ſur les beaux vaſes peints qu'on trouve dans le royaume des deux-Siciles, & que la plupart des antiquaires attribue encore aux Toscans, tandis qu'*ils ſont* indubitablement d'origine & de fabrication grecque. Quoique j'aye déclaré plus haut que je ne me ſentois pas la force de décider ce point de conteſtation, je ne veux pas cependant priver l'amateur de l'hiſtoire de ſon pays du fruit de mes recherches, content ſi je parviens à placer cette queſtion dans un jour qui mettra ceux qui me ſuivront dans cette carrière, en état d'établir des réſultats plus clairs & plus précis.

Pour bien poſer la queſtion, il ſera néceſſaire avant toutes choſes de déterminer les pays, les contrées & les lieux où l'on a découvert des urnes ſépulcrales de cette eſpèce dans les temps poſtérieurs, & où on les trouve encore de nos jours de temps à autre.

En ſecond lieu

d'indiquer auſſi exactement que poſſible d'après les diverſes contrées, la conſtruction extérieure & intérieure des tombeaux, les différentes eſpèces de vaſes, les différens uſtenſiles & toutes les choſes en un mot, qu'on y a découvertes en même temps.

Troiſièmement

de jeter un coup-d'oeil ſur les différens peuples qui ont habité plus ou moins long-temps ces contrées, & d'examiner jusqu'à

quel point leurs moeurs, leurs uſages, leur façon de vivre, leur culture & leur langue s'accordent.

Ce ſont-là les trois points ſur lesquels nos recherches rouleront. Chacun d'eux offre une foule de difficultés, comme la ſuite de mes disquiſitions ne le prouvera que trop.

Quant au premier point, j'ai parcouru avec ſoin la plupart des ouvrages que j'ai pu me procurer ſur la découverte d'urnes ſépulcrales. Mais les relations que ces ouvrages contiennent, ſont rarement compoſées avec cette exactitude & cette fidélité qu'il faudroit pour ſatisfaire l'obſervateur qui par des rapprochemens & des comparaiſons entre elles ſouhaiteroit de parvenir à des réſultats fixes. Il ne peut être aſſez ſur ſes gardes, pour éviter d'être trompé par de fauſſes données & des renſeignemens imparfaits.

Autant que j'ai pu m'en convaincre jusqu'ici, ces collines mortuaires & ces urnes ſépulcrales ne ſe trouvent que dans les régions ſuivantes du Nord:

1) En Siléſie, & ſurtout en grande quantité dans le voiſinage des deux rives de l'Oder *),
2) dans pluſieurs contrées de la Pologne, en deça de la Viſtule, ſurtout dans la voivodie de Puſn **),
3) en Pruſſe, dans le voiſinage de Thorn, Danzig, & dans l'île de Semland ***),
4) en Poméranie †),

*) Voyez *Thebeſii Liegnitziſche Jahrbücher. Hermannn's Maſlographie. Sileſiographia renovata Nic. Hennelii ab Hennenfeld;* & la relation de M. Kloſe.

**) Voyez *Jac. v. Mellen Hiſt. Urnae ſepulcr. Sarmaticae. Jenae* 1674. *Dugloſſus Hiſtoria Pol. Lib. I, pag.* 45. Cet auteur prend ces urnes pour des productions naturelles de la terre.

***) *Hartknoch de rebus Pruſſicis. Jenae* 1671: dans l'ouvrage intitulé: *Erläutertes Preuſſen*, pluſieurs mémoires; *Bock's Naturgeſchichte von Preuſſen, Tom. II, p.* 550.

†) *Colberg de urnis Stolpicis* dans *Nova liter. maris Baltici, pag.* 229.

5) dans toutes les parties de la Marche de Brandebourg; ſurtout à Francfort ſur l'Oder, à Berlin, Potsdam, Zoſſen, Neilingen *),

6) dans le Meklenbourg **),

7) dans la Luſace & la Bohème ***),

8) dans les contrées d'Anſpach & de Nuremberg ****),

9) dans le pays de Magdebourg, la Saxe électorale, le pays d'Anhalt, la Thuringe, la Baſſe-Heſſe, les environs de Helmſtädt, le pays de Lunebourg, le duché de Brème, la Weſtphalie, & la Friſe orientale †),

10) dans le Holſtein, le Schleswig & la Jutlande ††),

11) dans le Danemark, la Suède, & dans quelques contrées & petites îles de l'Angleterre & de l'Écoſſe †††).

Ce ſont-là les pays & les contrées où l'on a trouvé jusqu'ici des tombeaux & des urnes ſépulcrales, & les ouvrages qui en traitent & qui ſont parvenus à ma connoiſſance ††††).

*) *Beckmann Beſchreibung der Stadt Frankfurt an der Oder. Treuer de urna prope Boſſampium inventa* 1729. Les Mémoires de Brandebourg, & autres ouvrages.

**) Voyage en Baſſe-Saxe par Jean comte Potocki en 1794. *Anton über die alten Slaven. Leipzig* 1783 & 1789. *Maſch Obotritiſche Alterthümer.*

***) V. *Anton*, qui cite à ce ſujet les notices de *Bienenberg*, *Dobrowsky* & autres.

****) *Joh. Georg. Keyſleri antiquitates ſelectae Septentr. et Celticae. Hanov.* 1720. Il cite comme ſes garans *Chrét. Feuerlein*, & *Jean Jaqu. Leibnitz*, dont je ne connois pas les ouvrages.

†) *Keyſler. Jean Potocki. Olearii mauſoleum in muſeo. Jenae* 1701. *Schminkius de urnis ſepulchr. Cattorum. Schäffer's Beyträge zu den deutſchen Alterthümern. Rode Cimbr. Holſt. antiqu. Remarques in der Praefation.*

††) *Nova litteraria maris Baltici. Worm Monumenta Danica. Keyſler. Bartholini antiquit. Danicae. Rode cimbriſch holſteiniſche Antiquitäten-Remarques. Major im bevölkerten Cimbrien. Arnkiel Cimbriſche Alterthümer.*

†††) *Wormii monumenta Danica. Keyſler. Sperling. Schachtius in Nova litter. maris Baltici*, & les quatre ſusnommés. Item *Thom. Pennant a tour in Scotland, T. III.* 1790.

††††) Il m'a été communiqué tout récemment un traité manuſcrit ſur *Wisbaden*, lequel ſera dans peu rendu public par l'impreſſion. Il contient entre autres, d'intéreſſantes notices ſur des tombeaux, des urnes & pluſieurs morceaux de métal & de pierre qui y ont été trouvés. L'auteur prétend que ce ſont des an-

Pour ce qui concerne la manière de découvrir ces tombeaux, il ſeroit à ſouhaiter que les rapports des auteurs ſusmentionnés fuſſent plus clairs & plus précis; mais le mal eſt, ou que les écrivains en queſtion ne ſe trouvoient pas ſur le lieu des fouilles & ne compoſoient leurs relations que ſur les rapports d'autrui, ou qu'ils n'étoient pas d'aſſez bons obſervateurs, lors-même qu'on faiſoit les fouilles ſous leurs yeux. Cependant, en comparant leurs différentes notices, il n'eſt pas difficile d'en tirer le réſultat qu'il n'y a de différence eſſentielle ni dans la conſtruction intérieure & extérieure des tombeaux, ni dans les urnes & leur contenu.

Il n'y a pas dans toutes les contrées & dans tous les lieux des indices extérieurs & fixes de ces places ſépulcrales, & quand il y en auroit eu jadis, on ne doit pas s'étonner ſi après la ſucceſſion de tant de ſiècles, des deſtructions volontaires ou le degré d'une culture perfectionnée de la terre les a fait disparoître. Rien de plus facile que de voir une colline de ſable ou de terre s'aplanir par laps de temps; que de voir des maſſes de pierres informes diſperſées & employées à différens uſages; *) des arbres abattus, des forêts exſtirpées, pour faire place à une culture plus analogue aux beſoins des habitans.

tiquités romain... Mais les deſſins très-exacts qu'il y a joints prouvent évidemment que ces tombeaux auſſi bien que leur contenu ſont entièrement dans le goût des monumens du Nord de la Germanie.

*) J'ajoute encore ici ce que j'ai eu occaſion d'obſerver depuis que j'ai fait lecture de ce mémoire à l'Académie. Dans le cours de l'été de l'année 1799 j'ai vu la montagne connue ſous le nom de *Corneliusberg* proche *Helmſtädt*, qui plutôt colline que montagne, domine cependant ſur toute la contrée voiſine. On y découvre encore de prodigieux groupes de cailloux, dont l'un très-bien conſervé. Entre ces groupes on aperçoit pluſieurs éminences ou monticules arrondis. Le grand chemin actuel paſſant à côté de cette montagne, on en a coupé latéralement une partie, de ſorte qu'il me fut facile de diſtinguer la terre de ces monticules factices, de la terre originaire de la montagne; & en examinant la première de ces terres le long de la coupe latérale à la profondeur d'environ deux pieds, je trouvai des charbons de bois, des oſſemens brûlés, quelques pierres à feu, de petits cailloux artiſtement fendus, quelques fragmens de pots de terre, dont un morceau me parut ſurtout remarquable à cauſe d'un vernis jaune-brun qui s'y trouvoit encore adhérent; de ſorte qu'on ne ſauroit

La première choſe qu'on remarque généralement, eſt que ces monumens ſépulcraux ſont de préférence placés au pied ou adoſſés contre la pente des collines naturelles. Là où celles-ci manquent, on en a élevé d'artificielles, de terre ou de ſable, plus au moins hautes, ſoit de forme arrondie, ſoit en forme oblongue. On les trouve ſouvent bordées à leur pied de groſſes maſſes de pierres brûtes, probablement afin d'empêcher les terres de la colline de s'ébouler, ou d'être délavées. Par-ci par-là, ſurtout en Suède, on voit pluſieurs de ces bordures de pierres réunies dans le voiſinage d'une colline, en compartimens circulaires ou carrés, pour diſtinguer, par là, à ce qu'il ſemble, un tombeau de famille d'un autre.

Outre ces bordures de tombeaux & de collines on rencontre auſſi ſouvent, dans tous les pays que nous venons de nommer, de grandes maſſes de pierres placées en rond & ſurmontées d'une groſſe pierre large & aplatie. Ces pierres ont conjecturalement ſervi de tables ou d'autels où l'on a ſacrifié aux Dieux, ou aux mânes des héros décédés, (*Diis manibus*). On trouve ces derniers monumens dans les plaines près des tombeaux, ou ſur les collines mêmes.

On appelle communément dans le Holſtein, la Jutlande, le Danemark, &c. ces monumens ſépulcraux *Hunes*, c'eſt-à-dire *tombeaux de géants*. Ils exiſtent de la même manière dans les poſſeſſions Suédoiſes, en Oſt-Friſe, dans la Baſſe-Heſſe, dans les pays de Meklen-

guères douter que la grande colline n'ait anciennement ſervi de bûcher (*buſtum*) & les petits monticules de tombeaux. Les grandes maſſes groupées de pierres de granit donnent lieu à la conjecture que le haut de la montagne étoit deſtiné outre cela à des aſſemblées particulières.

Peu après mon retour à Berlin je fis une courſe aux montagnes ou carrières à chaux de *Rudersdorf*. Je trouvai ſur la croupe élevée de ces montagnes pluſieurs granits d'un volume prodigieux, & les veſtiges ou les creux dans lesquels d'autres avoient repoſé étoient encore tout frais. Mon conducteur m'aſſura ſur ma demande, que l'inſpecteur des carrières avoit fait déplacer pluſieurs de ces pierres à force de bras, & qu'il les avoit fait tranſporter plus loin avec les pierres calcaires. Cette hauteur qui domine également ſur toute la plaine environnante, a eu ſans doute anciennement la même deſtination que la montagne dite *Corneliusberg* près de *Helmſtädt*.

bourg, de Lunebourg, de Helmſtädt *), de Mansfeld, en différentes contrées du Harz, dans la Thuringe, en Luſace, en Bohème, en Siléſie, dans la Marche de Brandebourg, en Pruſſe &c.; avec cette différence que dans certaines régions on les trouve en plus grand nombre & mieux conſervés, & en d'autres dans un état presqu'abſolu de dégradation & de deſtruction, comme par exemple près du Töppelberg proche Maſſel en Siléſie **), & près de Lichtenberg & Matſchdorf proche Francfort ſur l'Oder ***).

Outre ces monumens ſépulcraux, il exiſte encore des tombeaux d'une plus grande circonférence dans pluſieurs contrées du Nord, leſquels ont beaucoup de reſſemblance avec le célébre monument en Angleterre, appelé *Stonehenge*, ſitué à 6 milles (d'Angleterre) de *Salisbury* dans le *Wiltſhire*. Ce ſont de très-groſſes pierres placées en cercle, & qui deux à deux portent communément une troiſième en travers, en forme d'architrave. Dans l'intérieur du grand cercle il y en a un ſecond & un troiſième concentriques, compoſés de plus petites pierres. *Keysler* †) a conclu avec vraiſemblance du rapport qui ſe trouve entre les monumens ſépulcraux & le *Stonehenge*, que celui-ci ne doit être attribué ni aux anciens Bretons, ni aux Romains, mais aux conquérans poſtérieurs de cette île, aux Anglo-Saxons ou aux Danois ††).

*) La montagne, dite le *Corneliusberg*.

**) Voyez la *Maslographie* de *Hermann*.

***) Voyez la *Deſcription de Francfort ſur l'Oder* par *Beckmann*.

†) *Antiquitates ſelectae ſeptentr. et celticae* &c.

††) Je ne ſuis plus de ce ſentiment, depuis que j'ai lu *le Voyage d'Ecoſſe par Th. Pennant*. Il ſe trouve une grande quantité de ces monumens (ſeulement de moindre grandeur) non ſeulement dans les contrées de l'Angleterre & de l'Ecoſſe où les conquérans du Nord ont pénétré, mais ſurtout dans les régions de cette île & des îles voiſines, où les plus anciens habitans de la Grande-Bretagne ont maintenu leur ſiége, ſavoir en *Cornouaille*, dans le pays de *Galles*, dans l'île d'*Angleſey*, dans les *Hébrides* & dans les montagnes de l'Ecoſſe ſeptentrionale.

On découvre auſſi en Angleterre & dans les petites îles environnantes, des tombeaux & des urnes tout-à-fait ſemblables à ceux des autres peuples du Nord *).

Les maſſes de pierres de ces tombeaux ſont quelquefois d'une grandeur ſi prodigieuſe, que l'on ne conçoit pas comment on eſt parvenu à les mouvoir & à les placer les unes ſur les autres, ſans les connoiſſances requiſes en mécanique. Il paroît que *Stonehenge*, eu égard à la groſſeur du volume des pierres, a la préférence ſur tous les monumens de cette eſpèce. Du reſte, je ſuis du ſentiment de ceux qui ne veulent pas que ces monumens n'*ayent* été deſtinés qu'à l'enſeveliſſement des morts, mais qu'ils ont également ſervi à des aſſemblées ſolennelles & à des ſacrifices. *Keysler* a ſuffiſamment prouvé que les peuples du Nord adoroient des pierres, des arbres & des fontaines comme des génies bienfaiſans, & que dans leur converſion graduelle au chriſtianisme, il a fallu livrer de violens combats & faire couler bien du ſang avant de pouvoir exſtirper en eux ce genre d'idolâtrie.

On voit dans ces collines & ces maſſes informes de pierre des monumens de peuples qui n'avoient point encore atteint un certain degré de culture, & l'on y retrouve intuitivement l'image des monumens des anciens temps héroïques des Grecs & des autres peuples de l'Orient, d'où naquirent par une ſuite des progrès de l'art & d'une culture plus ſoignée, ces obélisques, ces pyramides, ces colonnes, & tant d'autres monumens dignes d'admiration chez les peuples de l'Égypte, de la Grèce & de Rome.

Dans les pays & dans les contrées où l'on trouve ces tombeaux appelés *Hunes*, on obſerve auſſi généralement l'uſage de brûler les morts, & de recueillir leurs os & leurs cendres dans des urnes qu'on dépoſoit ſous terre. Il y a pourtant des cas, mais en petit nombre, où l'on trouve des ſquelettes de cadavres inhumés: mais vu l'uſage

*) Voyez en pluſieurs endroits le *Voyage de Th. Pennant.*

ge général de brûler les morts, il faut attribuer ces ſquelettes à une date poſtérieure.

La manière de dépoſer les urnes ſous terre, de les environner & de les couvrir de pierres, étoit par-tout, autant que j'ai pu l'inférer des différentes relations, la même, & conforme aux deſcriptions que Mr *Kloſe* & moi en avons données. Il y a cependant des exemples où l'on n'y faiſoit pas tant de façons, & où on ſe contentoit d'enfouir ſimplement les urnes.

Il y a des relations qui parlent d'une eſpèce de caveaux ſouterrains de forme voûtée, mais la deſcription qu'on en trouve donne clairement à connoître que ces caveaux n'étoient autres que ces environnemens & ces deſſus de pierre dont j'ai donné la deſcription plus haut. Les peuples du Nord n'avoient aucune idée de ce qui s'appelle conſtruction architectonique; ils apprirent des nations étrangères l'art d'élever des voûtes, & ne parvinrent à cette connoiſſance que long-temps après leur converſion au Chriſtianisme.

Quant à la forme & à la grandeur des urnes ſépulcrales, on trouve que ces peuples n'avoient point de modèle déterminé pour les leurs, & qu'ils faiſoient ſervir à cette fin leurs vaſes & uſtenſiles d'uſage. Les urnes qu'on a déterrées ſont grandes, petites, hautes, baſſes, d'embouchure large & étroite, à anſes, ſans anſes, avec & ſans convercle, ornées & non ornées. La matière eſt une argile noirâtre ou griſâtre, qui n'eſt ni purifiée ni bien cuite. On n'y a jamais remarqué de vernis. On eſtime d'autant plus quelques vaſes en petite quantité de lames de laiton très-minces, qu'on a trouvés ça & là; & ſurtout les ſix d'or, que l'on conſerve dans le muſée royal de Coppenhague, & qu'on a trouvés en 1685, remplis de cendres & d'oſſemens brûlés, en labourant un champ dans l'île de *Munkoe* *).

Il y a des exemples d'une petite urne qu'on a trouvée placée dans une plus grande. On en tire la concluſion que la grande étoit deſtinée

*) *Rodé cimbriſch-holſteiniſche Antiquitäten-Remarques, pag.* 45.

à conſerver les cendres de la mère, & la petite à renfermer celles de l'enfant mort avec elle.

Les uſtenſiles & autres effets que l'on trouve avec les oſſemens dans l'urne ou à côté, méritent un développement & des remarques particulières. Ce point d'antiquité a été traité trop à la légère dans la plupart des auteurs ſusmentionnés, quoiqu'on dût s'en promettre les réſultats les plus importans.

Ces uſtenſiles ſont de diverſes matières, de bronze, de fer, d'or, d'ambre, de verre, de terre cuite & de pierre.

La plupart de ces choſes ayant été réduites en fragmens par le feu, la rouille ou le vert-de-gris, il eſt le plus ſouvent difficile de découvrir leur premier uſage. Cependant, ſi l'on recueilloit avec plus de ſoin ces fragmens, de ſorte qu'on pût les comparer entr'eux, je ne doute pas qu'on ne pût en tirer ſouvent d'utiles conjectures *).

Les uſtenſiles de bronze qu'on trouve le plus ſouvent, ſont des agrafes, des aiguilles de tête, des couteaux recourbés, des raſoirs, des maſſues, des poinçons, des fers de flèches, des lances, des poignards, des épées, ſans oublier les ſoi-diſans éperons, qui ſervoient probablement d'ornemens aux cimiers, des disques de lames de laiton pour couvrir les boucliers, & des ornemens pour les harnois des chevaux. En pierre on y trouve des haches d'armes, des maſſues, des couteaux, des pierres à aiguiſer, des amulètes, des boutons, de petites pierres rondes, d'autres tranchantes pour ſervir de pointes aux flèches & d'armes à la

*) La principale collection dans ce genre que j'aye vue, & qu'on doit aux ſoins de *Chrét. Godefroi Eltester*, ſe trouve actuellement dans la *Mère-loge des trois globes*. M. le *D. Oelrichs* en a fait imprimer le catalogue. Le but du collecteur étoit de compoſer principalement ſon cabinet de monumens de la Marche, c'eſt pourquoi le catalogue eſt intitulé: *Marchia Brandenburgica gentilis*. Cependant il paroit que la plus grande partie de ces monumens eſt tirée des autres contrées de l'Allemagne, & même de pays étrangers.

C'eſt dommage qu'on n'ait indiqué que pour le plus petit nombre des pièces, le lieu où elles ont été trouvées. Cette omiſſion rend, à pluſieurs égards, la collection inutile à l'antiquaire, ſurtout quand ſon but eſt le mien, c'eſt-à dire d'examiner à quel peuple il faut attribuer ces monumens, & à quelle époque il faut les placer?

fronde. Entre autres uſtenſiles de métal on diſtingue des pincettes pour s'épiler le poil, des boucles, des miroirs, des braſſelets, des anneaux; quelques-unes de ces deux dernières eſpèces d'ornemens ſont d'or. Il y a des coraux d'ambre, des vaſes de verre, les uns longs & étroits, les autres petits & ronds, & des perles ou coraux d'un verre bleu. Il y a des fuſeaux, des lampes, de petites patères & d'autres vaſes d'argile, qui ſe trouvent d'ordinaire dans les urnes mêmes.

Nous aurons occaſion dans la ſuite de parler de quelques autres eſpèces d'inſtrumens ou d'uſtenſiles, qu'on prétend avoir découverts dans ces urnes; & en même temps nous examinerons quel prix il faut y attacher en fait d'art.

On peut tirer, de ce que nous venons de voir, la conſéquence qu'on couchoit les hommes armés de pied en cap, les femmes chargées de tous leurs ornemens ſur le bûcher, comme ſur un lit de parade, qu'on les y brûloit, & avec eux des animaux chéris, comme on peut l'inférer des dents de chevaux trouvées dans le même lieu. Ce que le feu n'avoit pas conſumé, on le recueilloit dans les urnes avec les os & la cendre.

Les monnoies, les figures, les inſcriptions lapidaires que l'on a trouvées en partie dans les urnes mêmes, & en partie dans les environs des tombeaux, méritent une attention particulière.

Quant aux monnoies, *Thebeſius* eſt le premier qui nous parle d'une urne, dans laquelle, outre quelques coraux blanchis par le feu, on a trouvé un denier d'argent mince, avec des caractères étranges & indéchiffrables.

Je ne veux pas rejeter directement ce rapport. Mais les caractères en queſtion étoient-ils donc effectivement ſi indéchiffrables, qu'on n'eût pu découvrir du moins avec quels caractères d'écriture ils avoient quelque reſſemblance? & n'avoient-ils aucune figure empreinte? Cette deſcription vague & inſuffiſante nous permet certainement d'admettre que ce prétendu denier d'argent n'étoit autre choſe qu'une petite plaque d'argent baroquement ornée avec des traits, &

peut-être un fragment d'une plus grande pièce qu'on avoit déposée dans l'urne.

Hermann dans sa *Maslographie* nous apprend, qu'on a trouvé en Silésie des monnoies romaines consulaires & impériales jusqu'à Constance, en or, en argent & en bronze, ainsi que des monnoies du moyen âge, tels que des gros de Bohème, & des têtes du Christ *de Val. Corvinus;* mais toutes ces monnoies ont été trouvées par ceux qui labourent & remuent les champs. Quant à celles qu'on doit avoir découvertes dans les tombeaux & dans les urnes, il ajoute: „Ceux qui ont trouvé ces *nummi*, sont morts, mais je sais avec certitude que le *Quintus Curtius* & la *Faustine doivent* s'être trouvés dans des urnes, & quant au *Verus*, c'est moi-même qui l'ai trouvé, quoique je ne sois pas bien d'accord avec moi si ce fut dans l'urne même, ou dans le sable qui s'ébouloit autour."

Ce langage consciencieux mais vague se trouve aussi dans quelques passages de la lettre de M. *Klose*, où il est question des monnoies qui ont été trouvées. Dans sa réponse à la question, il dit à la vérité directement qu'on trouve des monnoies dans les urnes. Nro 5, il ajoute: „ces monnoies sont grossièrement travaillées, & il y en beaucoup plus de cuivre que d'argent;" Nro 6, il dit: „Je suppose que les anciennes monnoies que l'on trouve quelquefois sur les hauteurs en labourant, étoient aussi anciennement renfermées dans des urnes que la charrue a brisées." Nro 5 il s'explique avec encore plus de précision quand il dit: „Nous trouvons dans les vestiges de leurs sépultures plusieurs effets qui étoient manifestement des fabrications romaines, comme p. ex. les monnoies."

Mais si M. *Klose* n'est pas lui-même dans le doute à cet égard, pourquoi ne fournit-il pas un fait précis & déterminé? pourquoi ne nous apprend-il rien de l'empreinte de ces monnoies? pourquoi, cherchant (Nro 5 de ses réponses) à déterminer la nation & l'époque à laquelle appartiennent ces urnes, ne se sert-il pas pour établir ses preuves, de ces monnoies qui les rendroient sans réplique?

Quant à celles qu'on prétend avoir trouvées dans les urnes sépulcrales de la Marche, on lit dans les *Mémoires de Brandebourg* un passage remarquable qui les concerne *). Il est trop important pour ne pas l'inférer ici en entier.

„Quoi qu'en ayent dit des historiens, il n'en est pas moins vraisemblable que les Romains passèrent l'Elbe malgré les Suéves; car on a découvert auprès de Zossen, à 6 milles de Berlin, dans un champ carré de huit-cents pas, quantité d'urnes pleines de médailles de l'empereur Antonin & de l'impératrice Faustine, & de quelques affiquets dont se paroient les dames romaines. Ce n'est pas assurément un champ de bataille, car les Suéves n'auroient pas enfoui sous terre l'argent de leurs ennemis pour honorer leurs funérailles; on peut en conjecturer, ce me semble, avec certitude, que ce lieu servit de camp à quelques cohortes détachées, auxquelles les Romains avoient fait passer l'Elbe, pour être avertis des mouvemens & de l'approche des Barbares."

Autant que j'ai pu l'apprendre par tradition, cette découverte d'urnes sépulcrales eut lieu dans le voisinage de *Zossen*, vers le milieu de ce siècle. Mais en accordant même qu'on y ait trouvé des monnoies romaines en aussi grande quantité, on ne pourroit pas accorder avec la même facilité la conséquence qu'on veut en déduire, que c'étoient-là les tombeaux des cohortes romaines détachées & stationnées en cet endroit. Car d'abord, ce n'étoit pas l'usage chez les Romains de remplir de monnoies leurs urnes sépulcrales, & on n'en a jamais découvert aucune qui en renfermât; ensuite il est manifestement contraire à la foi de l'histoire de prétendre que les Romains ayent jamais pénétré jusques dans ces contrées & soient parvenus à cette partie de l'Elbe. Marc-Aurèle qui combattit avec tant de succès les Quades & les Marcomans, paroit n'avoir jamais poussé ses exploits jusqu'à l'*Erzgebirge*. J'aimerois mieux prendre ces urnes pour les sépultures des habitans Suéves d'alors, qui à l'aide du commerce, ou ayant fait quelque butin heureux, se seront procuré ces monnoies. D'ailleurs, l'argent n'ayant presque aucun

*) P. 45. *Des moeurs et des coutumes. Edit. in 4to.*

prix pour ceux d'entre les Germains qui étoient les plus éloignés des frontières romaines, il ſe peut que ces monnoies ayent été dépoſées comme une eſpèce de trophée, dans l'urne du vainqueur.

Mais il y a dans la narration même pluſieurs traits qui font douter qu'on ait trouvé tant de monnoies romaines à la fois. Et d'abord, une découverte de cette importance n'auroit-elle pas réveillé l'attention d'un ſavant indigène & patriote, comme p. ex. celle de l'infatigable *Möhſen*, pour nous en fournir une relation détaillée? Enſuite, ces monnoies que ſont-elles devenues? n'avoient-elles d'autre empreinte que celle d'*Antonin* & de ſon épouſe? de quel métal étoient-elles? de quelle eſpèce, les ornemens de femmes qui ſe trouvoient en même *lieu*? Le manque de lumières ſur tous ces points nous fait craindre que ce ne ſoit quelque brocanteur ruſé, qui profitant de la circonſtance de quelques urnes ordinaires découvertes à *Zoſſen*, aura réuſſi à ſe défaire avantageuſement de ſes monnoies & brinborions antiques, en les vendant à un prince dont il étoit généralement connu qu'il aimoit ces curioſités, & qu'il y attachoit du prix. Ou ne ſe peut-il pas que le roi ait confondu la fameuſe découverte des monnoies romaines qu'on venoit de faire presque en même temps dans le bailliage d'*Oſterode* en Pruſſe, & dont nous parlerons dans la ſuite, avec celle de *Zoſſen*? Cependant, comme il y a ſans doute encore dans cette dernière ville des témoins oculaires de ce fait, je m'en réfère entièrement à eux & aux renſeignemens qu'ils voudront bien me donner.

Bartholin, *Arnkiel*, *Major* & *Rode* font mention de monnoies trouvées dans les états Danois. Mais en examinant de près leurs rapports, on a peine à s'aſſurer ſi ces monnoies ont été effectivement trouvées dans les urnes; & d'ailleurs, ces monnoies étant non ſeulement romaines, mais auſſi gauloiſes, arabes, britanniques, & à ce qu'*Arnkiel* croit, en partie chargées de caractères runiques, il étoit indiſpenſable qu'on eût indiqué exactement les endroits où on les a trouvées. *Major* dans ſon ouvrage intitulé: *Das bevölkerte Cimbrien* *), eſt le ſeul

*) *Chap.* 16, *pag.* 72, & *Chap.* 17.

qui parle avec précision des monnoies impériales, depuis *Veſpaſien* jusqu'à *Antonin*, lesquelles furent découvertes dans une colline ſépulcrale, lorsqu'on étendit en 1691 les fortifications de Rendsbourg.

Il n'y a que les relations de la Pruſſe, où l'on a de tout temps fait beaucoup de découvertes de monnoies antiques, qui nous apprennent poſitivement qu'on les ait trouvées dans des urnes. *Hartknoch* cite à ce ſujet l'ancienne chronique de *Schatzius*; & la *Pruſſe expliquée*, dont *Bock* nous fournit des extraits *), en allègue pluſieurs exemples.

En 1733 on a trouvé dans un tombeau deux monnoies de bronze d'*Alexandre Sévère*: en 1745 près de Danzig, dans une urne, trois monnoies d'argent de *Domitien* & d'*Adrien*; en 1783, en faiſant la découverte de pluſieurs urnes, avec pluſieurs morceaux de métal, une monnoie de l'empereur *Commode*.

Outre ces monnoies romaines on trouva auſſi dans une urne une médaille du grand-maître *Kuchmeiſter de Sternberg*, qui régna depuis 1413 jusqu'en 1442.

Voilà les ſeuls exemples parvenus à ma connoiſſance de monnoies trouvées effectivement dans des urnes.

Il n'eſt pas rare d'en découvrir dans les champs qu'on labour, ſurtout en Pruſſe, & parmi ces découvertes il y en a eu de très-importantes. C'eſt ainſi qu'en 1740 on trouva dans le bailliage d'*Oſterode* 1123 monnoies romaines d'argent à la fois, depuis *Néron* jusqu'à *Septime Sévère*, dont néanmoins la plupart portoient l'empreinte d'*Adrien* & d'*Antonin le pieux*. Cette collection a été depuis acquiſe pour le compte du cabinet royal des médailles. Il y a à *Königsberg* pluſieurs cabinets particuliers très-conſéquens, compoſés principalement de monnoies trouvées dans le pays même. Outre les monnoies romaines, & quelques-unes grecques en petit nombre, on y a trouvé ſucceſſivement des monnoies d'or de Byzance, des Gaules, de la Germanie, (ſurtout ſous le règne des *Othons*) de la Grande-Bretagne, du

*) Hiſtoire naturelle de la Pruſſe, Tom. 2, pag. 550 & ſuiv. Je ne connois point l'ouvrage de *Bayer, des monnoies romaines trouvées en Pruſſe.*

Danemark, d'Arabie, de Pruſſe ſous les grands-maitres, & une grande quantité de gros de Bohème *).

Je paſſe aux monumens figurés, qu'on dit avoir trouvés dans les tombeaux du Nord.

Treuer, dans un traité particulier, rapporte la découverte qui s'eſt faite à Potsdam en 1728, de pluſieurs urnes, à côté desquelles, entre autres objets, on a trouvé un petit groupe de bronze repréſentant un homme & une femme. Il en a joint le deſſin à ſon ouvrage, & s'imaginant y voir la repréſentation la plus ancienne du coſtume teuton, il prend occaſion d'en faire une deſcription très-ſavante. Mais l'inſpection ſeule du deſſin prouve diſtinctement que le monument eſt du XIV ou XVème ſiècle, & que c'eſt un ouvrage de l'art ſoi-diſant gothique.

Treuer pouvoit d'autant plus aiſément s'y tromper, qu'il ne ſavoit d'autres circonſtances & d'autres détails de cette découverte, que ceux que ſon ami, le docteur *Heiſter*, lui avoit appris. Celui-ci, propriétaire du monument, l'avoit reçu en don d'un certain colonel de *Marwitz*, ſur la terre duquel l'urne avoit été trouvée. Ce qui rend l'erreur du profeſſeur *Treuer* encore plus pardonnable, c'eſt que parmi d'autres morceaux dont M. de *Marwitz* avoit fait préſent à M. *Heiſter*, il y en avoit pluſieurs de la nature de ceux qu'on trouve communémens dans les tombeaux de la Marche.

Je crois pouvoir m'épargner la preuve que ce monument appartient au XIV ou XVème ſiècle, & non aux temps antérieurs où la Marche étoit occupée par les peuples Suéves ou Vénèdes.

Il

*) Je place ici une relation de monnoies découvertes, dont une grande partie a paſſé ſous mes yeux.

On fit au mois d'octobre 1795, dans le bailliage de Putzig dans la Pruſſe occidentale, en effartant des broſſailles, en plaine terre, à deux pieds environ de profondeur, & à quatre pieds de diſtance d'une groſſe pierre, la découverte de 150 piéces d'or, l'une du prix de quatre écus d'Allemagne. Elles portoient l'empreinte des empereurs *Marcien*, *Zénon*, *Léon*, *Théodoſe*, *Baſilic*, & ſurtout d'*Anaſtaſe*.

On a inſéré le procès verbal dreſſé juridiquement à cette occaſion, dans les *Annales de la Monarchie Pruſſienne*, année 1799, cahier de juillet.

Il ſuffit, au reſte, d'avoir puiſé dans les auteurs latins la connoiſſance du plus ancien coſtume germain & ſarmate, & d'en avoir vu la délinéation dans les monumens romains, & ſurtout dans les deux colonnes *Trajane* & de *Marc-Aurèle*, pour ſe convaincre combien il diffère de celui-ci. D'ailleurs, l'état de l'art & le coſtume des peuples de la Germanie du XIV & XV ſiècle, ſont trop connus pour pouvoir s'y tromper.

Ce que *Rode* *) rapporte d'un très-petit buſte d'argile, découvert dans les tombeaux de Holſtein, mérite à peine d'être cité. Le deſſin qu'il y a joint a tout auſſi peu la reſſemblance d'un viſage, que ces têtes de pain que les enfans pétriſſent pour s'amuſer.

Bock parle de trois idoles, trouvées en Pruſſe, & dont il poſſédoit lui-même deux. Mais comme elles n'ont pas été découvertes dans les tombeaux, elles n'appartiennent pas ici, & quant à ce qu'il rapporte de la figure d'un *Horus*, qui doit avoir été effodié d'un tombeau, la figure de cet *Horus*, auſſi bien que ſon effodiation, ſont l'une & l'autre très-incertaines & deſtituées de preuves.

La découverte la plus importante d'idoles du Nord eſt inconteſtablement celle que *Maſch* **), & après lui le comte *Jean Potocki* ***) ont décrite. Elles ont été trouvées en 1697 à *Prilwitz* dans le pays de Meklenbourg par le paſteur *Sponholz*, & on les a tenues long-temps cachées à *Neu-Brandebourg*, où une partie ſe trouve encore dans la maiſon *Sponholz*, tandis que le reſte a été transporté dans la bibliothèque de *Ratzebourg*. Quoique leur authenticité ne ſoit pas hors de tout doute, ce point conteſté n'influe nullement ſur l'objet de ces recherches, puisque ce n'eſt pas dans des tombeaux qu'elles ont été trouvées. Il ſeroit ſuperflu d'entrer ici par rapport à elles dans de plus grands détails.

*) *Cimbriſch-Holſteiniſche Antiquit.-Remarques.*

**) *Gottesdienſtliche Alterthümer der Obotriten.*

***) Voyage en Baſſe-Saxe, en l'an 1794.

Nous n'avons point encore, que je ſache, des notices préciſes & ſûres de monumens figurés trouvés dans les tombeaux du Nord.

Quant aux inſcriptions lapidaires, il n'y en a dans le Nord d'autres que les runiques. On ſait à quel âge reculé pluſieurs auteurs font remonter ces caractères, tandis qu'il eſt manifeſte que ce ne ſont que des variétés de l'alphabet grec, & ſurtout du romain. D'autres ont voulu, par cette raiſon, retrancher beaucoup de leur ancienneté, & prouver que cette écriture n'a pas été connue avant l'établiſſement du Chriſtianisme, chez les habitans du Holſtein, du Schleswig & des poſſeſſions ſuédoiſes & danoiſes *). Cependant il y a des pierres avec des inſcriptions, qui ſe rapportent au culte païen des Danois **); ce qui pourroit peut-être s'expliquer par la converſion lente de ces peuples du Nord, & par leurs fréquentes rechutes dans l'idolâtrie; rien n'empêchant alors qu'ils ne ſe fuſſent ſervis pour des inſcriptions païennes, de ces caractères introduits parmi eux avec la première connoiſſance du Chriſtianisme. J'ajoute ſimplement encore que les idoles trouvées à *Prilwitz* ſont chargées d'écriture runique. *Maſch* place leur fabrication dans le XIème ſiècle; cependant on pourroit agiter la queſtion, ſi les caractères runiques ont paſſé des habitans des côtes en deçà de la mer Baltique chez les Danois & les Suédois, ou ſi c'eſt le contraire? Il ſe pourroit bien qu'on décidât la queſtion en faveur des Vénèdes, puisque les caractères que portent les idoles de *Prilwitz* paroiſſent moins gâtés que ceux qu'on trouve ſur les monumens de ces autres peuples ***).

Après ces données préalables & ces explications néceſſaires, nous pouvons poſer avec plus de préciſion la queſtion: A quelle époque

*) Voyez les *Lettres de Sperling* dans les *Cimbriſch-Holſteiniſche Antiquitäten-Remarques*, pag. 401.

**) V. *Keysler* & autres.

***) Je n'ai eu connoiſſance de l'*Hiſtoire générale du Nord* par l'illuſtre & profond M. *Schlözer* qu'après avoir achevé mon mémoire. Je m'aperçois après coup que le réſultat de mes recherches diffère (comme on verra à la fin) à pluſieurs égards de celui de ce ſavant. Cependant je vois que dans la ſection VIII où il traite des antiquités runiques, ſes idées ſont eſſentiellement conformes aux miennes.

étoit-ce l'uſage chez les peuples du Nord de brûler leurs morts? & faut-il attribuer ces monumens ſépulcraux & ces urnes, ainſi que les uſtenſiles qui y ſont contenus, à des peuples de la même race, ou à des nations différentes?

L'uniformité frappante dans l'arrangement extérieur & intérieur des tombeaux, la reſſemblance extrême dans la fabrication des urnes, & la conformité des uſtenſiles qu'elles contiennent, ne permet presque point de douter que ce ne ſoit à des peuples d'une même tribu, ayant les mêmes moeurs & uſages, & parvenus au même degré de culture, qu'il faille attribuer ces monumens.

Ceci admis ou ſuppoſé comme fondé, il ne peut y avoir à cet égard que trois hypothèſes; ſavoir que ces monumens appartiennent ou aux Romains, ou aux Slaves, ou aux anciens peuples de la Germanie. Les auteurs ſe partagent entre ces trois hypothèſes, & ſurtout entre les deux dernières, tant ceux qui ont écrit au ſiècle paſſé, que ceux qui ont travaillé récemment ſur ce ſujet.

L'hypothèſe que ces monumens ſont d'origine romaine paroît la plus facile à réfuter. Auſſi n'eſt-il parvenu, excepté les *Mémoires de Brandebourg*, aucun ouvrage à ma connoiſſance, où elle ait été établie.

Il n'y a qu'à conſidérer que ces urnes & ces tombeaux ſont trouvés principalement dans des pays & des contrées où les Romains ne ſont jamais parvenus, ou n'ont fait, tout au plus, que des excurſions paſſagères. Mais en convenant que ce peuple puiſſant ait étendu ſa domination jusqu'à la totalité du rivage de l'Elbe, & qu'il ait même fait des excurſions ſur la rive droite de ce fleuve, que gagneroit par là cette hypothèſe? Les urnes ſépulcrales ſe trouvent également le long de l'Oder, ſur les côtes de la mer Baltique, ſur les deux rives de la Viſtule, & dans les pays au-delà de la Baltique.

En ſecond lieu, ſi ces tombeaux & ces monumens étoient de fabrication romaine, ils tomberoient dans l'époque la plus brillante de l'art chez ce peuple. Mais excepté un petit nombre de pièces qui portent l'empreinte de fabrication romaine, tout le reſte eſt l'ouvrage d'un

peuple pauvre, rude & groſſier, à peine parvenu au plus bas degré de culture en fait de l'art.

Nous n'avons, ainſi que je l'ai montré, que peu d'exemples conſtatés des monnoies romaines trouvées dans les urnes ſépulcrales. Et quand même nous en aurions davantage, ils prouveroient tout auſſi peu en faveur des tombeaux romains, que le petit nombre d'uſtenſiles qui s'y trouvent & qui portent l'empreinte de l'art des Romains.

Nous paſſons à l'examen de la ſeconde hypothèſe, celle qui attribue ces urnes ſépulcrales, du moins en partie, aux peuples Slaves. Parmi les auteurs qui ſont de ce ſentiment, on compte *Mellen*, *Schurzfleiſch*, *Olearius*, & parmi les modernes *Maſch*, *Anton*, *Bienenberg*, *Dobrowsky*, *Jean Potocki* & autres.

Autant qu'il nous eſt permis de remonter avec quelque aſſurance dans l'hiſtoire des peuplades du Nord, nous trouvons que les *Sarmates* & les *Vénèdes*, qui dans la ſuite des temps ſont plus connus ſous les noms de *Slaves* & *Wendes*, ont été les voiſins orientaux conſtans des peuples de Germanie. Mais les Germains & les Sarmates ont été de tout temps reconnus comme deux tribus de peuples qui ſe diſtinguoient entre elles par le langage, les moeurs & les uſages. On peut regarder la Viſtule comme une eſpèce de ligne de démarcation entre ces deux peuples.

Les migrations des tribus germaniques, qui pénétroient de tous côtés dans les provinces romaines, dépeuplèrent peu-à-peu leurs anciennes habitations, dans leſquelles les remplacèrent ſucceſſivement les tribus Slaves. Celles-ci s'étendirent du nord au midi, & pouſſèrent juſqu'à la mer Adriatique; du côté de l'oueſt elles s'emparèrent non-ſeulement, du moins en partie, (comme on croit communément) des côtes de la Baltique, mais s'étendirent plus loin encore ſur la rive gauche de l'Elbe, & pénétrèrent juſqu'en Franconie, en Thuringe & dans le pays de Lunebourg. De cette manière, ces peuples s'étoient rendus maîtres au VI ſiècle de preſque tous ces pays de la Germanie, où l'on trouva, comme nous l'avons vu ci-deſſus, dans les temps poſté-

tieurs, des urnes ſépulcrales en ſi grande quantité. Vers l'embouchure de l'Elbe ils devinrent les voiſins contigus des Anglo-Saxons & des Cimbres, avec leſquels ils ſemblent avoir vécu en bonne harmonie juſqu'au temps de Charlemagne.

Les Vénèdes & les Slaves, maîtres de la plus grande partie des pays germaniques où l'on trouve de ces urnes, & s'y étant maintenus pendant pluſieurs ſiècles par une ſuite de l'opiniâtreté & de la perſévérance avec laquelle ils combattoient pour les uſages de leurs ancêtres & contre l'établiſſement du Chriſtianisme, pluſieurs auteurs ſe ſont crus autoriſés à attribuer ces tombeaux, ces monumens, ces urnes aux peuples Slaves.

Le ſecond argument ſur lequel ſe fonde cette hypothèſe, eſt la fauſſe ſuppoſition de quelques auteurs qui placent les *Hérules* & les *Vandales* parmi les *Slaves* & les *Vénèdes*, tandis que ces premiers peuples ſont d'origine germanique. En conſéquence de quoi, on a appliqué à toute la nation Slave & Vénède ce qui eſt dit en particulier des moeurs & des uſages des *Hérules* & des *Vandales*.

Cependant il y a encore des argumens plus forts qui ſemblent parler en faveur de cette hypothèſe, comme on le verra par les paſſages ſuivans.

Le premier de ces paſſages ſe trouve dans une lettre de *Boniface*, archevêque de Maïence, lequel dit: „Les *Winedi* (Vénèdes) obſervent la foi conjugale ſi conſciencieuſement, qu'une femme refuſe de ſurvivre à ſon mari, & celle qui ſe donne la mort de ſa propre main pour être brûlée ſur le même bûcher que ſon mari, eſt réputée digne des plus grands éloges *)."

Le ſecond paſſage ſe trouve dans *Ditmar* de *Merſebourg*. Il parle de *Boleslas*, premier roi de Pologne, qui régnoit en même temps ſur les Vénèdes ſitués entre l'Elbe & la Baltique, & ſur les Pruſſiens; & ajoute: „Que du temps de ſon père, lorſqu'il étoit encore païen, les femmes étoient dans l'uſage de s'égorger elles-mêmes, pour que leurs

*) *Epiſt.* 19.

cadavres fuſſent portés à la ſuite de ceux de leurs maris, & conſumés enſemble ſur le même bûcher" *).

Le troiſième paſſage ſe rapporte aux Pruſſiens, & ſe trouve dans *Dusbourg*. Voici ſes propres termes: **) „On brûloit avec le cadavre des perſonnes de diſtinction leurs armes, leurs chevaux, leurs eſclaves, hommes & femmes, leurs vêtemens, leurs chiens de chaſſe, leurs faucons, & en général tout ce qui appartenoit à leur vie guerrière. Quand on brûloit les perſonnes du peuple, le même bûcher conſumoit ce qui ſervoit à déſigner l'état & la profeſſion du défunt. Car on croyoit que les choſes brûlées reſſuſciteroient avec eux, & ſerviroient de nouveau à leur uſage."

Dusbourg remarque dans le même paragraphe, que les Pruſſiens avoient coutume d'acheter leurs femmes pour une certaine ſomme d'argent, & qu'ils les traitoient comme leurs eſclaves. Il eſt donc probable que notre chroniqueur a voulu comprendre ſous les femmes eſclaves qu'on brûloit enſemble avec le cadavre du maître, les épouſes du défunt.

Quant à l'uſage de brûler les morts en Pruſſe, le bref du pape aux chevaliers de l'Ordre teutonique eſt très-remarquable; il leur y eſt ordonné: „de ne plus permettre à l'avenir que les habitans de *Pomézanie, Warmie* & *Natange*, (trois provinces de la Pruſſe) brûlaſſent leurs morts avec leurs eſclaves, leurs chevaux & leurs uſtenſiles, & qu'ils enterraſſent les cendres dans leurs champs ***).

L'exemple cité ci-deſſus de la médaille du grand-maître de *Sternberg*, trouvée dans une urne cinéraire, peut auſſi ſervir de preuve que ce bref papal n'étoit pas ſuperflu, & que les Pruſſiens convertis par le glaive au Chriſtianisme penchoient encore toujours en ſecret vers leurs uſages & leurs rites païens.

*) *Chronic. Lib. ult.*

**) *Chron. Pruſſ. pars* 3, *cap.* 5.

***) *Dregeri Codex Pomeraniae.*

Mais qui étoient les *Winedi* de Boniface? & quel peuple étoient les Pruſſiens? ſont-ils d'origine ſlave ou germanique? ou ſont-ce des peuples d'une ſouche particulière?

Nous commencerons par rechercher l'origine des Pruſſiens.

L'hiſtoire de ce peuple étant très-compliquée, & problématique à pluſieurs égards, je m'arroge d'autant moins une voix déciſive ſur ce point, que les bornes étroites de ce mémoire ne me permettent aucun développement détaillé. Voici les idées principales qui me ſont venues dans le cours de mes recherches.

D'après *Tacite* *) les *Eſtyens* (Aeſtyi) habitoient les régions de la Pruſſe d'aujourd'hui. Ils reſſembloient aux *Suéves* pour la figure & pour les uſages; leur langue approchoit plus de celle des Bretons; ils étoient des cultivateurs plus laborieux que la pareſſe habituelle des autres *Germains* ne le comportoit; ils naviguoient ſur mer, & étoient les ſeuls qui recueilliſſent dans les bas-fonds & le long des côtes l'ambre, qu'ils appeloient *gleſum*, *glaeſum* ou *gleſſum*.

On apprend diſtinctement de *Pline* **), que les Grecs avoient longtemps avant les Romains, connoiſſance de la Pruſſe à cauſe du commerce de l'ambre.

Pytheas place les *Guttoni*, peuple de la Germanie, le long des côtes de l'ambre. *Timée* & *Mithridate* font habiter ces côtes par des peuples Germains. Mais ce ne fut que ſous le règne de Néron que la choſe ceſſa d'être douteuſe, puiſqu'alors un chevalier romain entreprit tout exprès le voyage de la côte d'ambre, & en rapporta à Rome dans une quantité dont on n'avoit pas eu d'idée avant lui, de manière que dans des jeux des gladiateurs que *Julien* donna au nom de l'empereur, les filets qui environnoient le *podium* pour en tenir éloignées les bêtes ſauvages, en étoient bordés en guiſe de boutons. Les armes, & en général tout l'appareil de l'amphithéâtre étoit ce jour-là orné de cette production de la mer Baltique.

*) *De moribus Germanorum*, vers la fin.
**) *Hiſtor. Natur.* L. 37, C. 11 & 12.

Ces *Guttoni* ſont ſelon toute apparence les mêmes que les *Eſtyens* de *Tacite*, & tous deux des noms d'espèces de la grande nation des Goths. *Caſſiodore* fait auſſi mention des habitans des côtes d'ambre, ſous le nom des *Heſtiens*, & l'on voit par la lettre *) dans laquelle *Théodoric* roi des Oſtrogoths les remercie de la proviſion d'ambre qu'ils lui avoient envoyée, que ces deux peuples tenoient à la même origine **).

Jornandès, qui écrivit quelque peu plus tard que *Caſſiodore*, appelle ceux qui habitoient de ſon temps l'embouchure de la Viſtule, & qui étoient un mélange de différens peuples, *Vividarii* ***). Mais la côte voiſine de la mer étoit occupée par les *Itemeſti* ****), qui ne peuvent être autres que les *Aeſtyi* ou *Eſtyens*; car plus bas il fait mention des *Haeſti* †), comme d'un peuple qui occupoit une grande partie des côtes de l'océan germanique. *Eginhart* ††) range au neuvième ſiècle, les *Haeſti* ou *Heſtiens*, au nombre des peuples qui habitent les côtes méridionales de la Baltique.

Des relations ou chroniques Slaves poſtérieures †††) confirment que ces *Aeſtyi* ou *Haeſti* ſont une branche des Goths.

D'après l'énumération de ces données il n'eſt guères plus poſſible de douter

1°. que les côtes de la Pruſſe d'aujourd'hui ont été habitées anciennement par des peuples de race germanique;

2°. que

*) *Caſſiodore*, L. V. *Varior. Epiſt.* 2.

**) Il dit au commencement de ſa lettre: *Illo et illo legatis veſtris veniantibus grande vos ſtudium notitiae noſtrae habuiſſe cognovimus, ut in oceani litoribus conſtituti, cum noſtra mente junganmini*, &c. *Mente* eſt ici viſiblement une faute de copiſte, au lieu de *gente*, qui forme un ſens naturel.

***) P. 98.

****) Je propoſe ici une correction dans le texte, en liſant au lieu de *ripam oceani itemeſti*, comme il porte, *ripam oceani iſtius Aeſti*, ce qui donne un ſens clair & lié avec ce qui précède.

†) P. 103.

††) *De vita Caroli M. C.* 12.

†††) *Hartknoch de rebus Pruſſ. diſſert. II, C.* 10.

2°. que ces peuples n'abandonnèrent jamais leurs habitations, du moins jamais entièrement;

3°. & que conséquemment, les Prussiens subjugués & convertis par les chevaliers de l'Ordre teutonique, étoient en grande partie les descendans des *Æstyens*, quoiqu'il ne soit pas invraisemblable à mes yeux que les *Vividarii* de *Jornandès*, & une partie des *Vénèdes* ou *Venedi*, peut-être Sarmates d'origine, se soient mêlés & confondus avec eux.

La confirmation ultérieure de leur origine teutonique se trouve dans la configuration, la langue & les usages des Prussiens. La description qu'*Helmold* *) fait de la couleur des yeux, du teint & des cheveux des Prussiens de son temps, prouve évidemment qu'ils sont issus de la Germanie. En comparant avec cette description celle que *Procope* **) nous a laissée des Slaves, on pourra se convaincre de la différence du caractère de ces deux nations.

La langue des anciens Prussiens ne diffère pas moins essentiellement de celle des Slaves. *Hartknoch* ***) reconnoît dans l'idiome des Prussiens, des Lettes, & d'un peuple habitant le Meklenbourg & connu sous le nom de *Veruli*, la même langue.

Les échantillons qu'il nous donne de la langue prussienne, lette & vérule, ne diffèrent entr'eux que par le dialecte; on trouve dans toutes les trois un mélange des langues germanique, slave, grecque & latine.

Il doit être plus difficile de distinguer le germain des autres langues, puisque *Tacite* remarque déjà que la langue des *Æstyens* se rapproche de la langue bretonne. Des termes de la langue slave s'y mêloient par le voisinage de ces peuples.

On sera moins surpris de rencontrer du grec & du latin dans cette langue, quand on aura considéré que les *Æstyens* étoient long-temps avant de connoître les Romains en commerce avec les Grecs, à cause de l'ambre; & la quantité de monnoies byzantines qu'on trouve en

*) *Chronica Slavorum*, L. I. C. 1.
**) *De bello Gothico*, L. III. C. 14.
***) *De rebus Prussicis*, *dissert.* 5.

Pruſſe, prouve que ce commerce n'a pas même ceſſé ſous les empereurs grecs.

Les relations des Romains avec les Eſtyens ſemblent avoir été encore plus étroites & plus étendues. Ce qui le prouve c'eſt la grande quantité de monnoies romaines, que l'on trouve continuellement en Pruſſe. Or on ſait avec quelle facilité un peuple barbare adopte les mots, & même les tours & les inflexions de la langue d'un peuple policé, d'autant plus qu'on voit par le témoignage de *Pline* & de *Tacite* que les Eſtyens transportoient eux-mêmes leurs marchandiſes jusques ſur la frontière romaine. La lettre latine de *Théodoric* aux *Heſtiens*, ſes alliés d'origine, en eſt une nouvelle preuve; il devoit y avoir parmi eux des perſonnes qui ſuſſent le latin, pour pouvoir en interpréter le contenu aux autres.

Il me ſemble que de cette manière nous avons réſolu jusqu'à un certain point le problème de ce mélange des langues. Nous rencontrerons dans la ſuite d'autres traces, à l'aide desquelles nous parviendrons peut-être à le réſoudre d'une manière encore plus ſatisfaiſante.

On a prouvé plus haut l'uſage établi parmi les Pruſſiens de brûler les cadavres. On ne ſauroit guères douter que ce même uſage n'ait ſubſiſté chez les *Eſtyens*, ne fût-ce que par la raiſon qu'ils ſont d'origine germanique. Mais ce qui nous en fournit la preuve palpable & évidente, ce ſont les monnoies romaines des empereurs du premier & ſecond ſiècle, qu'on a trouvées dans des urnes ſépulcrales.

On n'a point trouvé en Pruſſe des monumens avec des inſcriptions ſoit en caractères runiques, ſoit en caractères d'une autre eſpèce. Cependant la lettre de *Théodoric* ſemble prouver que les *Heſtiens* avoient quelque connoiſſance de l'écriture. Mais la barbarie univerſelle ſous laquelle gémiſſoit le moyen âge, ſemble avoir auſſi effacé ce foible commencement de culture chez les deſcendans des *Eſtyens*. Car *Dusbourg* dit poſitivement: „Rien n'étonnoit d'abord autant les Pruſſiens, que la manière de communiquer ſes idées à un autre homme par lettres *)."

*) *Chron. Pruſſ. P.* 3. *C.* 5.

Je paſſe aux *Winedi* de *Boniface*. Ce peuple eſt tout auſſi peu d'origine ſlave que les Pruſſiens; c'eſt un peuple de la Germanie, amalgamé dans la ſuite avec une partie des Slaves. Je n'ignore pas que les chroniques du moyen âge ont quelquefois compris ſous ce nom tous les peuples ſlaves; mais ce ſont en particulier les *Vénèdes* le long des côtes de la Baltique qu'il faut entendre par là *). *Helmold* **) comprend ſous ces Vénèdes les *Warnavi*, les *Veruli* & les *Winuli*. Ces trois noms déſignent des peuples germains. Les premiers ſont les *Varni* ou *Varini*; les ſeconds les *Heruli*; & les *Lombards* ou *Longobardes* étoient connus depuis long-temps ſous la troiſième dénomination.

Les *Varni* ou *Varini* qui habitoient les côtes de la mer Baltique ***), ſont probablement les reſtes des Bourguignons reſtés dans leur patrie-mère. Ils étoient aux ſixième ſiècle, auſſi bien que les *Hérules* qui habitoient alors la Marche de Brandebourg, alliés de *Théodoric*, roi des Oſtrogoths †).

Les Hérules, reconnus pour être une des nations les plus braves, ſemblent avoir tiré leur origine du fond du Nord ††). Leur principale défaite eut lieu vers la fin du V ſiècle, où ils furent vaincus par les Lombards, ces deux peuples occupant alors en commun les contrées de l'Autriche d'à préſent †††).

Ceux qui échappèrent à cette défaite ayant été obligés d'évacuer leurs demeures, une partie de ces fugitifs traverſa le pays ſlave, où on les laiſſa tranquillement paſſer, & gagna les côtes de la Baltique, où elle parvint juſqu'aux *Varni*, de là juſqu'aux *Dani* ou Danois, & s'embarqua plus loin pour le Nord ††††).

*) *Jornandes de rebus Goth. p.* 85, & *Helmold C.* 2.

**) *Ch.* 2.

***) *Procop. L. IV, C.* 20.

†) *Eckard de rebus Francicis, L. IV, C.* 8.

††) *Jornandes, p.* 83.

†††) *Procop. L. II, C.* 24. & *Paulus Diaconus de geſtis Longob. L. I, C.* 20.

††††) *Procop. L. II, C.* 15.

Il eſt probable qu'une partie de ces *Hérulſ* ſe fixèrent au milieu des *Varni*, ou y retournèrent dans la ſuite, ayant été rechaſſés du Nord par les Danois *), & de cette manière ils purent effectivement être avec les *Varni*, les alliés du roi *Théodoric*.

Pour ce qui concerne les *Winuli* ou *Winili*, qui étoit le nom générique & originaire des Lombards **), lors de la migration de ce peuple, une partie ſera probablement reſtée en poſſeſſion de ſes anciens établiſſemens entre l'Elbe & l'Oder. Nous voyons auſſi que tandis que la tribu principale s'étoit établie le long de la rive droite du Danube, avant qu'elle s'étendît en Italie, il y eut de la *désunion* entre les chefs, & que *Riulfe*, craignant la ſupériorité de *Vacès*, ſe réfugia avec ſon parti chez les *Varni* ***).

Ces données hiſtoriques ſont une preuve manifeſte que les peuples de la Germanie n'ont jamais entièrement évacué le pays ſitué ſur la Baltique entre l'Elbe & l'Oder, & probablement jusqu'à la Viſtule. Il n'y a aucune trace dans l'hiſtoire, que les Slaves qui leur ont ſuccédé les ayent expulſés; tout ce qui devient vraiſemblable, c'eſt que l'arrivée de ces nouveaux hôtes les a comprimés un peu plus vers les côtes de la mer, jusqu'à ce qu'enfin ces deux nations ont été fondues & amalgamées enſemble ſous le nom commun de *Winidi*, *Winidae*, *Winuhi*, *Winuli* ou *Vénèdes*.

Après ces prémiſſes j'eſpère de pouvoir réſoudre naturellement quelques phénomènes problématiques dans l'hiſtoire de ce peuple.

Je compte d'abord parmi ces phénomènes les idoles trouvées à *Prilwitz*, dont *Maſch* attribue les unes aux Germains & les autres aux Slaves. Ce mélange ſeroit inexplicable ſans les données hiſtoriques que nous venons de fournir. Des peuples barbares, cohabitans d'un pays, adoptent aiſément les uſages & les rites religieux les uns des autres, pourvu qu'aucun parti ne demande l'acceptation excluſive des ſiens. Ce

*) *Jornandes*, p. 83.

**) *Paulus Diaconus de geſtis Longob. L. I, C.* 2 & 9.

***) *Procop. L. III, C.* 35.

mélange d'uſages & de rites religieux a eu lieu même chez les peuples les plus cultivés, ſavoir les Grecs & les Romains. Une tolérance réciproque opère quelquefois dans un moment, ce que l'opiniâtreté, le fer & le feu n'effectuent à peine qu'au bout de pluſieurs ſiècles.

Le ſecond phénomène eſt une langue différente de celle des Slaves, & qui eſt un dialecte des langues pruſſienne & lette, comme je l'ai remarqué plus haut d'après *Hartknoch* *).

Cet auteur ne nomme à la vérité que les *Véruli* dans le Meklenbourg, mais on ne peut raiſonnablement douter que cette langue ne fût propre à la plus grande partie des Vénèdes le long de la Baltique. Ce pays étant occupé depuis long-temps par de nouveaux colons depuis l'exſtirpation presque entière de ſes habitans, il ne s'y eſt conſervé que peu de documens hiſtoriques; cependant, comme dans pluſieurs de ces contrées ſe ſont maintenues des tribus iſolées, des recherches ultérieures dans ce genre ſeroient à la vérité difficiles, mais non impoſſibles.

Le comte *Jean Potocki* **), en faiſant en 1794 le tour des pays habités par les Vénèdes, parvint jusqu'à *Luckau* dans le duché de Lunebourg, où ſe trouvent encore d'anciens habitans, qui parlent un jargon allemand ſans article & ſans liaiſon, presqu'inintelligible. Le comte ſe plaint de la contrainte que leur impoſe à cet égard le gouvernement Hanovrien. Mais d'où fait-il que ce patois n'eſt pas effectivement leur ancien langage? & pourquoi a-t-il fait ce voyage avec la prévention qu'il y trouveroit abſolument un dialecte ſlave?

Quant à ce qui concerne la reſſemblance de l'ancienne langue des *Véruli* du Meklenbourg avec celle des anciens Pruſſiens & des Lettes, ce qui pourroit le plus étonner dans la première ce ſont les traces fréquentes de latin qui s'y trouvent. Mais les *Hérules* & les *Winuli* qui ont ſi long-temps habité les frontières de l'empire romain, n'auroient-ils

*) *De rebus Pruſſ. Diſſert.* 5.

**) Voyage en Baſſe-Saxe p. 35.

pas apporté avec eux ce patois, cette langue mêlée, à leur retour sur les côtes de la Baltique? De plus, les Vénèdes, comme les Prussiens, étant des peuples trafiquans & navigateurs, la ressemblance de leurs langues pouvoit se maintenir plus long-temps par une suite même de leur commerce, & se perfectionner de plus en plus. Cet échange de langues est commun à toutes les nations commerçantes, & eu égard au latin, il est à croire que les Prussiens en ont plus appris des Hérules, que ceux-ci des Prussiens.

Le troisième phénomène est l'usage de brûler les morts, introduit chez ces Vénèdes; car le passage cité plus haut & tiré des lettres de *Boniface* relatif aux *Winedi*, n'est applicable qu'aux Vénèdes de *la mer* Baltique. D'abord, cet usage étoit commun à tous les peuples de la Germanie; & ce que *Procope* *) nous apprend des *Hérules* en général, doit aussi être appliqué à ces *Vénédo-Hérules* ou *Veruli* en particulier. Selon cet auteur, les *Hérules* n'avoient pas seulement en commun avec les autres peuples de la Germanie l'usage de brûler leurs morts, mais ils avoient outre cela la coutume de tuer leurs vieillards & leurs malades, & une femme qui se pendoit sur le tombeau de son mari passoit pour digne des plus grands éloges, tandis que celles qui s'y refusoient, emportoient la haine éternelle de la famille du défunt. Nous avons déjà remarqué cette ressemblance d'usages mortuaires chez les anciens Prussiens; & on trouve chez les Germano-Vénèdes dans les temps les plus modernes, des traces qui prouvent la barbarie qui accompagnoit ces usages. Le comte *Potocki* **) rapporte dans son *Voyage* une anecdote qui doit être arrivée sous le roi George II, aux environs de Ghörde, château de chasse de l'électeur d'Hanovre, dans un bois, appelé la *forêt de douleurs* (Jammerholz). Un jour que ce prince étoit à la chasse dans ces contrées, il entendit des cris, & en approchant du lieu d'où ils partoient, il vit un paysan vénède sur le point d'égorger son vieux père. Ce paysan déclara qu'il ne faisoit que suivre un usage in-

*) *De Bello Gothico*, *L. II*, *C.* 14.

**) P. 42.

troduit parmi eux, mais que la crainte des Allemands, au milieu desquels ils vivoient, leur faiſoit pratiquer en ſecret. N'eſt-ce pas-là le même uſage que celui que *Procope* attribue aux *Hérules*?

Les *Winidi* de *Boniface*, dont il rapporte cet uſage *hérule*, ne ſauroient donc être que ces Germano-Vénèdes, ces deſcendans des anciens Hérules. C'eſt dans le même ſens qu'il faut prendre le paſſage de *Ditmar* de Merſebourg. Il eſt inſéré dans ſa Chronique, preſque ſans aucune liaiſon; & *Boleslas*, premier roi de Pologne, régnant en même temps ſur les Vénèdes entre l'Elbe & la Baltique, & ſur les Pruſſiens, le paſſage en queſtion ne peut ſe rapporter qu'à un de ces derniers peuples.

De cette manière les anciennes & nouvelles données hiſtoriques ſe combinent parfaitement: l'ancien s'explique par le nouveau, & réciproquement; ce qu'il y a de problématique dans les titres obſcurs de ce peuple s'éclaircit.

Jetons encore un coup d'oeil ſur les peuples Slaves mêmes.

On ne trouve rien dans leurs annales qui puiſſe donner lieu à la ſuppoſition qu'ils ayent jamais connu & pratiqué l'uſage de brûler les morts. *Procope* *) qui fournit un tableau des moeurs & des uſages des *Slavini*, n'en dit rien. Bien plus, nous apprenons le contraire par les annales de leurs hiſtoriens indigènes. Conſultons *Dlugoſs* & *Cromerus*; toutes les fois qu'il eſt queſtion des derniers honneurs rendus aux cadavres, c'eſt-à-dire avant la converſion de ces peuples au chriſtianisme, nous trouverons toujours qu'il eſt parlé de l'inhumation de ces corps, & non de leur combuſtion.

La ſeule choſe qu'on trouve, c'eſt qu'ils enterroient auſſi leurs morts en plain champ & conſtruiſoient des collines au-deſſus du lieu de leur ſépulture. Les deux collines près de Cracovie en ſont la preuve; la première élevée en l'honneur du roi *Grack*, la ſeconde en mémoire de ſa fille *Vanda* **). Du reſte, *Dlugoſs* lui-même décrit la combuſtion

*) *De bello Gothico*, *L. III*, *C.* 14.

**) *Dlugoſs Hiſt. Polon. L. I*, *p.* 51 & 56.

des cadavres en Pruſſe comme étant l'uſage d'un peuple étranger & particulier *).

Alexandre Guagnini **) dit à la vérité des Sarmates ou Slaves en général, parmi lesquels il compte également les Pruſſiens, les Lettes & les Vénèdes occidentaux le long de la Baltique: „Leurs lieux de ſépulture étoient dans les forêts & dans les champs; ils y conſtruiſoient de hautes collines, qu'ils environnoient de pierres. On voit encore de ces eſpèces de tombeaux ça & là dans les contrées de la Ruſſie. Quelques-uns étoient auſſi dans l'uſage, comme les Romains, de brûler les cadavres, & d'en recueillir les cendres dans des urnes."

Je veux croire, d'après *Guagnini*, qu'on trouve en Ruſſie & dans toute la Pologne de ces tombeaux, & qu'il faut en attribuer une partie aux Sarmates. Mais ne peuvent-ils pas auſſi avoir été conſtruits par les peuplades Gothiques qui ont occupé long-temps ces contrées dans leur migration vers la mer-Noire & les rives du Danube? Ce que, du reſte, cet auteur dit de la combuſtion des cadavres uſitée chez les Sarmates, ſe fond uniquement ſur la fauſſe ſuppoſition que les anciens Pruſſiens & leurs tribus alliées dans ces contrées, ſont d'origine ſarmate.

Anton ***) prétend à la vérité retrouver l'uſage de brûler les morts, dans l'étymologie de quelques mots ſlaves; mais ce ſentiment ne mérite aucune attention, puiſqu'il n'eſt ſoutenu par aucune preuve hiſtorique venant à ſon appui.

Ce ſont donc les anciens Pruſſiens & les Vénèdes occidentaux le long de la Baltique, qui avoient, à l'excluſion des peuples ſlaves, l'uſage de brûler leurs morts, & de dépoſer en terre les urnes dans leſquelles ils avoient recueilli leurs cendres. Ce furent auſſi ces peuples qui conſervèrent le plus long-temps ces rites, étant les derniers qui furent convertis au chriſtianisme. Mais les rites de brûler leurs morts ne leur étoient

*) *Dlugoſs Hiſtor. Polon. L. II, p.* 115.

**) *Sarmatiae Europeae deſcriptio, p.* 4.

***) *Ueber die alten Slaven. Lipſiæ* 1783 & 1789.

étoient propres qu'en tant qu'ils furent d'origine germanique, comme il paroît en partie par ce que nous venons de voir, & comme nous l'allons plus clairement prouver dans ce qu'il nous reste à dire des peuples de la Germanie.

Tacite attribue à tous les Germains sans exception l'usage de brûler leurs morts & d'élever des collines sur leurs cendres. Voici ces propres termes: *)

Funerum nulla ambitio. Id solum observatur, ut corpora clarorum virorum certis lignis crementur. Struem rogi nec vestibus, nec odoribus cumulant. Sua cuique arma, quorundam igni et equus adjicitur. Sepulcrum cespes erigit; monumentorum arduum et operosum honorem, ut gravem defunctis, aspernantur. Lamenta et lacrimas cito, dolorem et tristitiam tarde ponunt. Feminis lugere honestum est, viris meminisse **).

Le passage de *Procope* où les mêmes faits sont particulièrement attribués aux Hérules, se trouve cité plus haut.

Dans les Capitulaires de Charlemagne on trouve relativement aux Saxons un passage qui défend sous peine de mort de brûler les cadavres ***). Des chroniqueurs postérieurs confirment le même article, & *Saxon le Grammairien* affirme positivement que cet usage de brûler les morts étoit introduit chez les Danois †).

En conséquence de ces témoignages on peut admettre avec certitude; d'abord, que les tombeaux & les urnes qu'on trouve dans des

*) *De moribus Germ. C.* 27.

**) Ils n'aiment pas la pompe des funérailles. Tout ce qu'ils observent, c'est d'employer une espèce particulière de bois quand ils brûlent les cadavres de leurs grands hommes. Ils ne chargent leurs bûchers ni de vêtemens ni de parfums. Ils y posent les armes du défunt, & lorsqu'il est allumé ils y précipitent quelquefois son cheval. Un gazon couvre la tombe; ils méprisent l'honneur des monumens élevés à grands frais, comme étant à charge au défunt. Ils cessent bientôt de pleurer & de gémir sur ses cendres, mais leur douleur & leur tristesse sont durables. Les larmes sont pour les femmes, le souvenir est pour les hommes.

***) *Capit. de partibus Saxoniae*, § 6.

†) *Histor. Dan. L. VIII.*

pays, où aucune nation étrangère ne pénétra jamais, tels que les poſſeſſions danoiſes & ſuédoiſes, ſont germaniques. Il faut auſſi, en ſecond lieu, reconnoître pour germaniques les tombeaux dans les provinces qui n'ont jamais été occupées dans toutes les formes par des peuples étrangers, mais ſeulement en paſſant, telles que la Weſtphalie, le duché de Brème, la Baſſe-Heſſe, la Friſe orientale &c. En troiſième lieu, les urnes ſépulcrales dans les provinces de l'ancienne Germanie, occupées depuis par les Slaves, doivent être regardées comme germaniques, parce que les Slaves n'étoient point dans l'uſage de brûler leurs morts. Le ſeul point que je laiſſe indécis, eſt de ſavoir ſi les Slaves, lorsque dans la ſuite ils s'amalgamèrent avec les Pruſſiens & les Vénèdes occidentaux, n'adoptèrent pas cet uſage.

Il peut paroître étrange que les urnes ſépulcrales, autant que je le ſais, ſont infiniment plus rares dans les contrées du Rhin *) & du Danube qu'au nord de l'Allemagne. Mais cette différence ne peut-elle pas être attribuée à la converſion plus précoce au Chriſtianisme de ces contrées, ou à leur culture prématurée?

Voilà ce que l'hiſtoire nous apprend; mais quels nouveaux argumens nous fourniſſent les urnes mêmes & la conſtruction des tombeaux, les uſtenſiles & les autres choſes découvertes dans leur ſein? Permettons-nous encore quelques obſervations à ce ſujet.

L'inhumation au pied d'une hauteur, les collines élevées ſur les tombeaux, leur affermiſſement & leur environnement fait par des pierres brutes, l'érection des autels à côté compoſés de maſſes de pierres groſſières, tout déſigne parfaitement la ſimplicité originaire de nos ancêtres & leur dénuement de tout art, que *Tacite* aime tant à faire contraſter avec la vaine frivolité des Romains de ſon temps, qui dans leurs monumens ne recherchoient que le faſte, le giganteſque, & un art ſurchargé d'ornemens.

*) Au moment où j'écrivois ceci, je ne connoiſſois point encore les collines ſépulcrales aux environs de *Wisbaden*.

Les urnes ſont l'ouvrage de potiers groſſiers; l'argile n'en eſt pas pure, & rarement bien cuite. Cependant les ornemens mal façonnés prouvent qu'elles ont été faites dans un temps où ces peuples avoient déjà quelque commerce avec leurs voiſins cultivés, & quelque connoiſſance de leurs ouvrages de l'art, puisqu'ils cherchoient en partie à les imiter.

Les uſtenſiles trouvés, ſurtout ceux de pierre, prouvent avec quelles armes chétives & inégales ces peuples du Nord combattoient leurs puiſſans ennemis, les Romains. Les ouvrages de métal ſont, en partie, les premières tentatives groſſières d'une nation peu cultivée, en partie des ouvrages achevés, pris ou achetés aux Romains. Ces fabrications romaines, qui conſiſtoient en fers de lances, agrafes, bracelets, pincettes, miroirs &c., prouvent clairement qu'il faut remonter aux deux premiers ſiècles de notre ére, où ces deux nations, tantôt ennemies, tantôt amies, étoient en relation & en commerce entre elles.

Quant à la découverte des monnoies dans les monumens & les urnes funèbres, j'ai expoſé & développé plus haut mes objections & mes doutes. Cependant, quoique jusqu'ici il n'y ait que peu de cas entièrement vérifiés, ce ſont toujours des monnoies romaines & des monnoies avec l'empreinte des empereurs des deux premiers ſiècles, qu'on trouve dans ces urnes, à l'exception de la ſeule médaille du grand-maître de l'Ordre teutonique. Et quels argumens pour déterminer les époques de la fondation de ces monumens funéraires, peuvent être plus ſûrs & plus convaincans que ceux que l'on tire des monnoies qu'ils renfermoient? Il eſt évident que ces urnes étoient germaniques, puisque alors les Germains n'avoient point encore abandonné leurs anciennes demeures.

Ces obſervations jointes à ce que l'hiſtoire nous apprend, ne nous permettent plus de douter qu'il faille attribuer ces monumens & ces urnes uniquement à des peuples germains & à leurs descendans.

Les queſtions relatives à cette matière pourroient être étendues plus loin. On pourroit demander premièrement, ſi l'uſage de brûler les morts a eu originairement lieu chez les peuples de la Germanie? & quelle espèce de culte religieux ils attachoient à cet uſage? & ſecondement, ſi cet uſage a été introduit parmi eux par quelque peuple étranger?

Pluſieurs ſont d'avis que quelque temps avant la naiſſance de Jéſus-Chriſt des peuples orientaux des *Palus-Méotides*, appelés les *Aſes* ou *Aſiens*, ont pénétré en Occident, & ſe ſont mêlés & confondus inſenſiblement avec les tribus germaniques. Ces peuples doivent avoir apporté avec eux des uſages & des moeurs qu'ils ont introduits parmi les Germains, au nombre desquels on place le culte d'Iſis & d'autres rites égyptiens. *Tacite* lui-même ſemble confirmer ce dernier ſentiment, quand il dit:*) „*Pars Suevorum et Iſidi ſacrificat. Unde cauſa et origo peregrino ſacro, parùm comperi; niſi quod ſignum ipſum, in modum liburnae figuratum, docet, advectam religionem*" **).

Quelques auteurs de deſcriptions d'urnes inſiſtent ſur cette circonſtance, & prétendent y avoir trouvé des inſtrumens de culte reſſemblans à des ſiſtres égyptiens. *Thebeſius* dit: „On a trouvé dans le *Töppelberg*, non loin de *Trebnitz* en Siléſie, un petit grelot d'argile, conſiguré comme un ſiſtre." Mais la matière ſeule dont il étoit

*) *De moribus German. C.* 4.

**) Une partie des Suéves fait auſſi des ſacrifices à Iſis. J'ignore d'où cet uſage & ce culte étranger peut leur être venu, ſi ce n'eſt que la ſtatue même de la Déeſſe faite en forme de galère, prouve que c'eſt d'au-delà des mers qu'il tire ſon origine.

conſtruit, renverſe le témoignage de l'auteur: un fiſtre étant un inſtrument de muſique bruyant, & ne pouvant par conſéquent être d'argile, mais devant être de métal. *Möhſen* dans ſon *Hiſtoire des ſciences dans la Marche de Brandebourg* fait auſſi mention de ces fiſtres, mais de métal, dont l'un a été trouvé, ſelon *Beckmann*, près de Francfort ſur l'Oder, l'autre dans des urnes de Siléſie *). Il faut rapporter également ici, ce que *Schwabe* rapporte de la figure de taureau trouvée dans des urnes de la Thuringe **).

Quand même ces découvertes de ſymboles ſacrés du culte des Égyptiens ſeroient ſuffiſamment avérées, il ſeroit toujours étrange de trouver ces inſtrumens conſacrés au ſervice des dieux, & même des idoles, dans des urnes ſépulcrales, puiſque les Égyptiens ſont du petit nombre des peuples de l'antiquité qui n'étoient pas dans l'uſage de brûler leurs morts, mais qui avoient adopté généralement celui de les conſerver par l'embaumement.

La découverte de ces monumens, ſurtout dans les urnes ſépulcrales, exige donc un plus ample enquis, & mérite confirmation.

D'après les traditions du Nord, c'eſt à *Othin*, qui paroît tantôt comme un dieu, tantôt comme un héros déifié, tantôt comme le chef des peuples étrangers d'Aſiens, que les peuples du Nord doivent l'uſage de brûler les cadavres. Mais je ne m'arroge aucun ſuffrage dans cette matière.

Peut-être qu'*Othin*, *Odin*, *Oden*, *Wodan*, *Woda* n'eſt dans ſa première origine autre que l'ancien mot allemand *Odem*, *Athem*, (ſouffle, reſpiration, haleine, eſprit) par où les anciens Germains déſignoient *l'eſprit de vie*, *l'eſprit primitif*, *l'être ſuprême*. N'appeloit-

*) §. 7. p. 32.

**) *De monimentis quibusdam ſepulcralibus Saxenburgicis commentatio* 1771.

Digitized by Google

on pas de la même manière, du mot allemand *Erde*, qui ſignifie terre, la déeſſe de la terre, la déeſſe-mère, *Herta?*

Au reſte, l'uſage de brûler les morts étoit commun à tous les peuples celtes *), dont le plus petit nombre avoit entendu parler d'un dieu ou demi-dieu, nommé *Othin.*

*) J. Céſar (*L. IV, C.* 19 *de bello Gallico*) dit la même choſe des Gaulois; & pour prouver le même uſage dans la Grande-Bretagne, il n'y a qu'à voir le grand nombre de tombeaux dans leſquels on trouve les cendres & les oſſemens des morts dans des urnes. Voyez *A Tour in Scotland and the Hebrides by Pennant. Lond.* 1790.

Fautes à corriger

dans le Mémoire ſur l'Art de ſe vêtir etc. etc.

(*Claſſe IV, p.* 100 *et ſuiv.*)

P. 105	l. 8	*au lieu de*	acquerroient . . .	*liſez*	acquerroit
— 110	l. 26	- - -	les arbres leur auront	-	les arbres auront
ibid.	ib.	- - -	ils auront . . .	-	elles auront
ibid.	l. 29	- - -	& des ſaiſons; . .	-	& des ſaiſons,
— 115	l. 30	- - -	& du lin . . .	-	& du lin,
— 117	l. 1	- - -	détrempées par les pluies	-	détrempées par les pluies,

---

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google